

Ю. В. ШАРАБАН, О. В. ШЕХОВ

АНАЛІЗ КОВЗАННЯ В ЗУБЧАСТИХ ЗАЧЕПЛЕННЯХ ОПТИМАЛЬНОЇ ЗА КРИТЕРІЄМ ТОРЦЕВОГО ПЕРЕКРИТТЯ КОНСТРУКЦІЇ ПЛАНЕТАРНОГО МЕХАНІЗМУ ТИПУ 3К

У статті розглядається аналіз ковзання в зубчастих зачепленнях оптимальної за критерієм торцевого перекриття конструкції планетарного механізму типу 3К. Оптимізація торцевого перекриття була виконана шляхом вибору значень коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс з допустимих діапазонів варіювання їх значень. Допустимі діапазони варіювання визначаються двома граничними значеннями – мінімальним і максимальним. Знайдені допустимі діапазони значень коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс задовольняють умовам співвідносності зубчастих зачеплень планетарного механізму типу 3К. Для кожного зубчастого зачеплення механізму формуються дві параметричні функції коефіцієнта питомого ковзання, як функції двох коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс, що утворюють зачеплення. Параметричні функції визначають значення коефіцієнта питомого ковзання в нижній точці активного профілю зуба відповідного зубчастого колеса. Побудова двовимірних графіків цих функцій дозволяє визначити характер зміни значення коефіцієнта питомого ковзання залежно від значень коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс, які приймаються як незалежні величини. Аналіз цих графіків дозволяє встановити характер зміни коефіцієнтів питомого ковзання і зробити висновок про можливість оптимізації питомого ковзання цього заданого зубчастого зачеплення і оцінити вплив такої оптимізації на торцеве перекриття зубчастого зачеплення.

Ключові слова: оптимізація; оптимальне проектування планетарних механізмів; планетарний механізм; планетарний механізм типу 3К; планетарний механізм типу 3К з двовісцевими сателітами; планетарний механізм типу 3К з одновісцевим сателітом; торцеве перекриття зубчастих зачеплень; коефіцієнт торцевого перекриття, питоме ковзання, коефіцієнт питомого ковзання.

Ju. SHARABAN, A. SHEHOV

ANALYSIS OF SLIP IN GEARINGS OF OPTIMAL TYPE 3K PLANETARY MECHANISM BY THE CRITERION OF END OVERLAP

The article considers the analysis of slip in the gearing of the optimal design of the planetary mechanism of type 3K according to the criterion of end overlap. Optimization of the end overlap was performed by selecting the values of the gear displacement coefficients from the permissible ranges of variation of their values. The permissible ranges of variation are determined by two limit values - minimum and maximum. The found permissible ranges of the gear displacement coefficients satisfy the conditions of the co-axiality of the gearing of the planetary mechanism of type 3K. For each gearing of the mechanism, two parametric functions of the specific slip coefficient are formed as functions of the two gear displacement coefficients that form the mesh. The parametric functions determine the value of the specific slip coefficient at the lower point of the active tooth profile of the corresponding gear. The construction of two-dimensional graphs of these functions allows us to determine the nature of the change in the value of the coefficient of specific slip depending on the values of the gear displacement coefficients, which are taken as independent quantities. The analysis of these graphs allows us to establish the nature of the change in the coefficients of specific slip and to draw a conclusion about the possibility of optimizing the specific slip of this given gear and to assess the impact of such optimization on the end overlap of the gear.

Keywords: optimization; optimal design of planetary mechanisms; planetary mechanism; planetary mechanism type 3K; planetary mechanism type 3K with twin satellites; planetary mechanism type 3K with single-crown satellite; end overlap of gears; end overlap coefficient; specific slip; coefficient of specific slip.

Вступ. Планетарні механізми типу 3К відносяться до групи зубчастих механізмів з пов'язаними колесами. Геометричний розрахунок кожного із зачеплень, до складу яких входить пов'язане колесо, не можна робити ізольовано, вони пов'язані додатковими умовами. Параметри пов'язаного колеса мають бути прийнятні для усіх цих зачеплень. Геометричні показники якості таких зачеплень також будуть взаємозалежними. Завдання вибору значень коефіцієнтів зміщення коліс для таких механізмів, як правило, вирішується методом підбору, або шляхом застосування оптимізаційної процедури. Рішення про прийняття (вибору) результатів оптимізаційної процедури бажано робити тільки після аналізу усіх або заданих геометричних показників якості зачеплень. Тому розробка алгоритму вищезгаданого типу аналізу, що враховується особливості оптимізаційної процедури, є актуальним завданням для практики проектування планетарних зубчастих механізмів.

Аналіз існуючих досліджень. У роботі [1] наведена методика оптимального проектування планетарних механізмів типу 3К з урахуванням вимог, що накладаються на коефіцієнти торцевого перекриття його зубчастих зачеплень. Особливістю даної методики є дворовнева оптимізація. На першому рівні виконується вибір оптимальних (відповідних) значень кутів зачеплень зубчастих коліс механізму.

Аналіз та оптимальний вибір коефіцієнтів торцевого перекриття зубчастих зачеплень механізму виконується на другому рівні. При цьому на кожному рівні оптимізації формуються відповідні графіки, що відображають властивості цільових функцій оптимізації і допустимі області зміни параметрів, що варіюються.

У роботі [2] проведено аналіз досліджень по тертю і коефіцієнту корисної дії в зубчастих зачепленнях. Автори статті встановили три різні підходи визначення ККД зубчастих передач: безпосереднє вимірювання втрат потужності реальної зубчастої передачі; контактнo-динамічне моделювання на основі реальних фізичних процесів; аналітичне моделювання процесів тертя в зубчастій передачі на підставі емпіричної інформації про тертя, отриманої на спеціальних машинах тертя.

Метод проектування циліндричної зубчастої передачі зовнішнього зачеплення з низьким коефіцієнтом ковзання (Low Sliding Ratio) розглядається у роботі [3]. На основі кінематики, диференціальної геометрії та шляху контакту по черзі встановлюються загальні математичні моделі профілів зубців рейки, шестерні та сполученого зубчастого колеса. Потім, відповідно до співвідношення між шляхом кон-

© Ю. В. Шарабан, О. В. Шехов, 2025

такту та коефіцієнтом ковзання, пропонується шлях контакту, описаний кубічною функцією. Для забезпечення безперервності дії та відсутності перешкод створюються твердотільні моделі сполученої пари зубчастих коліс, а моделювання руху проводиться на прикладі. Аналізується вплив коефіцієнтів функції шляху контакту на коефіцієнт ковзання, форму зуба та коефіцієнт контакту. Ефективність зачеплення та знос зубців зубчастого приводу LSR оцінюються шляхом порівняння з евольвентним зубчастим приводом. Результати показують, що цей прямозубий зубчастий привід LSR має вищий коефіцієнт передачі та кращі протизношувальні характеристики. Розвиток методу проєктування, розглянутого в даній роботі, було реалізовано при проєктуванні плоского зубчастого приводу у роботі [4]. У цій роботі було побудовано математичну модель плоского зовнішнього зубчастого зачеплення з низьким значенням коефіцієнта ковзання. Було вивчено умови обмеження ширини зуба, аналізується вплив заданих коефіцієнтів функції контактної шляху на характеристики ширини зуба плоского зубчастого колеса. Наведено методи розрахунку точки зачеплення поверхні зуба та коефіцієнта ковзання, а також вивчається вплив конструктивних параметрів на коефіцієнт ковзання. Рациональність конструкції профілю зуба перевіряється шляхом точного моделювання та симуляції руху.

Параметрична оптимізація ефективності конструкцій планетарних механізмів для редакторів промислових роботів, заснованих на планетарному механізмі типу 3К, розглядається в роботах [5, 6]. Як цільові функції оптимізації обрані втрати потужності як при русі вперед (прямий хід), так і при русі назад (зворотний хід). Окремий аналіз тертя ковзання в зубчастих зачепленнях планетарного механізму типу 3К авторами вказаних робіт не виконувався.

Вплив тертя ковзання на заїдання зубців зубчастих коліс проведений в роботі [7]. Автори запропонували динамічну модель заїдання-ковзання циліндричної зубчастої передачі зовнішнього зачеплення. У цій моделі розглядаються зміни в часі жорсткості зубчастого зачеплення, розбіжність зубців, тертя між поверхнями зубців зубчастих коліс і переривчасте ковзання. Враховуючи вклад швидкості вібрації в швидкість ковзання зубців коліс, виявляються умови переходу між станом переривчастого ковзання і прослизання.

У роботі [8] проведено аналіз кінематики внутрішнього зачеплення зубчастих пар. Детально було проаналізовано швидкість ковзання та питома ковзання інтервалу зачеплення (практичне та теоретичне). Також фактори, що впливають на покращення умов зачеплення, тобто кількість зубців, коефіцієнт зміщення, швидкість передачі тощо.

Аналіз стану проблеми з розробкою методів розрахунку зношування і довговічності зубчастих передач з металевими колесами, металополімерних передач та полімерних передач наведено у роботі [9]. Подано базовий авторський метод розрахунку циліндричних передач. Описано чинники впливу, за якими на основі базового методу сформовано модифіковані методи розрахунку зубчастих передач.

У роботі [10] досліджено вплив швидкості ковзання в прямозубій шестерні для суми зубців 100 (зміненої на $\pm 4\%$) з постійною міжосьовою відстанню. Добуток контактної напруженості та коефіцієнта швидкості ковзання розраховано для варіативного зсуву профілю. Було обчислено вплив герцівського стиснення, вигину та зсувного прогину на швидкість ковзання в точках вздовж шляху контакту.

Вплив модифікації висоти голівки зубця типу S_0 на швидкість ковзання евольвентного прямозубого зубчастого колеса досліджено у роботі [11]. Для аналізу розглядаються чотири критичні точки, такі як початок зачеплення, нижня точка контакту одного зуба, верхня точка контакту одного зуба та точка розчеплення, що відповідає шестерні. Оцінено довжину підходу та довжину виїмки для модифікованих зубчастих коліс. Обговорюється вплив модифікації висоти голівки зуба на прогнозування терміну служби та зносу від контактної втоми. Оцінено добуток контактної напруженості та швидкості ковзання (у критичних точках).

У статті [12] наведено огляд конструювання та виробничих міркувань для модифікованої евольвентної зубчастої передачі з акцентом на космічне застосування. Залежно від вимог до зубчастої передачі, можуть бути необхідні різні ступені модифікації, включаючи модифікацію профілю, щоб забезпечити плавну роботу та тривалий термін служби. Повне врахування технологічності призведе до вищої якості деталей за стандартом AGMA.

Мета роботи (дослідження) – виконати аналіз значень коефіцієнта питомого ковзання для зубчастих зачеплень конструкції планетарного механізму типу 3К, яка є оптимальною за критерієм торцевого перекриття. Результати такого аналізу дозволять конструктору оцінити характер зношування зубчастих коліс механізму.

Матеріали досліджень. Аналіз значень коефіцієнта питомого ковзання зубчастих зачеплень конструкції планетарного механізму типу 3К оптимальної за критерієм торцевого перекриття виконаємо для конструкції, яка розглядалася в роботі [1]. У цій роботі представлена методика оптимізації вибору коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс планетарного механізму типу 3К за критерієм торцевого перекриття. Демонстрація ефективності методики була виконана на прикладі одновінцевої схеми планетарного механізму 3К з дрібномодульними зубчастими колесами. Скористаємося позначеннями, поясненнями, рисунками, таблицями, співвідношеннями і рівняннями роботи [1].

На рис. 1 показані кінематичні схеми планетарного механізму типу 3К з двовінцевими (рис. 1, а) і одновінцевими сателітами (рис. 1, б) відповідно.

Для схеми одновінцевого механізму маємо такі вихідні дані:

$$Z_a=17, Z_g=29, Z_b=73, Z_f=29, Z_e=76 \quad - \text{кількість}$$

зубців зубчастих коліс;

$$m_a = m_b = m_e = 0,4 \text{ мм} \quad - \text{модуль зубчастих зачеплень};$$

$$\alpha_{ia} = \alpha_{ib} = \alpha_{ie} = 20^\circ \quad - \text{профільні кути зубчас-}$$

тих коліс; $\alpha_{wa}=23,1762^\circ$,

$\alpha_{twb}=28,4384^\circ$, $\alpha_{twe}=20,0684^\circ$ – кути зачеплень зубчастих коліс;

$a_{wa}=a_{wb}=a_{we}=9,4041$ мм – міжосьові відстані зубчастих зачеплень;

$x_{\Sigma ag}=x_a+x_g=0,55$, $x_{Dbg}=x_b-x_g=1,8325$,
 $x_{Def}=x_e-x_f=0,0103$ – коефіцієнт суми зміщень зубчастого зачеплення Z_a-Z_g і коефіцієнти різниці зміщень відповідно зубчастих зачеплень Z_g-Z_b і Z_f-Z_e ;

передаточне відношення механізму
 $U_{ae}^b=134,1176$.

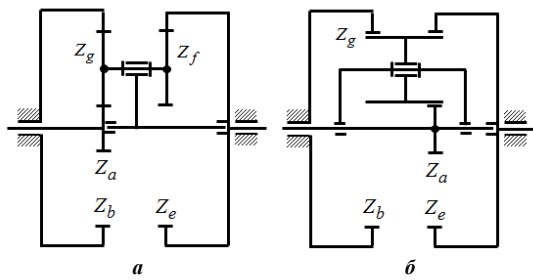


Рисунок 1 – Схема планетарного механізму типу 3К

Передаточне відношення механізму U_{ae}^b , показаного на рис. 1, б, визначають по формулі

$$U_{ae}^b = \frac{1 + \frac{Z_b}{Z_a}}{1 - \frac{Z_b}{Z_e}}. \quad (1)$$

З умови $Z_b < Z_e$, отримаємо $U_{ae}^b > 0$.

Значення коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс повинні задовольняти наступним рівнянням

$$x_a + x_g = x_{\Sigma ag}, \quad (2)$$

$$x_b - x_g = x_{Dbg}, \quad (3)$$

$$x_e - x_f = x_{Def}. \quad (4)$$

При цьому їх значення забезпечують задані обмеження на коефіцієнти торцевого перекриття зубчастих зачеплень механізму.

Результати оптимізації торцевого перекриття зубчастих зачеплень одновинцевого планетарного механізму типу 3К наведено у табл. 1.

Допустимий діапазон варіювання коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс розглядатимемо як відрізок числової осі, що задається двома точками x_{il} і x_{ir} у табл. 1. Помітимо, що для коефіцієнтів зміщення ведучих зубчастих коліс зубчастих зачеплень ці точки відповідають мініимальному і максимальному значенням. Для ведених зубчастих коліс може бути

навпаки лл (див. зубчасте зачеплення Z_a-Z_g). Точки відповідають значенням коефіцієнтів зміщення, які були визначені при рішенні рівнянь (2)–(4), в табл. 1 позначені як x_{is} . Точки, для яких коефіцієнти торцевого перекриття зубчастих зачеплень дорівнюють 1,2, в табл. 1 позначені як x_{il2} . Якщо ці точки не належать допустимому діапазону, то вони виділяються курсивом (див. зубчасте зачеплення Z_a-Z_g).

Таблиця 1 – Допустимі діапазони варіювання коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс

Зубчасте зачеплення Z_a-Z_g				
x_i	x_{il}	x_{ir}	x_{is}	x_{il2}
x_a	0,006	1,246	0,3	1,2637
x_g	0,544	-0,696	0,25	-0,7137
$\varepsilon_a(x_a, x_g)$	1,4305	1,2066	1,4148	1,2
Зубчасте зачеплення Z_g-Z_b				
x_g	-0,696	2	0,25	1,174
x_b	1,1365	3,8325	2,0825	3,0065
$\varepsilon_a(x_g, x_b)$	1,799	0,9018	1,5466	1,2
Зубчасте зачеплення Z_f-Z_e				
x_f	-0,0103	2	0,25	1,344
x_e	0	2,0103	0,2603	1,3543
$\varepsilon_a(x_f, x_e)$	1,622	0,9808	1,5537	1,2

Для евольвентного зачеплення прямозубих циліндричних коліс коефіцієнти питомого ковзання в нижній граничній точці активного профілю зубця для шестерні 1 і колеса 2 визначають за формулами:

$$\vartheta_{p1} = \frac{(tg\alpha_{a2} - tg\alpha_{tw})(u \pm 1)}{tg\alpha_{tw} \mp u(tg\alpha_{tw} - tg\alpha_{tw})}, \quad (5)$$

$$\vartheta_{p2} = \frac{(tg\alpha_{a1} - tg\alpha_{tw})(u \pm 1)}{utg\alpha_{tw} \mp (tg\alpha_{a1} - tg\alpha_{tw})}, \quad (6)$$

де u – передаточне число зубчастого зачеплення;

α_{tw} – кут зачеплення;

α_{a1} – кут профіля зубця шестерні зачеплення в нижній граничній точці активного профілю зубця;

α_{a2} – кут профіля зубця колеса зачеплення в нижній граничній точці активного профілю зубця;

У формулах (5), (6) верхні знаки відповідають випадку зовнішнього зачеплення, а нижні – внутрішнього зачеплення.

Питоме ковзання характеризує теплонапруженість і до певної міри зносостійкість сполучених поверхонь, оскільки воно пропорційна до питомої роботи сил тертя.

Використаємо функції

$$f_{ag-x2}(x_1), f_{gb-x2}(x_1), f_{gb-x2}(x_1) \text{ і } f_{fe-x2}(x_1),$$

які були введені в роботі [1]. Ці функції дозволяють для зубчастого зачеплення визначити коефіцієнт зміщення одного зубчастого колеса, знаючи значення

коефіцієнта зміщення другого зубчастого колеса. Функціональний зв'язок коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс відповідного зачеплення планетарного механізму задається рівняннями (2)–(4).

Визначення значення коефіцієнта питомого ковзання зубчастого зачеплення залежить від параметрів початкового контуру, прийнятого зуборізного інструменту та системи розрахунку геометрії зачеплення.

Зубчасте зачеплення Z_a-Z_g . На рис. 2 показаний графік функції $x_g = f(x_a) = f_{ag_x2}(x_a)$, де як аргумент функції було обрано значення коефіцієнта зміщення сонячного колеса Z_a , а значенням функції є значення коефіцієнта зміщення одновінцевого сателіту Z_g .

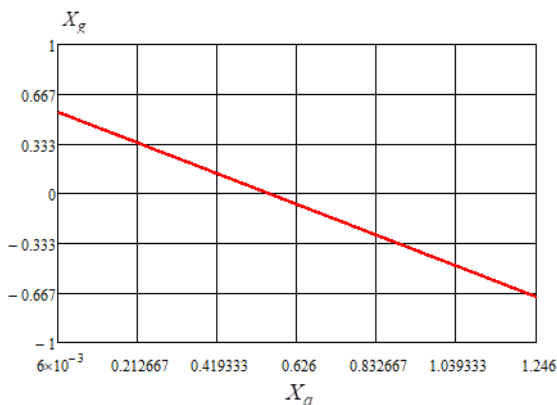


Рисунок 2 – Графік функції $f_{ag_x2}(x_a)$

Прийmemo таке припущення: у загальному випадку коефіцієнти питомого ковзання зубчастого зачеплення Z_a-Z_g , визначувані формулами (5) і (6), можна розглядати як функції п'яти аргументів: Z_a , Z_g , m_a , x_a , x_g . Візьмімо до уваги, що значення перших трьох аргументів не є незалежними величинами, а будуть заданими параметрами. Тоді функції (5) і (6) розглядатимемо як параметричні функції двох аргументів – коефіцієнтів зміщення x_a і x_g .

Отже, для зубчастого зачеплення Z_a-Z_g маємо наступні дві параметричні функції:

$$\vartheta_{p_a}(x_a, x_g) = \frac{(tg\alpha_{a2} - tg\alpha_{tw})(u+1)}{tg\alpha_{tw} - u(tg\alpha_{tw} - tg\alpha_{tw})}, \quad (7)$$

$$\vartheta_{p_g}(x_a, x_g) = \frac{(tg\alpha_{a1} - tg\alpha_{tw})(u+1)}{utg\alpha_{tw} - (tg\alpha_{a1} - tg\alpha_{tw})}, \quad (8)$$

де $u = Z_g / Z_a$ – передаточне число зубчастого зачеплення;

$\alpha_{tw} = \alpha_{tw_ag}(x_a, x_g)$ – кут зачеплення;

$\alpha_{a1} = \alpha_{a_a}(x_a, x_g)$ – кут профіля зубця зубчастого колеса Z_a в нижній граничній точці активного

профілю зубця;

$\alpha_{a2} = \alpha_{a_g}(x_a, x_g)$ – кут профіля зубця зубчастого колеса Z_g в нижній граничній точці активного профілю зубця.

На рис. 3 показані графіки функцій (7) і (8), що відображають характер залежності коефіцієнтів питомого ковзання зубчастого зачеплення Z_a-Z_g від значень коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс, які були прийняті як незалежні змінні (не враховувалося обмеження (2)).

Графіки функцій $\vartheta_{p_a}(x_a, x_g)$ і $\vartheta_{p_g}(x_a, x_g)$ побудовані для прямокутної області можливих значень коефіцієнтів x_a та x_g . Прямокутна область, де $x_a \in [x_{a\min}, x_{a\max}]$ і $x_g \in [x_{g\min}, x_{g\max}]$, задавалася наступними параметрами: $x_{a\min} = 0,006$; $x_{a\max} = 2$; $x_{g\min} = -0,696$; $x_{g\max} = 0,544$.

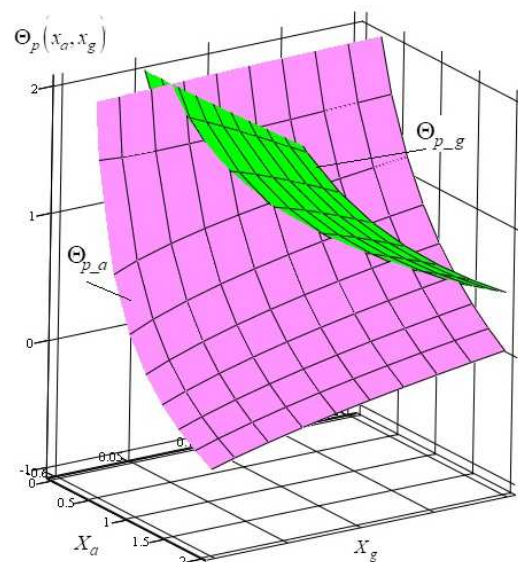


Рисунок 3 – Графіки функцій $\vartheta_{p_a}(x_a, x_g)$ і $\vartheta_{p_g}(x_a, x_g)$

Значення $x_{a\min}$, $x_{g\min}$, $x_{a\max}$ і $x_{g\max}$ були задані значеннями, які наведені у табл. 1. При цьому слід зазначити, що за деяких таких значеннях буде присутньою інтерференція зубців. Тому було змінено нижні значення змінних, які подані у табл. 1, на наступні: $x_{a\min} = 0$; $x_{g\min} = -0,6$.

Лінія перетину поверхонь ϑ_{p_a} та ϑ_{p_g} визначає значення коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс зачеплення Z_a-Z_g , при яких коефіцієнти питомого ковзання (7) та (8) рівні між собою.

У разі, коли задається значення кута зачеплення, то функції коефіцієнтів питомого ковзання (7) та (8) будуть функціями однієї незалежної змінної. В якості цієї змінної можна вибрати коефіцієнт зміщення будь-якого колеса зубчастого зачеплення Z_a-Z_g .

Отже, маємо наступні функції однієї незалеж-

ної змінної x_i , де $i = a$ або $i = g$:

$$\vartheta_{p-a}(x_i) = \begin{cases} \vartheta_{p-a}(x_a, f_{ag-x2}(x_a)), x_i = x_a \\ \vartheta_{p-a}(f_{ag-x2}(x_g), x_g), x_i = x_g \end{cases}, \quad (9)$$

$$\vartheta_{p-g}(x_i) = \begin{cases} \vartheta_{p-g}(x_a, f_{ag-x2}(x_a)), x_i = x_a \\ \vartheta_{p-g}(f_{ag-x2}(x_g), x_g), x_i = x_g \end{cases}. \quad (10)$$

Позначимо коефіцієнти зміщення зубчастих коліс зовнішнього зачеплення Z_a-Z_g через x_1 і x_2 відповідно. Коефіцієнт зміщення x_1 прийматимемо як варійовану (змінну) величину, а коефіцієнт зміщення x_2 – як залежну величину.

Таким чином функція $f_{ag-x2}(x_1)$ визначає значення коефіцієнта зміщення x_2 . Для системи координат x_a, x_g графік цієї функції є прямою лінією, яка перетинає координатні осі під кутом 45° (див. рис. 2).

Побудовані графіки функцій $\vartheta_{p-a}(x_1)$ і $\vartheta_{p-g}(x_1)$ показані на рис. 4. Значення змінної x_1 , при якому графіки зазначених функцій перетнуться (на рис. 4 це прямокутник чорного кольору) позначено як x_1^* .

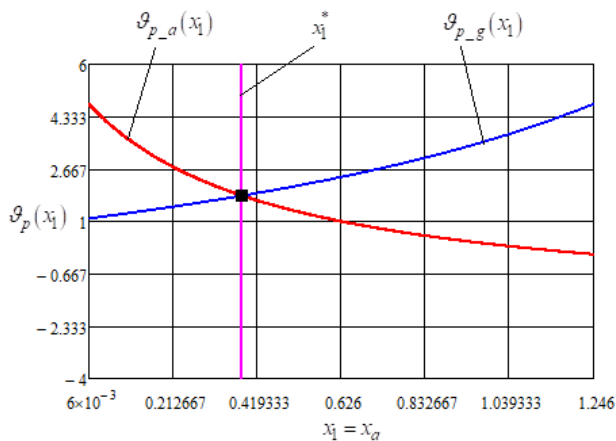


Рисунок 4 – Графіки функцій $\vartheta_{p-a}(x_1)$ і $\vartheta_{p-g}(x_1)$

При $x_a = x_1^* = 0,383$ і $x_g = x_2^* = 0,167$ отримаємо $\vartheta_{p-a}(x_1^*) = \vartheta_{p-g}(x_1^*) = 1,803$. Отриманий результат вважатимуться прийнятним. Однак, якщо необхідно отримати менші значення коефіцієнтів питомого ковзання для зубчастого зачеплення Z_a-Z_g , то можна сформулювати оптимізаційну задачу на пошук мінімуму різниці функцій (9) і (10).

Зазначимо таке. Графіки, показані на рис. 4, проходять через нульове значення відповідної функції. У прийнятному діапазоні зміни змінної x_1

функція $\vartheta_{p-a}(x_1)$ дорівнює нулю при $x_1 = x_a = 1,189$ та $x_g = -0,639$. При цьому функція $\vartheta_{p-g}(x_1)$ через нуль не проходить (вона має тільки додатні значення). З формули (7) випливає, що якщо є рівність кутів $\alpha_{a2} = \alpha_{tw}$, то значення функції $\vartheta_{p-a}(x_1)$ дорівнює нулю. Згідно з визначенням коефіцієнта питомого ковзання отримуємо швидкість ковзання профілів, рівною нулю. Однак це не відповідає закону зміни питомого ковзання вздовж лінії зачеплення. Тому такий випадок не слід враховувати при виборі коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс зачеплення Z_a-Z_g .

На рис. 5 показано перетин двох поверхонь $\vartheta_{p-a}(x_a, x_g)$, $\vartheta_{p-g}(x_a, x_g)$ і площини Π_{ag} . Точка їхнього перетину має координати: $x_a = x_1^* = 0,383$; $x_g = f_{ag-x2}(x_1^*) = 0,167$; $\vartheta_{p-a}(x_1^*, f_{ag-x2}(x_1^*)) = 1,803$ або $\vartheta_{p-a}(x_1^*, f_{ag-x2}(x_1^*)) = 1,803$. Ця точка на рис. 5 означена як px_1^* . Площина Π_{ag} , яка перпендикулярна координатній площині x_a, x_g , проходить через відрізок прямої лінії графіку функції $f_{ag-x2}(x_1)$. Відрізок цієї прямої лінії задавався на координатній площині x_a, x_g двома точками. Координати цих точок (x_a, x_g) були рівні: (0,006, 0,544); (1,246, -0,696).

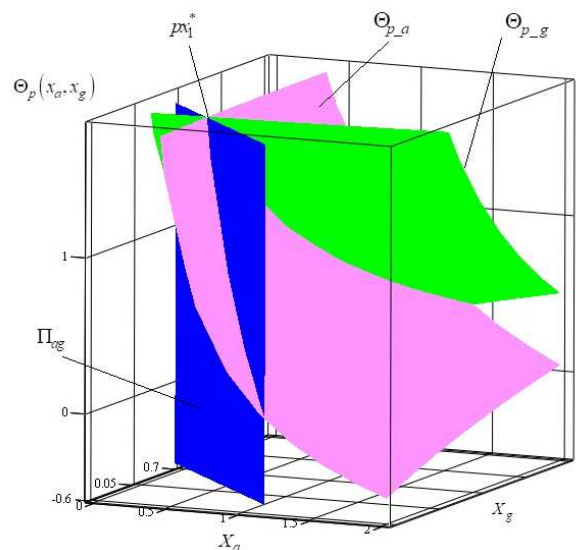


Рисунок 5 – Графіки функцій $\vartheta_{p-a}(x_a, x_g)$, $\vartheta_{p-g}(x_a, x_g)$ і Π_{ag}

Отже, аналіз властивостей функціональних залежностей виду (7) і (8) дозволяє оптимізувати вибір коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс зачеплення Z_a-Z_g , що задовольняють умовам забезпечення заданого кута зачеплення α_{tw}^* , найбільш прийнятного значення коефіцієнта торцевого перекриття $\varepsilon_{\alpha-ag}$ та оптимального питомого ковзання. Наприклад, якщо

коефіцієнти зміщення x_a і x_g вибрати рівними відповідно 0,383 і 0,167, то отримаємо $\varepsilon_{\alpha-ag} = 1,4069 \approx 1,41$, що задовольняє даним із табл. 1.

Зубчасте зачеплення Z_g-Z_b . На рис. 6 показаний графік функції $x_b = f(x_g) = f_{gb-x2}(x_g)$, де як аргумент функції було обрано значення коефіцієнта зміщення одновінцевого сателіту Z_g , а значенням функції є значення коефіцієнта зміщення епіцикла Z_b . Діапазон зміни коефіцієнта зміщенням x_g був таким же, як задано в табл. 1 (див. зачеплення Z_g-Z_b).

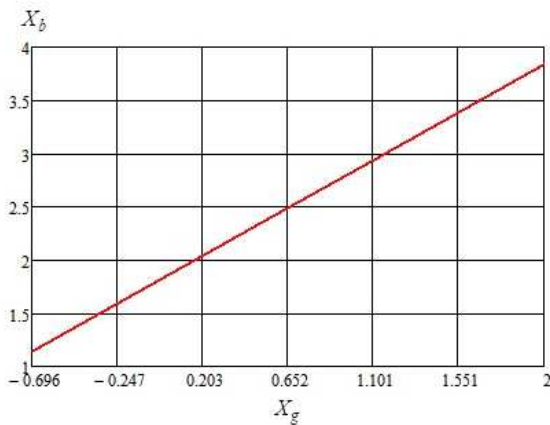


Рисунок 6 – Графік функції $f_{gb-x2}(x_g)$

У загальному випадку коефіцієнти питомого ковзання зубчастого зачеплення Z_g-Z_b , визначувані формулами (5) і (6), можна розглядати як функції п'яти аргументів: Z_g , Z_b , m_b , x_g , x_b . Візьмемо до уваги, що значення перших трьох аргументів не є незалежними величинами, а будуть заданими параметрами. Тоді функції (5) і (6) розглядатимемо як параметричні функції двох аргументів – коефіцієнтів зміщення x_g і x_b .

Параметричні функції коефіцієнтів питомого ковзання внутрішнього зачеплення Z_g-Z_b мають вид

$$\vartheta_{p-g}(x_g, x_b) = \frac{(tg\alpha_{a2} - tg\alpha_{tw})(u-1)}{tg\alpha_{tw} + u(tg\alpha_{tw} - tg\alpha_{tw})}, \quad (11)$$

$$\vartheta_{p-b}(x_a, x_g) = \frac{(tg\alpha_{a1} - tg\alpha_{tw})(u-1)}{utg\alpha_{tw} + (tg\alpha_{a1} - tg\alpha_{tw})}, \quad (12)$$

де кути $\alpha_{tw} = \alpha_{tw-gb}(x_g, x_b)$, $\alpha_{a1} = \alpha_{a-g}(x_g, x_b)$ і $\alpha_{a2} = \alpha_{a-b}(x_g, x_b)$ є функціями коефіцієнтів зміщення x_g та x_b , а числа зубців Z_g , Z_b , модуль m_b і пердаточне число $u = Z_b/Z_g$ є параметрами.

На рис. 7 показані графіки функцій (11) і (12), що відображають характер залежності коефіцієнтів пито-

мого ковзання зубчастого зачеплення Z_g-Z_b від значень коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс, які були прийняті як незалежні змінні (не враховувалося обмеження (3)).

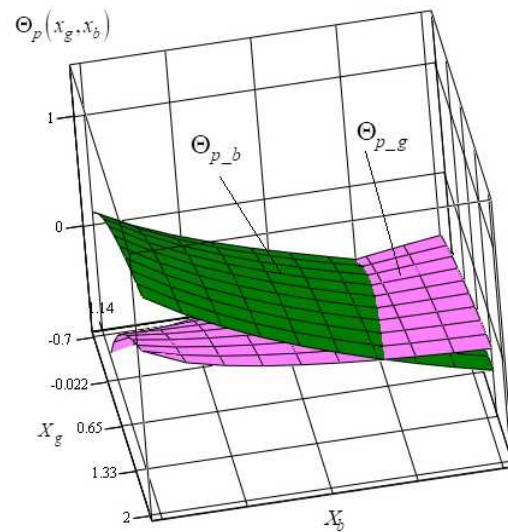


Рисунок 7 – Графіки функцій $\vartheta_{p-g}(x_g, x_b)$ і $\vartheta_{p-b}(x_g, x_b)$

Графіки функцій $\vartheta_{p-g}(x_g, x_b)$ і $\vartheta_{p-b}(x_g, x_b)$ побудовані для прямокутної області можливих значень коефіцієнтів x_g та x_b . Прямокутна область, де $x_g \in [x_{g \min}, x_{g \max}]$ і $x_b \in [x_{b \min}, x_{b \max}]$, задавалася наступними параметрами: $x_{g \min} = -0,696$; $x_{g \max} = 2$; $x_{b \min} = 1,1365$; $x_{b \max} = 3,8325$. Значення $x_{g \min}$, $x_{b \min}$, $x_{g \max}$ і $x_{b \max}$ були задані значеннями, які наведені у табл. 1. При цьому слід зазначити, що за деяких таких значеннях буде присутньою інтерференція зубців.

Лінія перетину поверхонь ϑ_{p-g} та ϑ_{p-b} визначає значення коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс зачеплення Z_g-Z_b , при яких коефіцієнти питомого ковзання (9) та (10) рівні між собою.

У разі, коли задається значення кута зачеплення α_{tw} , то функції коефіцієнтів питомого ковзання (11) та (12) будуть функціями однієї незалежної змінної. В якості цієї змінної можна вибрати коефіцієнт зміщення будь-якого колеса зубчастого зачеплення Z_g-Z_b .

Отже, маємо наступні функції однієї незалежної змінної x_i , де $i = g$ або $i = b$:

$$\vartheta_{p-g}(x_i) = \begin{cases} \vartheta_{p-g}(x_g, f_{gb-x2}(x_g)), & x_i = x_g \\ \vartheta_{p-g}(f_{gb-x2}(x_b), x_b), & x_i = x_b \end{cases} \quad (13)$$

$$\vartheta_{p-b}(x_i) = \begin{cases} \vartheta_{p-b}(x_g, f_{gb-x2}(x_g)), & x_i = x_g \\ \vartheta_{p-b}(f_{gb-x2}(x_b), x_b), & x_i = x_b \end{cases} \quad (14)$$

Позначимо коефіцієнти зміщення зубчастих коліс внутрішнього зачеплення Z_g-Z_b через x_1 і x_2 відповідно. Коефіцієнт зміщення x_1 прийматимемо як варійовану (змінну) величину, а коефіцієнт зміщення x_2 – як залежну величину.

Таким чином, функція $f_{gb_x2}(x_1)$ визначає значення коефіцієнта зміщення x_2 . Для системи координат x_g, x_b графік цієї функції є прямою лінією, яка перетинає координатні осі під кутом 45° (див. рис. 6).

Побудовані графіки функцій $\vartheta_{p_g}(x_1)$ і $\vartheta_{p_b}(x_1)$ показані на рис. 8.

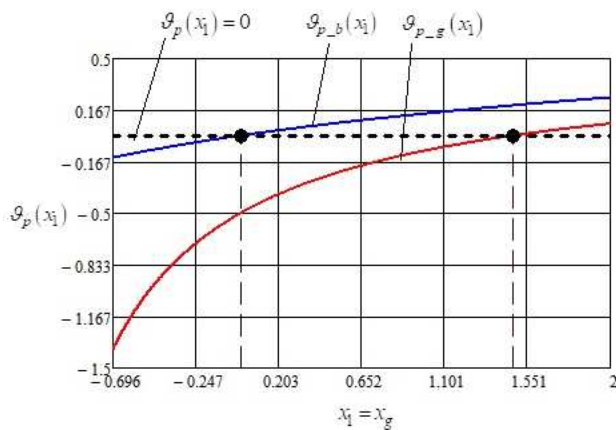


Рисунок 8 – Графіки функцій $\vartheta_{p_g}(x_1)$ і $\vartheta_{p_b}(x_1)$

Точки перетину даних графіків і лінії нульового значення функції показані кружками чорного кольору. Отримано такі значення коефіцієнта зміщення x_g , коли функції $\vartheta_{p_g}(x_1)$ і $\vartheta_{p_b}(x_1)$ набувають нульового значення: 1,473 і $-4,574 \cdot 10^{-3} \approx 0$ відповідно. У заданому діапазоні зміни коефіцієнта зміщення x_g перетин графіків не спостерігається. Графіки функцій, показані на рис. 7, перетинаються. Лінія їх перетину проходить через усю область зміни аргументів цих функцій. Аналіз цієї лінії показав, що на ній можна виявити також нульові значення функцій. Ця лінія утворена із перетину двох функцій, аргументи яких не пов'язані з умовою (3). У загальному випадку ці функції можуть як мати лінію перетину, так і не мати її.

На рис. 9 показано перетин поверхонь $\vartheta_{p_g}(x_g, x_b)$, $\vartheta_{p_b}(x_g, x_b)$, площини Π_{gb} і площини $\vartheta_p(x_g, x_b)=0$ (нульове значення функції). Площина Π_{gb} , яка перпендикулярна координатній площині x_g, x_b , проходить через відрізок прямої лінії графіку функції $f_{gb_x2}(x_1)$. Відрізок цієї прямої лінії задавався на координатній площині x_g, x_b двома точками. Координати цих точок (x_g, x_b) були рівні: (0,006, 0,544); (1,246 -0,696).

Отже, аналіз властивостей функціональних за-

лежностей виду (7) і (8) дозволяє оптимізувати вибір коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс зачеплення Z_a-Z_g , що задовольняють умовам забезпечення заданого кута зачеплення $\alpha_{\text{та}}^*$, найбільш прийняттого значення коефіцієнта торцевого перекриття ε_{α_ag} та оптимального питомого ковзання. Наприклад, якщо коефіцієнти зміщення x_a і x_g вибрати рівними відповідно 0,383 і 0,167, то отримаємо $\varepsilon_{\alpha_ag}=1,4069 \approx 1,41$, що задовольняє даним із табл. 1.

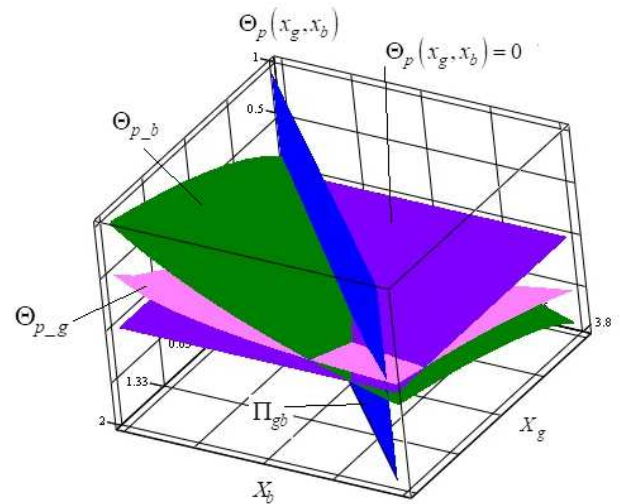


Рисунок 9 – Графіки функцій $\vartheta_{p_g}(x_g, x_b)$, $\vartheta_{p_b}(x_g, x_b)$, Π_{gb} і $\vartheta_p(x_g, x_b)=0$

Зубчасте зачеплення Z_f-Z_e . На рис. 10 показаний графік функції $x_e = f(x_f) = f_{fe_x2}(x_f)$, де як аргумент функції було обрано значення коефіцієнта зміщення одновінцевого сателіту Z_f , а значенням функції є значення коефіцієнта зміщення епіцикла Z_e . Діапазон зміни коефіцієнта зміщенням x_f був таким же, як задано в табл. 1 (див. зачеплення Z_f-Z_e).

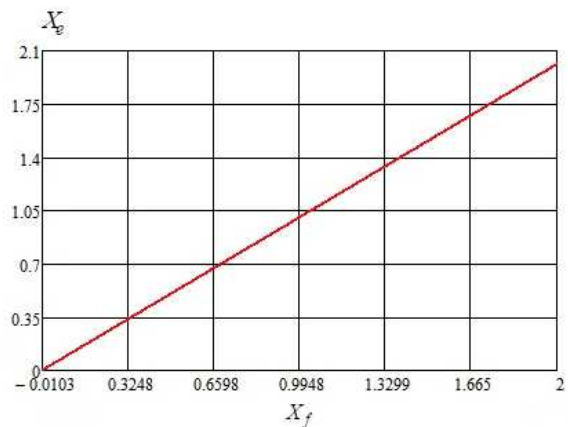


Рисунок 10 – Графік функції $f_{fe_x2}(x_f)$

Параметричні функції коефіцієнтів питомого

ковзання внутрішнього зачеплення Z_f-Z_e мають вигляд

$$\vartheta_{p-f}(x_f, x_e) = \frac{(tg\alpha_{a2} - tg\alpha_{tw})(u-1)}{tg\alpha_{tw} + u(tg\alpha_{tw} - tg\alpha_{tw})}, \quad (15)$$

$$\vartheta_{p-e}(x_f, x_e) = \frac{(tg\alpha_{a1} - tg\alpha_{tw})(u-1)}{utg\alpha_{tw} + (tg\alpha_{a1} - tg\alpha_{tw})}, \quad (16)$$

де кути $\alpha_{tw} = \alpha_{tw-fe}(x_f, x_e)$, $\alpha_{a1} = \alpha_{a-f}(x_f, x_e)$ і $\alpha_{a2} = \alpha_{a-e}(x_f, x_e)$ є функціями коефіцієнтів зміщення x_f та x_e , а числа зубців Z_f , Z_e , модуль m_e і передатне число $u = Z_e/Z_f$ є параметрами.

На рис. 11 показані графіки функцій (15) і (16), що відображають характер залежності коефіцієнтів питомого ковзання зубчастого зачеплення Z_f-Z_e від значень коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс, які були прийняті як незалежні змінні (не враховувалося обмеження (4)).

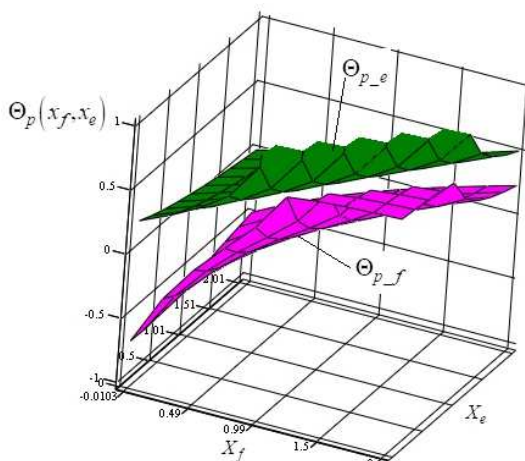


Рисунок 11 – Графіки функцій $\vartheta_{p-f}(x_f, x_e)$ і $\vartheta_{p-e}(x_f, x_e)$

Графіки функцій $\vartheta_{p-f}(x_f, x_e)$ і $\vartheta_{p-e}(x_f, x_e)$ побудовані для прямокутної області можливих значень коефіцієнтів x_f та x_e . Прямокутна область, де $x_f \in [x_{f\min}, x_{f\max}]$ і $x_e \in [x_{e\min}, x_{e\max}]$, задавалася наступними параметрами: $x_{f\min} = -0,0103$; $x_{f\max} = 2$; $x_{e\min} = 0$; $x_{e\max} = 2,0103$. Значення $x_{f\min}$, $x_{e\min}$, $x_{f\max}$ і $x_{e\max}$ були задані значеннями, які наведені у табл. 1. При цьому слід зазначити, що за деяких таких значеннях буде присутньою інтерференція зубців.

З рис. 11 видно, що поверхні ϑ_{p-f} і ϑ_{p-e} не перетинаються між собою.

У разі, коли задається значення кута зачеплення α_{tw} , то функції коефіцієнтів питомого ковзання (15) та (16) будуть функціями однієї незалежної змінної. В якості цієї змінної можна вибрати коефіцієнт зміщення

будь-якого колеса зубчастого зачеплення Z_f-Z_e .

Отже, маємо наступні функції однієї незалежної змінної x_i , де $i = f$ або $i = e$:

$$\vartheta_{p-f}(x_i) = \begin{cases} \vartheta_{p-f}(x_f, f_{fe-x2}(x_f)), & x_i = x_f \\ \vartheta_{p-f}(f_{fe-x2}(x_e), x_e), & x_i = x_e \end{cases}, \quad (17)$$

$$\vartheta_{p-e}(x_i) = \begin{cases} \vartheta_{p-e}(x_f, f_{fe-x2}(x_f)), & x_i = x_f \\ \vartheta_{p-e}(f_{fe-x2}(x_e), x_e), & x_i = x_e \end{cases}. \quad (18)$$

Позначимо коефіцієнти зміщення зубчастих коліс внутрішнього зачеплення Z_f-Z_e через x_1 і x_2 відповідно. Коефіцієнт зміщення x_1 прийматимемо як варійовану (змінну) величину, а коефіцієнт зміщення x_2 – як залежну величину.

Таким чином, функція $f_{fe-x2}(x_1)$ визначає значення коефіцієнта зміщення x_2 . Для системи координат x_f , x_e графік цієї функції є прямою лінією, яка перетинає координатні осі під кутом 45° (див. рис. 10).

Побудовані графіки функцій $\vartheta_{p-f}(x_1)$ і $\vartheta_{p-e}(x_1)$ показані на рис. 12.

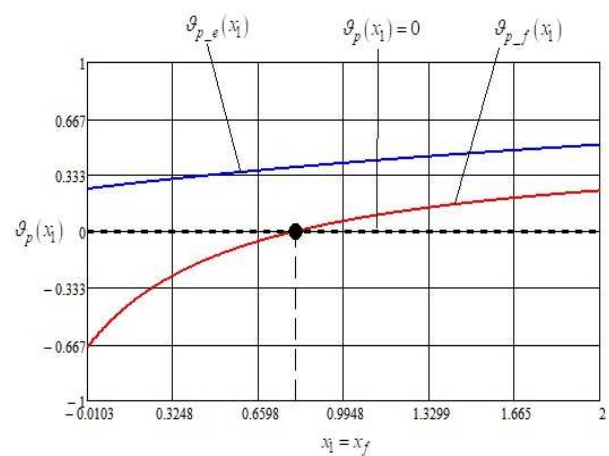


Рисунок 12 – Графіки функцій $\vartheta_{p-f}(x_1)$ і $\vartheta_{p-e}(x_1)$

Точки перетину даних графіків і лінії нульового значення функції показані кружками чорного кольору. Отримано такі значення коефіцієнта зміщення x_f , коли функція $\vartheta_{p-f}(x_1)$ набувають нульового значення: 0,8166. У заданому діапазоні зміни коефіцієнта зміщення x_f перетин графіків не спостерігається.

На рис. 13 показано перетин поверхонь $\vartheta_{p-f}(x_f, x_e)$, $\vartheta_{p-e}(x_f, x_e)$, площини Π_{fe} і площини $\vartheta_p(x_f, x_e) = 0$ (нульове значення функції). Площина Π_{fe} , яка перпендикулярна координатній площині x_f , x_e , проходить через відрізок прямої

лінії графіку функції $f_{fe-x2}(x_1)$. Відрізок цієї прямої лінії задавався на координатній площині x_f, x_e двома точками. Координати цих точок (x_f, x_e) були рівні: $(-0,0103, 0)$; $(2, 2,0103)$.

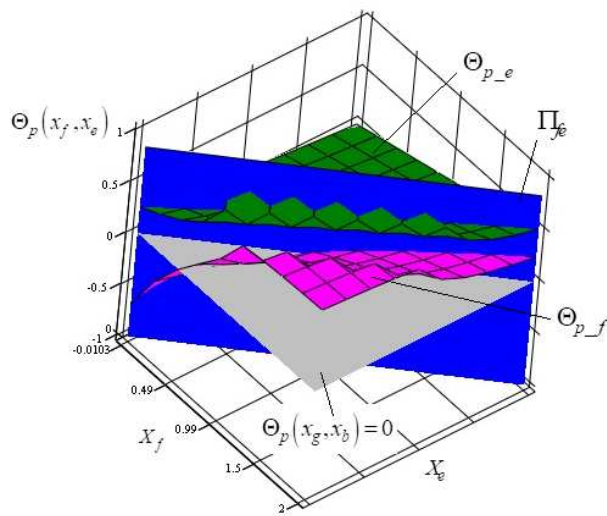


Рисунок 13 – Графіки функцій $\vartheta_{p-f}(x_f, x_e)$, $\vartheta_{p-e}(x_f, x_e)$, Π_{fe} і $\vartheta_p(x_f, x_e)=0$

З рис. 13 видно, що поверхні ϑ_{p-f} і ϑ_{p-e} не перетинаються між собою. Лінії перетину площини Π_{fe} і поверхонь ϑ_{p-f} і ϑ_{p-e} також не перетинаються між собою. Площина $\vartheta_p(x_f, x_e)=0$ перетинає тільки поверхню ϑ_{p-f} і площину Π_{fe} . Ці лінії перетинаються між собою в одній точці (див. рис. 12).

Отже, аналіз властивостей функціональних залежностей виду (7) і (8) дозволяє оптимізувати вибір коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс зачеплення Z_f-Z_e , що задовольняють умовам забезпечення заданого кута зачеплення α_{nve}^* , найбільш прийнятного значення коефіцієнта торцевого перекриття $\varepsilon_{\alpha-fg}$ та оптимального питомого ковзання.

Зауваження до оптимізації питомого ковзання в зубчастих зачепленнях. Аналіз графіків, показаних на рис. 4, 8 і 12, дозволяє для кожного зубчастого зачеплення планетарного механізму типу 3К визначити допустимий діапазон варіювання коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс, де можна спробувати знайти такі значення коефіцієнтів зміщення, за яких буде виконано умову вирівнювання значень коефіцієнтів питомого ковзання. При цьому як критерій вирівнювання можна задавати як мінімальну різницю значень коефіцієнтів зміщення відповідних зубчастих коліс. Наприклад, для зубчастого зачеплення Z_a-Z_g маємо випадок, коли зазначена різниця дорівнюватиме нулю. Для зачеплень Z_g-Z_b і Z_f-Z_e потрібну різницю можна тільки мінімізувати. Як видно із рис. 6 і 12 це можна зробити в зоні правої межі зміни коефіцієнта зміщення шестерні зубчастого зачеплення. Але оптимальне значення коефіцієнта

зміщення колеса зубчастого зачеплення ($x_g = x_2^* = 0,167$) не потрапляє до такої зони. Тому необхідно сформулювати на основі проведеного аналізу питомих ковзань у зубчастих зачепленнях складнішу процедуру оптимізації з більшим числом обмежень.

Наприкінці проаналізуємо дані розрахунків для випадку, коли для зубчастого зачеплення Z_a-Z_g будуть набуті таких значень коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс, при яких реалізується нульове вирівнювання значень коефіцієнтів питомого ковзання, які наведені у табл. 2.

Таблиця 2 – Приклад оптимізації питомого ковзання

Зубчасте зачеплення Z_a-Z_g				
x_i	x_{1opt}	x_{2opt}	x_1	x_2
x_a	0,383		0,3	
x_g		0,167		0,25
α_{nva} , град	23,176		23,176	
α_{a1} , град	35,76		35,072	
α_{a2} , град		29,32		29,85
ϑ_{p-a}	1,803		2,484	
ϑ_{p-g}		1,803		1,525
$\vartheta_{p-g}-\vartheta_{p-a}$	0		0,96	
ε_a	1,4148		1,407	
Зубчасте зачеплення Z_g-Z_b				
x_g	0,167		0,25	
x_b		2		2,0825
α_{nwb} , град	28,44		28,44	
α_{a1} , град	29,577		30,104	
α_{a2} , град		24,523		24,798
ϑ_{p-g}	-0,396		-0,354	
ϑ_{p-b}		0,028*		0,041*
$\vartheta_{p-g}-\vartheta_{p-b}$	-0,425		-0,395	
ε_a	1,578		1,5466	
Зубчасте зачеплення Z_f-Z_e				
x_f	0,167		0,25	
x_e		0,1773		0,2603
α_{nve} , град	20,042		20,07	
α_{a1} , град	29,577		30,104	
α_{a2} , град		17,542		17,592
ϑ_{p-f}	0,415		-0,306	
ϑ_{p-e}		0,284		0,318
$\vartheta_{p-f}-\vartheta_{p-e}$	-0,698		-0,624	
ε_a	1,579		1,554	

У табл. 2 наведені дані геометричних розрахунків зубчастих передач для оптимального варіанту (див. стовпці x_{1opt} і x_{2opt}) і варіанту з табл.1 (див. стовпці x_1 і x_2). Розрахунки геометрії зубчастих зачеплень (передач), виконаних згідно ГОСТ 16532-70 і ГОСТ 19274-73, показали, що не було невиконання умов перевірки якісних характеристик передач. Візуалізація кінематики зачеплень підтвердила придатність передач. Але для зубчастого зачеплення Z_g-Z_b було отримано дуже маленькі значення коефіцієнта питомого ковзання для зубчастого колеса Z_b (ці

значення в табл. 2 відмічені зірочкою вгорі). Це пов'язано з малою різницею значень кутів $\alpha_{a1} - \alpha_{rwb} = 1,1$ град. Форму зубця зубчастого колеса Z_b має збільшену товщину зубця по дільному колу, що може призвести до збільшення запасу міцності по вигину, що в деяких випадках небажано. У планетарних механізмах типу 3К зазвичай міцність внутрішнього зацеплення $Z_g - Z_b$ більше міцності зовнішнього зацеплення $Z_a - Z_g$.

Для більш коректної оптимізації питомого ковзання необхідно задавати діапазони можливих значень коефіцієнтів питомого ковзання кожного зубчастого зацеплення.

Аналіз значень коефіцієнта торцевого перекриття для оптимальних коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс показав його збільшення.

Висновки:

1. Наведена методика аналізу властивостей питомого ковзання в зубчастих зацепленнях конструкції дрібномодульного планетарного механізму типу 3К, оптимального за критерієм торцевого перекриття.

2. Побудова параметричних функцій характеристик питомого ковзання в зубчастих зацепленнях планетарного механізму засноване на формуванні для кожного зацеплення функціональної залежності коефіцієнта питомого ковзання в нижній точці активного профілю відповідного колеса від значень коефіцієнтів зміщення двох зубчастих коліс зацеплення. З урахуванням обмежень для коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс, які з умови співвісності для планетарного механізму типу 3К, функції питомого ковзання зацеплень можна представити як функцію одного аргументу.

3. Аналіз графіка функцій коефіцієнта питомого ковзання в зацепленні як функцій двох аргументів (коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс) дозволяє досліджувати її властивості.

4. Аналіз функцій коефіцієнтів питомого ковзання як функцій одного аргументу дозволяє визначити діапазон зміни цього аргументу, у межах якого можна провести оптимізацію питомого ковзання.

5. Розроблена методика аналізу дозволила сформувати алгоритм оптимізації питомого ковзання у зубчастих зацепленнях планетарного механізму типу 3К як продовження раніше розробленої оптимізації його торцевого перекриття.

Список літератури

1. Шарабан Ю. В., Шехов А. В. Оптимізація конструкцій зубчастих зацеплень планетарного механізму типу 3К за критерієм торцевого перекриття. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: *Машинознавство та САПР*. Харків, НТУ «ХПІ». 2024. №2 (2024). С. 121–132.
2. Башта О.В., Носко П.Л., Радько О.В., Герасимова О.В., Башта А.О. Дослідження втрат потужності внаслідок тертя ковзання і кочення в зубчастому зацепленні. Огляд [Дослідження втрат потужності внаслідок тертя ковзання і кочення в зубчастому зацепленні. Огляд]. Режим доступу: <https://er.nau.edu.ua/items/b738ec75-4bd6-4e21-8723-83fc2c97c1d6> (дата звертання: 10 січня 2021).
3. Wei Sheng, Zhengmingqing Li, Hong Zhang, Rupeng Zhu. *Geometry and design of spur gear drive associated with low sliding ratio* [Geometry and design of spur gear drive associated with low sliding ratio]. Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/351143097_Geometry_and_design_of_spur_gear_drive_associated_with_low_sliding_ratio (дата звертання: 20 травня 2022).

4. Wei Sheng, Jiang Zhao, Zhengmingqing Li, Hong Zhang, Rupeng Zhu. *Geometric design of a face gear drive with low sliding ratio* [Geometric design of a face gear drive with low sliding ratio]. Режим доступу: <https://www.mdpi.com/2076-3417/12/6/2936> (дата звертання: 15 травня 2022).
5. Satoru Oba., Yasutaka Fujimoto. *Hybrid 3k compound planetary reduction gearbox with a roller transmission mechanism* [Hybrid 3k compound planetary reduction gearbox with a roller transmission mechanism]. Режим доступу: <https://ieeexplore.ieee.org/iel7/3516/4785241/09502938.pdf> (дата звертання: 15 серпня 2023).
6. Qinghao Du, Guilin Yang, Weijun Wang, Chin-Yin Chen, Zaojun Fang. *Modeling and Analysis of Transmission Efficiency for 3K Planetary Gearbox with Flexure-Based Carrier for Backdrivable Robot Joints* [Modeling and Analysis of Transmission Efficiency for 3K Planetary Gearbox with Flexure-Based Carrier for Backdrivable Robot Joints]. Режим доступу: <https://www.mdpi.com/2076-0825/14/4/173> (дата звертання: 10 травня 2025).
7. Chao Xun, He Dai. *Dynamic analysis of gear pairs with the effects of stick-slip* [Dynamic analysis of gear pairs with the effects of stick-slip]. Режим доступу: <https://www.extrica.com/article/22976> (дата звертання: 10 травня 2025).
8. Nijazi Ibrahimi, Sadullah Avdiu. *The influence of sliding speed and specific sliding of the internal meshing gears* [The influence of sliding speed and specific sliding of the internal meshing gears]. Режим доступу: <https://www.tmt.unze.ba/zbornik/TMT2006/207-TMT06-249.pdf> (дата звертання: 15 лютого 2025).
9. Чернець М. В., Кіндрачук М. В., Корнієнко А. О., Гловин М. А. Про методи розрахунку зношування і довговічності металевих, металополімерних та полімерних зубчастих передач [Про методи розрахунку зношування і довговічності металевих, металополімерних та полімерних зубчастих передач]. Режим доступу: <https://jml.nau.edu.ua/index.php/PTZ/article/view/13845/20376>. (дата звертання: 10 січня 2025).
10. Sachidananda H K, Raghunandana K, Gonsalvis J. *Sliding velocity in profile-corrected gears* [Sliding velocity in profile-corrected gears]. Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/307139201_Sliding_velocity_in_profile_corrected_gears (дата звертання: 1 травня 2025).
11. Niranjana Y C, Prithvi C, Sridhara B K. *Influence of S₀ type of addendum modification on sliding performance of spur gear* [Influence of S₀ type of addendum modification on sliding performance of spur gear]. Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/336314452_Influence_of_S_0_Type_of_Addendum_Modification_on_Sliding_Performance_of_Spur_Gears (дата звертання: 1 березня 2025).
12. Wood Jonathan P, New Gavin. *Design and manufacturing considerations for modified involute gearing* [Design and manufacturing considerations for modified involute gearing]. Режим доступу: <https://www.esmats.eu/esmatspapers/pastpapers/pdfs/2021/wood.pdf> (дата звертання: 11 березня 2025).

References (transliterated)

1. Sharaban Ju. V., Shehov A. V. Optimizacija konstrukcij zubchastih zacheplen' planetarnogo mehanizmu tipu 3K za kri-eriem torceвого perekritija [Optimization of gear designs of a 3K type planetary mechanism according to the end overlap criterion]. *Visnik Nacional'nogo tehničnogo universitetu «HPI»*. Serija: *Mashinostnavstva ta SAPR* [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series: Engineering and CAD]. Harkiv, NTU «KhPI». 2024, no. 2 (2024), pp. 121–132.
2. Bashta O., Nosko, P., Radko O., Gerasimova O., Bashta A. Doslidzhennya vtrat potuzhnosti vnaslidok tertya kovzannya i kochennya v zubchastomu zacheplenni. Oglyad [Investigation of power losses due to sliding and rolling friction in gears. review]. Available at: <https://er.nau.edu.ua/items/b738ec75-4bd6-4e21-8723-83fc2c97c1d6>. (accessed 10.01.2021).
3. Wei Sheng, Zhengmingqing Li, Hong Zhang, Rupeng Zhu. *Geometry and design of spur gear drive associated with low sliding ratio* [Geometry and design of spur gear drive associated with low sliding ratio]. Available at: https://www.researchgate.net/publication/351143097_Geometry_and_design_of_spur_gear_drive_associated_with_low_sliding_ratio. (accessed 20.05.2022).
4. Wei Sheng, Jiang Zhao, Zhengmingqing Li, Hong Zhang, Rupeng Zhu. *Geometric design of a face gear drive with low sliding ratio* [Geometric design of a face gear drive with low sliding ratio].

- ric design of a face gear drive with low sliding ratio]. Available at: <https://www.mdpi.com/2076-3417/12/6/2936>. (accessed 15.05.2022).
5. Satoru Oba, Yasutaka Fujimoto. *Hybrid 3k compound planetary reduction gearbox with a roller transmission mechanism* [Hybrid 3k compound planetary reduction gearbox with a roller transmission mechanism]. Available at : <https://ieeexplore.ieee.org/iel7/3516/4785241/09502938.pdf>. (accessed 15.08.2023).
 6. Qinghao Du, Guilin Yang, Weijun Wang, Chin-Yin Chen, Zaojun Fang. *Modeling and analysis of transmission efficiency for 3K planetary gearbox with flexure-based carrier for backdrivable robot joints* [Modeling and analysis of transmission efficiency for 3K planetary gearbox with flexure-based carrier for backdrivable robot joints]. Available at: <https://www.mdpi.com/2076-0825/14/4/173>. (accessed 10.05.2025).
 7. Chao Xun, He Dai. Dynamic analysis of gear pairs with the effects of stick-slip [Dynamic analysis of gear pairs with the effects of stick-slip]. Available at: https://www.researchgate.net/publication/364496799_Dynamic_Analysis_of_Gear_Pairs_with_the_Effects_of_Stick-slip (accessed 15.05.2025).
 8. Nijazi Ibrahim, Sadullah Avdiu. *The influence of sliding speed and specific sliding of the internal meshing gears* [The influence of sliding speed and specific sliding of the internal meshing gears]. Available at: <https://www.tmt.unze.ba/zbornik/TMT2006/207-TMT06-249.pdf> (accessed 15.02.2025).
 9. Chernen M. V., Kindrachuk M. V., Korniyenko A. O., Glovyn M. A. Pro metody` rozrakhunku znoshuvannya i dovgovichnosti metalevy`x, metalopolimerny`x ta polimerny`x zubchasty`x poredach [About methods of calculation of wear and durability of metal, metal-polymer and polymer gears]. Available at: <https://jml.nau.edu.ua/index.php/PTZ/article/view/13845/20376>. (accessed 10.01).
 10. Sachidananda H K, Raghunandana K, Gonsalvis J. *Sliding velocity in profile-corrected gears* [Sliding velocity in profile-corrected gears]. Available at: https://www.researchgate.net/publication/307139201_Sliding_velocity_in_profile_corrected_gears. (accessed 01.05.2025).
 11. Niranjana Y C, Prithvi C, Sridhara B K. *Influence of S₀ type of addendum modification on sliding performance of spur gear* [Influence of S₀ type of addendum modification on sliding performance of spur gear]. Available at: https://www.researchgate.net/publication/336314452_Influence_of_S_0_Type_of_Addendum_Modification_on_Sliding_Performance_of_Spur_Gears. (accessed 01.03.2025).
 12. Wood Jonathan P, New Gavin. *Design and manufacturing considerations for modified involute gearing* [Design and manufacturing considerations for modified involute gearing]. Available at: <https://www.esmats.eu/esmatspapers/pastpapers/pdfs/2021/wood.pdf>. (accessed 11.03.2025).

Надійшла (received) 07.07.2025

Відомості про авторів / About the Authors

Шарабан Юрій Володимирович / Sharaban Jurij – Товариство з обмеженою відповідальністю «Харківське агрегатне конструкторське бюро», заступник головного конструктора, м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7295-0927>; e-mail: suv-kharkov@ukr.net

Шехов Олександр Володимирович / Shehov Aleksandr – Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», старший викладач кафедри теоретичної механіки, машинознавства і робототехнічних систем, м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2312-0155>; e-mail: shav01@ukr.net