УДК 539.3:621.333 doi: 10.20998/2079-0775.2024.2.08

Є. М. ІВАНОВ

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОБ'ЄМНОГО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЗУБЧАСТИХ КОЛІС ІЗ ДОВІЛЬНОЮ ФОРМОЮ ЗУБЦІВ

В роботі наведено ефективний метод для чисельного аналізу об'ємного напружено-деформованого стану зубчастого колеса реальної конфігурації. А саме, визначення полів згинальних напружень у галтелях зубців зубчастих коліс з урахуванням геометричних параметрів. В основу покладено методи класичної теорії пружності в тривимірній постановці зі змішаними граничними умовами для області зі складною граничною поверхнею. Рішення дано в переміщеннях. При цьому визначаються компоненти вектора пружних переміщень у довільній точці області, а за ними - компоненти тензора напруг у цій же точці з використанням диференціальних залежностей Коші та узагальненого закону Гука. Однією з головних труднощів під час розв'язання поставленої задачі стала проблема в поданні всієї пружної ділянки колеса разом із зубцями у вигляді неявної безперервної функції безперервного аргументу, що вирішальним чином визначає можливість застосування методів теорії пружності та побудови граничних умов. Ці труднощі вдалося подолати завдяки використанню теорії R-функцій при описі граничної поверхні зубчастого колеса в цілому. Зусилля, що передається зубцем, введено в завданні в такому вигляді, що враховується конфігурація і величина модельованої поля зачеплення з можливістю варіації закону його розподілу по полю зачеплення. Враховується також різне положення миттєвої площадки контакту за фазою зачеплення за весь період сполучення пари зубців. Чисельне розв'язання задачі побудовано на базі методу Рітца, де під час розроблення координатних послідовностей використано лінійно незалежну ортонормовану систему поліномів Лежандра, а також враховано геометрію області та граничні умови. Запропонована математична модель об'ємного напружено-деформованого стану може використовуватися як у наукових дослідженнях, так і інженерній практиці на стадії проектування або доводки зубчастих коліс з довільною формою зубців при будь-якій системи зачеплення реальної передачі, раціонального вибору розмірів і місцеположення поля зачеплення, а також моделювання форми миттєвої площадки контакту за фазою зачеплення за весь період сполучення пари зубців.

Ключові слова: об'ємний напружено-деформований стан, поле напружень, поле зачеплення, згинальні напруження, теорія R-функцій, зубчасті колеса, зуб

E. IVANOV

MATHEMATICAL MODEL OF THE VOLUMETRIC STRESS-STRAIN STATE OF GEARS WITH ARBITRARY TOOTH SHAPE

This paper presents an effective method for numerical analysis of the bulk stress-strain state of a gear of a real configuration. Namely, the determination of the bending stress fields in the gear teeth fillets with regard to geometric parameters. The methods of the classical theory of elasticity in a three-dimensional formulation with mixed boundary conditions for a region with a complex boundary surface are used. The solution is given in displacements. The components of the elastic displacement vector at an arbitrary point in the domain are determined, followed by the components of the stress tensor at the same point using Cauchy's differential dependences and the generalized Hooke's law. One of the main difficulties in solving this problem was the problem of representing the entire elastic section of the wheel together with the teeth in the form of an implicit continuous function of a continuous argument, which decisively determines the possibility of applying the methods of elasticity theory and constructing boundary conditions. These difficulties were overcome by using the theory of R-functions to describe the boundary surface of the gear as a whole. The force transmitted by the tooth is introduced in the problem in such a way that the configuration and size of the modeled meshing field are taken into account with the possibility of varying the law of its distribution over the meshing field. Different positions of the instantaneous contact patch in terms of the meshing phase over the entire period of meshing of a pair of teeth are also taken into account. The numerical solution to the problem is based on the Ritz method, where a linearly independent orthonormalized system of Legendre polynomials is used to develop coordinate sequences, and the geometry of the region and boundary conditions are taken into account. The proposed mathematical model of the volumetric stress-strain state can be used both in scientific research and engineering practice at the stage of designing or finishing gears with arbitrary tooth shapes for any real gear meshing system, rational selection of the size and location of the meshing field, and modeling the shape of the instantaneous contact area by the meshing phase for the entire period of meshing of a pair of teeth.

Keywords: volumetric stress-strain state, stress field, meshing field, is bending stresses, RFM (R-Functions Method), gears, tooth

Вступ. Однією з важливих проблем підвищення надійності та довговічності зубчастих передач за поліпшення якості їхніх експлуатаційних показників і зниження металомісткості є розвиток і вдосконалення методів розрахунку напружено-деформованого стану (НДС) зубчастих зачеплень з урахуванням геометрії зубців і зубчастих коліс загалом. Під час зачеплення пари зубців зубчастих коліс мають місце силові взаємодії, що деформують як зуб, так і вінець зубчастого колеса. Згинальна напруга біля кореня зуба, яка при цьому виникає, значною мірою залежить від радіальних розмірів зубчастого колеса, від товщини зубчастого вінця і з'єднувального диска. Існуючі методи дослідження згинальних напружень [1–3] ґрунтуються на низці грубих припущень: зуб апроксимують пружним гребенем трапецеїдального перерізу; галтель біля кореня зуба, а також вплив кута нахилу, конусність зуба та конструкція зубчастого колеса враховуються наближено. Точність врахування цих параметрів пов'язана зі встановленням крайових умов під час використання варіаційних методів теорії пружності, що, своєю чергою, зумовлено геометрією досліджуваних конічних зубчастих коліс.

Мета та постановка завдання. Оскільки зубчасті колеса в умовах експлуатації перебувають в об'ємному НДС, то і відповідне рішення необхідно будувати в тривимірній постановці. Модель деформованого тіла в роботі приймається як ідеально пружне тіло [4, 5]. Зауважимо, що технологічні операції (механічне, хіміко-термічне оброблення зубців), хоча і впливають на механічні характеристики матеріалу, з якого вони виготовлені, але не впливають на НДС, а впливають на допустиме напруження [6–8].

Під час побудови моделі припустимо, що пружну область і граничну поверхню зубчастого колеса з довільною формою зубців представлено в неявному вигляді як безперервну функцію безперервного аргументу $D = \omega(x, y, z) \geq 0$, до складу якої входять окремі ділянки всієї області *D*, задані своїми рівняннями

$$\left.\begin{aligned} f_{n1} &= \omega_1(x,y,z)=0 \\ f_{n2} &= \omega_2(x,y,z)=0 \\ f_{n3} &= \omega_3(x,y,z)=0 \\ f_{n4} &= \omega_4(x,y,z)=0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

де ω_1 – рівняння поверхні жорсткого закладення зубчастого колеса;

ω_2 – поверхня площадки контакту;

ω_3 – поверхня всієї пружної області без закладення і площадки контакту;

ω_4 – поверхня всієї пружної області без закладення.

Ці функції нормовані на межі f_{ni} і задовольняють таким умовам [9]:

$$\omega_i(x,y,z)>0 \text{ в } (D),\ \omega_i(x,y,z)\Big|_{f_i}=0,\ \frac{\partial\omega_i(x,y,z)}{\partial r}\Big|_{f_i}=-1,$$

де r – нормаль до поверхні області.

Такі рівняння для складних ділянок можуть бути побудовані з використанням *R-функцій* [9, 10] у вигляді суперпозиції опорних ділянок, що являють собою окремі ділянки зубця і зубчастого колеса. Оскільки в структуру пружної області D входять ділянки (1) і зокрема f_{n2}, то можливо сформулювати крайову умову, що випливає з необхідності врахування зовнішніх сил, що діють на пружну область D. У загальному випадку задача про визначення НДС зубців зубчастих коліс є змішаною просторовою задачею теорії пружності. Знаходження відповідних переміщень точок пружного тіла при цьому зводиться до визначення вектора пружних переміщень [11, 12].

$$\overline{U}(x,y,z)=\bar{i}u(x,y,z)+\bar{j}v(x,y,z)+\bar{k}w(x,y,z), \quad (2)$$

що задовольняє в пружній області D рівнянням рівноваги Ламе

$$\left.\begin{aligned} (\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u=0 \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\mu\nabla^2 v=0 \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial z}+\mu\nabla^2 w=0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Тут u, n, w, Θ – геометричні характеристики деформації; $\lambda=\dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ і $\mu=\dfrac{E}{2(1+\upsilon)}$ – фізичні характеристики матеріалу (пружні постійні Ламе), де E – модуль пружності першого роду; ν – коефіцієнт Пуассона. Вектор $\overline{U}(x,y,z)$ (2) має задовольняти таким крайовим умовам:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{U}(x,y,z)\Big|_{\omega_1}=0; \\ &T_G(\overline{U})\Big|_{\omega_3}=0,\ T_G\cdot\bar{n}; \\ &T_G(\overline{U})\Big|_{\omega_2}=-P\cdot\bar{n}; \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

де T_G – тензор напружень;

$\bar{n}$ – одинична зовнішня нормаль;

P – інтенсивність розподіленого навантаження по плямі контакту.

Застосування варіаційно-структурного методу дає змогу на аналітичному рівні точно врахувати геометричну інформацію, що міститься в постановці крайової задачі, не тільки окремих зубців, а й усього зубчастого колеса. У задачі про НДС зубців (див. (3), (4)) структура розв'язку може бути представлена у вигляді [9, 10]

$$\overline{U}=\omega_1\Phi \quad (5)$$

Незалежно від вибору вектора , враховуючи (1), умова жорсткого закладення пружної області задовольняється автоматично. Оскільки вектор (5) має задовольняти диференціальні рівняння (3) і граничні умови (4), то необхідно вектор представити у вигляді $\overline{\Phi}=\Phi_0+\omega\overline{\Phi_1}$. Тоді структуру (5) може бути записано

$$\overline{U}=\omega_1\overline{\Phi}_0+\omega\omega_1\overline{\Phi_1} \quad (6)$$

де $\overline{\Phi_0},\overline{\Phi_1}$ – довільні вектори.

Оператор напруження в (4), застосований до вектора $\overline{U}$, дає вектор напружень на площадки із зовнішньою нормаллю $\bar{r}$. Скориставшись його векторним записом з урахуванням (6), напругу на площадки із зовнішньою нормаллю $\bar{r}$ в будь-якій точці пружної області можна визначити таким чином:

$$\begin{gathered} T(\mathbf{U})=T(\omega_1\boldsymbol{\Phi}_0)+T(\omega\omega_1\boldsymbol{\Phi}_1)= \\ =2\mu\boldsymbol{\Phi}_0+\lambda\nabla\omega_1(\boldsymbol{\Phi}_0\nabla\omega_1)-\mu\nabla\omega_1\times(\boldsymbol{\Phi}_0\times\nabla\omega_1)+ \quad (7) \\ +2\mu\mathbf{F}_1+\lambda\nabla\omega(\mathbf{F}_1\nabla\omega)-\mu\nabla\omega\times(\mathbf{F}_1\times\nabla\omega); \\ \mathbf{F}_1=\omega_1\boldsymbol{\Phi}_1. \end{gathered}$$

З (7) видно, що внаслідок вибору структури розв'язку у вигляді (6) через алгебрологічні функції $\omega_i(x,y,z)$ [9, 10], що обертаються в нуль на межі, напруження на закладенні описуються виразом

$$-T(\overline{U})=2\mu\overline{\Phi_0}+\lambda\nabla\omega_1(\overline{\Phi_0}\nabla\omega_1)-\mu\nabla\omega_1\times(\overline{\Phi_0}\times\nabla\omega_1).$$

Виберемо тепер вектор $\overline{\Phi_1}$, щоб виконувалася друга і третя умова (4), тобто $T(\overline{U})\Big|_{\omega_4}=\dfrac{P\omega_3}{\omega_2+\omega_3}\bar{r}$,

або в розгорнутому вигляді з урахуванням структури (6)

$$2\mu\overline{F_1}+\lambda\nabla\omega_1(\overline{F_1}\nabla\omega)-\mu\nabla\omega\times(\overline{F_1}\times\nabla\omega)=\overline{B}, \quad (8)$$

де

$$\begin{gathered}\overline{B}=-2\mu(\nabla\omega\nabla)(\omega_1\overline{\Phi_0})-\lambda\nabla\omega\,\mathrm{div}(\omega_1\overline{\Phi_0})- \\ -\mu\left[\nabla\omega\,\mathrm{rot}(\omega_1\overline{\Phi_0})\right]-\frac{P\omega_3}{\omega_2+\omega_3}\bar{r}\ .\end{gathered}$$

Виконуючи в (8) тотожні перетворення і розв'язуючи його відносно вектора $\overline{F_1}$, отримаємо $\overline{F_1}=\dfrac{\nabla\omega}{\lambda+2\mu}(\overline{B}\nabla\omega)+\dfrac{1}{\mu}\nabla\omega\times(\overline{B}\times\nabla\omega)$, звідки

$$\overline{\Phi_1} = \frac{1}{\omega_1 + \omega_4}\left[\frac{\nabla\omega}{\lambda + 2\mu}\left(\overline{B}\nabla\omega\right) + \frac{1}{\mu}\nabla\omega \times \left(\overline{B} \times \nabla\omega\right)\right]. \quad (9)$$

Структура розв'язання задачі, з урахуванням (9), остаточно має вигляд

$$\overline{U} = \omega_1\overline{\Phi_0} + \\ + \omega\left\{\frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_4}\left[\frac{\nabla\omega}{\lambda + 2\mu}\left(\overline{B}\nabla\omega\right) + \frac{1}{\mu}\nabla\omega \times \left(\overline{B} \times \nabla\omega\right)\right]\right\}. \quad (10)$$

У структурі (10) вектор $\overline{\Phi_0}$ поки що довільний, а всі граничні умови задоволено. Вибір вектора $\overline{\Phi_0}$ можна здійснити шляхом найкращого задоволення системі (3). Для цієї мети приведемо структуру рішення до лінійного вигляду щодо системи координатних функцій. У виразі (10) покладемо

$$\left.\begin{aligned} \overline{\Phi_0} &= \Phi_{0x}\overline{I} + \Phi_{0y}\overline{I} + \Phi_{0z}\overline{K}; \\ \overline{B} &= B_x\overline{I} + B_y\overline{I} + B_z\overline{K} \,. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Розкриваючи операції скалярного і подвійного векторного добутку у виразі структури і привівши подібні, відносно одиничних векторів $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, отримаємо вираз вектора пружних переміщень $\overline{U}$ через його компоненти:

$$\overline{U} = u\bar{i} + \upsilon\bar{j} + w\bar{k} \quad (12)$$

де

$$u = \omega_1\left\{\Phi_{0x} + \omega^1\left[\frac{1}{\mu}B_x \operatorname{grad}^2\omega - \frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{\partial\omega}{\partial x}\left(\overline{B}, \operatorname{grad}\omega\right)\right]\right\};$$

$$\upsilon = \omega_1\left\{\Phi_{0y} + \omega^1\left[\frac{1}{\mu}B_y \operatorname{grad}^2\omega - \frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{\partial\omega}{\partial y}\left(\overline{B}, \operatorname{grad}\omega\right)\right]\right\};$$

$$w = \omega_1\left\{\Phi_{0z} + \omega^1\left[\frac{1}{\mu}B_z \operatorname{grad}^2\omega - \frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{\partial\omega}{\partial z}\left(\overline{B}, \operatorname{grad}\omega\right)\right]\right\}.$$

Виберемо далі функції $\Phi_{0\tau}(\tau = x, y, z)$ у вигляді розкладання за деякою системою функцій f_{ijk}. Тоді вектор $\overline{\Phi}$ із (11) можна подати у вигляді

$$\overline{\Phi_{0n}} = \sum_{i+j+k=0}^{n}\overline{C_{ijk}}f_{ijk}\,, \quad \overline{C}_{ijk} = C_{ijk}\bar{i}C^2_{ijk}\bar{j} + C^3_{ijk}\bar{k}\,,$$

де

$$\Phi_{0nx} = \sum_{i+j+k=0}^{n}\overline{C}^1_{ijk}f_{ijk}\,, \quad \Phi_{0ny} = \sum_{i+j+k=0}^{n}\overline{C}^2_{ijk}f_{ijk}\,,$$

$$\Phi_{0nz} = \sum_{i+j+k=0}^{n}\overline{C}^3_{ijk}f_{ijk}\,.$$

Оскільки компоненти вектора переміщень (12) виражені через компоненти векторів $\overline{\Phi_0}$ и $\overline{B}$, то для лінійного представлення *n-го* наближення вектора $\overline{U_n}$ знайдемо вираження компонент вектора через компоненти вектора у вигляді $\overline{\Phi_0}$ (8). З огляду на лінійність операторних доданків вектора $\overline{B}$ (див. (8)), після підстановки в нього $\overline{\Phi_{0n}}$ і виконання низки векторних перетворень, отримаємо вирази для компонент $B_{n\tau}(\tau = x, y, z)$ у розкладанні (11) у вигляді

$$B_{nx} = -\sum_{i+j+k=0}^{n}C^1_{ijk}\left[\mu\left(\nabla\omega_1\nabla\omega_1 f_{ijk}\right) + (\lambda + \mu)\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial\omega_1\partial f_{ijk}}{\partial x}\right] + \sum_{i+j+k=0}^{n}C^2_{ijk}\left[\lambda\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial\omega_1 f_{ijk}}{\partial y} + \mu\frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot\frac{\partial\omega_1 f_{ijk}}{\partial x}\right] + \\ + \sum_{i+j+k=0}^{n}C^3_{ijk}\left[\lambda\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial\omega_1 f_{ijk}}{\partial z} + \mu\frac{\partial\omega}{\partial z}\cdot\frac{\partial\omega_1 f_{ijk}}{\partial x}\right] - \frac{P\omega_3}{\omega_2 + \omega_3}\cdot\frac{\partial v}{\partial x};$$

$$B_{ny} = -\sum_{i+j+k=0}^{n}C^1_{ijk}\left[\lambda\frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot\frac{\partial\omega_1 f_{ijk}}{\partial x} + \mu\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial\omega_1 f_{ijk}}{\partial y}\right] + \sum_{i+j+k=0}^{n}C^2_{ijk}\left[\mu\left(\nabla\omega_1\nabla\omega_1 f_{ijk}\right) + (\lambda + \mu)\frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot\frac{\partial\omega_1\partial f_{ijk}}{\partial y}\right] + \quad (13) \\ + \sum_{i+j+k=0}^{n}C^3_{ijk}\left[\lambda\frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot\frac{\partial\omega_1 f_{ijk}}{\partial z} + \mu\frac{\partial\omega}{\partial z}\cdot\frac{\partial\omega_1 f_{ijk}}{\partial y}\right] - \frac{P\omega_3}{\omega_2 + \omega_3}\cdot\frac{\partial v}{\partial y};$$

$$B_{nz} = -\sum_{i+j+k=0}^{n}C^1_{ijk}\left[\lambda\frac{\partial\omega}{\partial z}\cdot\frac{\partial\omega_1 f_{ijk}}{\partial x} + \mu\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial\omega_1 f_{ijk}}{\partial z}\right] + \sum_{i+j+k=0}^{n}C^2_{ijk}\left[\lambda\frac{\partial\omega}{\partial z}\cdot\frac{\partial\omega_1 f_{ijk}}{\partial y} + \mu\frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot\frac{\partial\omega_1 f_{ijk}}{\partial z}\right] + \\ + \sum_{i+j+k=0}^{n}C^3_{ijk}\left[\mu\left(\nabla\omega_1\nabla\omega_1 f_{ijk}\right) + (\lambda + \mu)\frac{\partial\omega}{\partial z}\cdot\frac{\partial\omega_1\partial f_{ijk}}{\partial y}\right] - \frac{P\omega_3}{\omega_2 + \omega_3}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}.$$

Підставляючи (13) у (12) після перетворень, отримаємо вирази для компонент вектора $\overline{U}$ в будь-якій точці зубчастого колеса

$$u_n = u_0 + \sum_{i+j+k=0}^{n}\left(C^1_{ijk}u^1_{ijk} + C^2_{ijk}u^2_{ijk} + C^3_{ijk}u^3_{ijk}\right);$$

$$v_n = v_0 + \sum_{i+j+k=0}^{n}\left(C^1_{ijk}v^1_{ijk} + C^2_{ijk}v^2_{ijk} + C^3_{ijk}v^3_{ijk}\right);$$

$$w_n = w_0 + \sum_{i+j+k=0}^{n}\left(C^1_{ijk}w^1_{ijk} + C^2_{ijk}w^2_{ijk} + C^3_{ijk}w^3_{ijk}\right)$$

і вектор пружних переміщень запишемо

$$\overline{U}_n = \overline{U}_0 + \sum_{i+j+k=0}^{n} \left(C^1_{ijk} \overline{U}^1_{ijk} + C^2_{ijk} \overline{U}^2_{ijk} + C^3_{ijk} \overline{U}^3_{ijk} \right)$$

де

$$\overline{U}_0 = U_0 \bar{i} + V_0 \bar{j} + W_0 \bar{k}\,;\ \overline{U}^1_{ijk} = \overline{U}^1_{ijk} \bar{i} + V^1_{ijk} \bar{j} + W^1_{ijk} \bar{k}\,;$$

$$\overline{U}^2_{ijk} = \overline{U}^2_{ijk} \bar{i} + V^2_{ijk} \bar{j} + W^2_{ijk} \bar{k}\,;\ \overline{U}^3_{ijk} = \overline{U}^3_{ijk} \bar{i} + V^3_{ijk} \bar{j} + W^3_{ijk} \bar{k}\,.$$

Зауважимо, що у вище наведених величинах, угорі праворуч проставлено індекси, а не показники ступеня. Вектори $\overline{U}_0, \overline{U}^1_{ijk}, \overline{U}^2_{ijk}, \overline{U}^3_{ijk}$ задовольняють таким крайовим умовам:

$$\overline{U}_0 \Big|_{\omega} = 0;\quad T\left(\overline{U}_0\right)\Big|_{\omega} = \frac{P\omega_3}{\omega_2 + \omega_3}\,;$$

$$T\left(\overline{U}_0\right)\Big|_{\omega_1} = 0;\ T\left(\overline{U}^L_{ijk}\right)\Big|_{\omega_4} = 0;\quad \overline{U}^L_{ijk}\Big|_{\omega_1} = 0;\ L = \overline{1,3}\,.$$

Постійні параметри C^L_{ijk} визначаються з умови найкращого наближення структури до вектора реальних переміщень. Цій умові відповідають рішення, що використовують методи Рітца, Бубнова-Галеркіна та інші, оскільки структура $\overline{U}_n$ задовольняє геометричним і статичним граничним умовам.

За методом Рітца [4], розв'язання диференціальних рівнянь (3) за крайових умов (4) еквівалентне завданню варіаційного числення про мінімізацію потенціальної енергії зовнішніх і внутрішніх сил системи, що діють на пружну область *D,* для якої диференціальні рівняння (3) є рівняннями Ейлера-Лагранжа. У цьому разі наближене значення вектора пружних переміщень, вибране у вигляді сімейства функцій (див. (2))

$$\overline{U}_n(x,y,z) = \bar{i} u_n + j v_n + \bar{k} w_n\,,$$

де

$$\left.\begin{aligned} u_n &= -P \sum_{i+j+k=0}^{n} C^1_{ijk} \cdot f_{ijk} \\ v_n &= -P \sum_{i+j+k=0}^{n} C^2_{ijk} \cdot f_{ijk} \\ w_n &= -P \sum_{i+j+k=0}^{n} C^3_{ijk} \cdot f_{ijk} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

де f_{ijk} – координатні функції;

C^N_{ijk}, (*N*=1, 2, 3) – постійні величини, що підлягають визначенню і задовольняють крайовим умовам (4)),

повинно задовольняти варіаційному рівнянню Лагранжа

$$\delta E = \delta Q - \delta A = 0\,,$$

де δQ – робота внутрішніх сил, що являє собою приріст потенціальної енергії на будь-якому можливому переміщенні системи;

δA – робота зовнішніх сил на тому самому можливому переміщенні.

$$E = \iiint W dx dy dz - \iint \left(X_{\bar{n}} u + Y_{\bar{n}} v + Z_{\bar{n}} w \right) ds\,, \tag{15}$$

де

$$W = \frac{1}{2}\left(\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \right.$$

$$+ \mu \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) +$$

$$\left. + 2\mu \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) \right).$$

Робота зовнішніх сил при врахуванні крайових умов (4) записується співвідношенням

$$\iint \left(X_{\bar{n}} u + Y_{\bar{n}} v + Z_{\bar{n}} w \right) ds = - \\ - \iint P \begin{bmatrix} u \cos(\bar{n}, x) \\ + v \cos(\bar{n}, y) + w \cos(\bar{n}, z) \end{bmatrix} d\omega\,, \tag{16}$$

де $\cos(\bar{n}, l)$, $l = x, y, z$ – напрямні косинуси зовнішньої нормалі на площадки контакту. На поверхні, вільній від площадки контакту, нормальні напруження дорівнюють нулю. У виразі (16) інтенсивність розподіленого по площадки контакту навантаження *P* входить вхідною складовою частиною в підінтегральну функцію.

Для визначення значень параметрів C^L_{ijk}, ($L = 1,2,3$) (14), відповідних мінімуму потенційної енергії системи, необхідно розв'язати задачу на екстремум у вигляді

$$\frac{\partial E}{\partial C^1_{\alpha\beta\gamma}} = 0,\ \frac{\partial E}{\partial C^2_{\alpha\beta\gamma}} = 0,\ \frac{\partial E}{\partial C^3_{\alpha\beta\gamma}} = 0, \tag{17}$$

де $\alpha + \beta + \gamma = 0,1,...,\ n$.

Якщо в (17) підставити (14) і виконати деякі перетворення, отримаємо систему Рітца в розгорнутому вигляді, зручному для алгоритмізації процесу обчислення. Компоненти вектора $\overline{U}_n = \bar{i} u_n + j v_n + \bar{k} w_n$ для будь-якої точки області *D* визначаються шляхом підстановки в (14) коефіцієнтів C^L_{ijk}, ($L = 1,2,3$), отриманих у результаті розв'язання системи Рітца в розгорнутому вигляді

$$\sum_{i+j+k=0}^{n} \left\{ C^1_{ijk} \iiint_D \left[\left(\frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) \frac{\partial f_{ijk}}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x} + \frac{\partial f_{ijk}}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial y} + \frac{\partial f_{ijk}}{\partial z} \cdot \frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial z} \right] dx dy dz + \right.$$

$$+ C^2_{ijk} \iiint_D \left(\frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\partial f_{ijk}}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x} + \frac{\partial f_{ijk}}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial y} \right) dx dy dz +$$

$$+C_{ijk}^{3}\iiint_{D}\left(\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial z}\cdot\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x}+\frac{\partial f_{ijk}}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial z}\right)dxdydz\Bigg\}=\frac{1}{\mu}\int\int_{\omega_2} f_{\alpha\beta\gamma}\cos(\upsilon,x)d\omega\,;$$

$$\sum_{i+j+k=0}^{n}\Bigg\{C_{ijk}^{1}\iiint_{D}\left[\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\frac{\partial f_{ijk}}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x}+\frac{\partial f_{ijk}}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial y}+\frac{\partial f_{ijk}}{\partial z}\cdot\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial z}\right]dxdydz+$$

$$+C_{ijk}^{2}\iiint_{D}\left(\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x}+\frac{\partial f_{ijk}}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial y}\right)dxdydz+$$

$$+C_{ijk}^{3}\iiint_{D}\left(\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial z}\cdot\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x}+\frac{\partial f_{ijk}}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial z}\right)dxdydz\Bigg\}=\frac{1}{\mu}\int\int_{\omega_2} f_{\alpha\beta\gamma}\cos(\upsilon,x)d\omega\,;$$

$$\sum_{i+j+k=0}^{n}\Bigg\{C_{ijk}^{1}\iiint_{D}\left(\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial z}+\frac{\partial f_{ijk}}{\partial z}\cdot\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x}\right)dxdydz+\ +C_{ijk}^{2}\iiint_{D}\left(\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial z}+\frac{\partial f_{ijk}}{\partial z}\cdot\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial y}\right)dxdydz+$$

$$+\,x_{\iota j\kappa}^{3}\iiint_{\Delta}\left(\frac{\partial\varphi_{\iota j\kappa}}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\varphi_{\alpha\beta\gamma}}{\partial\xi}+\frac{\partial\varphi_{\iota j\kappa}}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial\varphi_{\alpha\beta\gamma}}{\partial\psi}+\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\frac{\partial\varphi_{\iota j\kappa}}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial\varphi_{\alpha\beta\gamma}}{\partial\zeta}\right)\delta\xi\delta\psi\delta\zeta\Bigg\}==\frac{1}{\mu}\int\int_{\omega_2} f_{\alpha\beta\gamma}\cos(\upsilon,z)d\omega\,.\quad \alpha+\beta+\gamma=0,1,...,n\,.$$

Модуль вектора пружних переміщень визначається з виразу $U_n=\sqrt{u_n^2+v_n^2+w_n^2}$. Визначення напружень у будь-якій точці області базується на узагальненому законі Гука в тензорній формі [4,5]

$$T_G=\lambda\Theta E_1+2\mu T_\varepsilon=\begin{Bmatrix} G_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & G_y & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & G_z\end{Bmatrix},$$

де $$T_\varepsilon=\begin{Bmatrix} \varepsilon_x & (1/2)\gamma_{xy} & (1/2)\gamma_{xz}\\ (1/2)\gamma_{xy} & \varepsilon_y & (1/2)\gamma_{yz}\\ (1/2)\gamma_{zx} & (1/2)\gamma_{zy} & \varepsilon_z\end{Bmatrix}-$$

тензор деформацій;

E_1 – одиничний тензор $\left(E_1=\begin{Bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{Bmatrix}\right)$.

Компоненти тензора деформацій виражаються через геометричні характеристики деформацій у вигляді

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\gamma_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_y=\frac{\partial\upsilon}{\partial y},\gamma_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial\upsilon}{\partial z}\right)$$

$$\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\gamma_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right).$$

Якщо $\bar{l}=\{l_x,l_y,l_z\}$ – напрямні косинуси деякої площадки з нормаллю *r* у точці $M(x,y,z)$, що належить області *D*, то для обчислення складової напруги в цій точці необхідно скористатися залежностями Коші в тензорній формі [4, 5] у вигляді

$$P_\upsilon=\{l_x,l_y,l_z\}=\begin{Bmatrix} G_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & G_y & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & G_z\end{Bmatrix}.$$

Повне напруження на цій площадці визначається як геометрична сума складової, тобто

$$P_\upsilon=\sqrt{x_\upsilon^2+y_\upsilon^2+z_\upsilon^2}\,,$$

де $x_\upsilon=G_x l_x+\tau_{xy}l_y+\tau_{xz}l_z$, $y_\upsilon=\tau_{yx}l_x+G_y l_y+\tau_{yz}l_z$, $z_\upsilon=\tau_{zx}l_x+\tau_{zy}l_y+G_z l_z$

Висновки. Таким чином, у цій роботі розроблено теорію отримання структури наближеного рішення задачі визначення полів згинальних напружень у галтелі зубця зубчастих коліс з довільною формою зубців при будь-якій системи зовнішнього зачеплення реальної передачі, а також раціонального вибору розмірів і місцеположення поля зачеплення. В основу теорії покладено методи класичної теорії пружності в тривимірній постановці з використанням диференціальних залежностей Коші та узагальненого закону Гука за змішаних граничних умов для області зі складною граничною поверхнею.

Список літератури

1. Основи конструювання машин: Підручник для студентів інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів. 2-е вид., переробл. - Кривий Ріг: Видавець ФО-П Чернявський Д.О., 2015. – 492 с.; з іл.
2. *Павлище В. Т.* Основи конструювання та розрахунок деталей машин: Підруч. – 2-е вид. переробл. – Львів: Афіша. 2003. 560 с.
3. Рудь Ю.С. Основи конструювання машин: Підручник для студентів інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів. – Кривий Ріг: Видавництво «Мінерал», 2006.- 462 с.
4. Основи лінійної теорії пружності, пластичності та повзучості: Навч. посібник / Е.Д. Чихладзе, М.А. Веревічева, Є.І. Галагуря та ін. – Харків: УкрДАЗТ, 2010. – 149 с.
5. Опір матеріалів (спецкурс) і основи теорії пружності і пластичності: курс лекцій для студентів напряму підготовки «Будівництво» /Н.І. Хомик, Т.А. Довбуш, Н.А. Рубінець, – Тернопіль: ФОП Паляниця В.А., 2017. – 232с.

6. Гайдамака А. В. Г14 Деталі машин. Основи теорії та розрахунків : навчальний посібник для студентів машинобудівних спеціальностей усіх форм навчання / А. В. Гайдамака. – Харків : НТУ «ХПІ», 2020. – 275 с.
7. Власенко А.М. Металознавство та технологія металів: підручник для здобувачів професійної (професійно-технічної) освіти / А.М. Власенко. – Київ: Літера ЛТД, 2019. 224 с.
8. Конспект лекцій з дисципліни «Металознавство» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності 136 Металургія всіх форм навчання / Укладач: Калініна Т.В. – Кам`янське: ДДТУ, 2019.– 80 с.
9. Bodnar, Yu. « Review of works on the application of the method of R-functions in the mechanics of deformable solids ». Vìsnik L'vìvs'kogo nacìonal'nogo agrarnogo unìversitetu. Arhìtektura ì sìl's'kogospodars'ke budìvnictvo 19 (1 décembre 2018) : 5–9. http://dx.doi.org/10.31734/architecture2018.19.005.
10. Ламтюгова С. М., Сидоров М. В. Застосування методу R-функцій до розрахунку зовнішніх повільних течій в'язкої рідини // Відбір та обробка інформації, 2012, № 36 (112). С. 56 – 62.
11. Трач В.М., Подворний А.В. Опір матеріалів (спеціальний курс), теорія пружності та пластичності / [Підручник для студентів вищих навчальних закладів]. – Київ: Каравела, 2016. – 434 с.
12. Конструктивні засоби математичного моделювання та їхні застосування. Частина 1. Метод R-функцій в математичному і комп'ютерному моделюванні фізичних полів. Методичні вказівки для студентів III-IV курсів фізико-енергетичного факультету / Т.І. Шейко, К.В. Максименко-Шейко // Харків:ХНУ ім. В.Н. Каразіна, 2007. – 52 с.

References (transliterated)

1. Osnovy` konstruyuvannya mashy`n: Pidruchny`k dlya studentiv in-zhenerno-texnichny`x special`nostej vy`shhy`x navchal`ny`x zakla-div. 2-e vy`d., pererobl. - Kry`vy`j Rig: Vy`davecz` FO-P Cher-nyavs`ky`j D.O., 2015. – 492 p.; z il.
2. Pavly`shhe V. T. Osnovy` konstruyuvannya ta rozraxunok detalej mashy`n: Pidruch. – 2-e vy`d. pererob. – L`viv: Afisha. 2003. 560 s.
3. Rud` Yu.S. Osnovy` konstruyuvannya mashy`n: Pidruchny`k dlya studentiv inzhenerno-texnichny`x special`nostej vy`shhy`x navcha-l`ny`x zakladiv. – Kry`vy`j Rig: Vy`davny`cztvo «Mineral», 2006. 462 p.
4. Osnovy` linijnoyi teoriyi pruzhnosti, plasty`chnosti ta povzuchos-ti: Navch. posibny`k / E.D. Chy`xladze, M.A. Verevicheva, Ye.I. Ga-lagurya ta in. – Xarkiv: UkrDAZT, 2010. – 149 p.
5. Opir materialiv (speczkurs) i osnovy` teoriyi pruzhnosti i plas-ty`chnosti: kurs lekcij dlya studentiv napryamu pidgotovky` «Bu-divny`cztvo» /N.I. Xomy`k, T.A. Dovbush, N.A. Rubinecz`, – Ter-nopil`: FOP Palyany`cya V.A., 2017. – 232 p.
6. Gajdamaka A. V. G14 Detali mashy`n. Osnovy` teoriyi ta rozra-xunkiv : navchal`ny`j posibny`k dlya studentiv mashy`nobudivny`x special`nostej usix form navchannya / A. V. Gajdamaka. – Xar-kiv : NTU «XPI», 2020. – 275 p.
7. Vlasenko A.M. Metaloznavstvo ta texnologiya metaliv: pidru-chny`k dlya zdobuvachiv profesijnoyi (profesijno-texnichnoyi) osvity` / A.M. Vlasenko. – Ky`yiv: Litera LTD, 2019. 224 p.
8. Konspekt lekcij z dy`scy`pliny` «Metaloznavstvo» dlya zdobu-vachiv pershogo (bakalavrs`kogo) rivnya vy`shhoyi osvity` zi specia-l`nosti 136 Metalurgiya vsix form navchannya / Ukladach: Kali-nina T.V. – Kam`yans`ke: DDTU, 2019.– 80 p.
9. Bodnar, Yu. « Review of works on the application of the method of R-functions in the mechanics of deformable solids ». Vìsnik L'vìvs'kogo nacìonal'nogo agrarnogo unìversitetu. Arhìtektura ì sìl's'kogospodars'ke budìvnictvo 19 (1 décembre 2018) : 5–9. http://dx.doi.org/10.31734/architecture2018.19.005.
10. Lamtyugova S. M., Sy`dorov M. V. Zastosuvannya metodu R-funkczij do rozraxunku zovnishnix povil`ny`x techij v'yazkoyi ridy`ny` // Vidbir ta obrobka informacziyi, 2012, # 36 (112). P. 56–62.
11. Trach V.M., Podvorny`j A.V. Opir materialiv (special`ny`j kurs), teoriya pruzhnosti ta plasty`chnosti / [Pidruchny`k dlya studentiv vy`shhy`x navchal`ny`x zakladiv]. – Ky`yiv: Karavela, 2016. – 434 p.
12. Konstrukty`vni zasoby` matematy`chnogo modelyuvannya ta yixni zastosuvannya. Chasty`na 1. Metod R-funkcij v matematy`chnomu i komp'yuternomu modelyuvanni fizy`chny`x poliv. Metody`chni vkazivky` dlya studentiv III-IV kursiv fizy`ko-energety`chnogo fakul`tetu / T.I. Shejko, K.V. Maksy`menko-Shejko // Xar-kiv:XNU im. V.N. Karazina, 2007. – 52 p.

Надійшла (received) 29.10.2024

Відомості про авторів / About the Authors

Іванов Євген Мартинович / Ivanov Evgen – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), доцент, Харківський Національний автомобільно-дорожній університет, доцент кафедри комп'ютерної графіки; м. Харків, Україна; https://orcid.org/0000-0001-9011-7269; e-mail: repositiv@gmail.com