

**С. В. ЧЕРЕЛЬОВ, О. В. УСТИНЕНКО, М. БОШАНСЬКИЙ, Р. В. ПРОТАСОВ, О. В. БОНДАРЕНКО,
С. В. АНДРІЄНКО**

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА АЛГОРИТМ ОПТИМІЗАЦІЇ ЗА КРИТЕРІЄМ МІНІМАЛЬНИХ КОНТАКТНИХ НАПРУЖЕНЬ ЕВОЛЬВЕНТНИХ ПРЯМОЗУБЦЕВИХ ПЕРЕДАЧ З ПІДВИЩЕНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ ПЕРЕКРИТТЯ

Зниження маси та габаритів евольвентних циліндричних прямозубцевих передач є актуальною задачею сучасного машинобудування. Одним із перспективних шляхів її розв'язання є застосування зачеплення зі збільшеною робочою висотою зубців та коефіцієнтом торцевого перекриття $\varepsilon_a \geq 2$. Дослідження присвячено розробці методів оптимального проєктування саме таких передач. Критерій оптимальності сформульовано наступним чином: контактні напруження у полюсі зачеплення повинні приймати мінімально можливе значення при виконанні усіх конструктивних, геометро-кінематичних та технологічних обмежень, насамперед, при забезпеченні коефіцієнта торцевого перекриття $\varepsilon_a \geq 2$. Визначені змінні проєктування: коефіцієнти висоти головки зубців вихідних контурів шестерні та колеса h_{a1}^* , h_{a2}^* ; кут профілю вихідного контуру α ; коефіцієнт зміщення вихідного контуру шестерні x_1 . Сформовано систему обмежень на змінні проєктування: основне функціональне обмеження на мінімальну величину коефіцієнта торцевого перекриття – $\varepsilon_a \geq 2$; обмеження на коефіцієнти висоти головки зубців вихідних контурів шестерні та колеса h_{a1}^* , h_{a2}^* ; обмеження на кут профілю вихідного контуру α ; обмеження на значення коефіцієнтів зміщення вихідного контуру x_1 , x_2 ; відсутність підрізання ніжок зубців шестерні та колеса; відсутність загострення вершин зубців шестерні та колеса; відсутність інтерференції у зачепленні; умова забезпечення згинальної міцності зубців шестерні та колеса. Обрано метод розв'язання задачі оптимального проєктування. З усього різноманіття було обрано метод зондування простору параметрів проєктування. У якості пробних точок використовуються точки ЛПТ-послідовності. Метод дає змогу оперувати значною кількістю параметрів – до 51, забезпечує достатньо велику кількість рівномірно-розподілених пробних точок – до 2^{20} . Розроблено алгоритм оптимального проєктування зубчастої передачі. Основні етапи роботи алгоритму наступні: задання вхідних даних (числових обмежень на змінні проєктування, а також параметрів передачі та її навантаження); генерування ЛПТ-послідовності для змінних проєктування з одночасним урахуванням їхніх числових обмежень; перевірка функціональних обмежень; додаткові перевірочні розрахунки (при необхідності) контактної міцності зачеплення; формування масиву можливих варіантів розв'язку; пошук найкращого варіанта розв'язку (пробної точки, що відповідає мінімальному значенню цільової функції) шляхом сортування масиву.

Ключові слова: прямозубцева передача, коефіцієнт торцевого перекриття, контактні напруження, оптимізація, цільова функція, змінні проєктування, алгоритм.

S. CHERELEV, O. USTYENKO, M. BOŠANSKÝ, R. PROTASOV, O. BONDARENKO, S. ANDRIENKO

MATHEMATICAL MODEL AND OPTIMIZATION ALGORITHM ACCORDING TO THE CRITERIA OF MINIMUM CONTACT STRESS FOR INVOLUTE SPUR GEARS WITH INCREASED CONTACT RATIO

Reducing the mass and dimensions of involute spur gears is an actual task of modern mechanical engineering. One of the perspective ways to solve it is the use of gearing with an increased working tooth depth and profile contact ratio $\varepsilon_a \geq 2$. The study is devoted to the development of optimal design methods for such gears. Optimality criteria is formulated as follows: the contact stresses in the pitch point must take a minimum value when all constructive, geometric, kinematic, and technological constraints are met, first, when the profile contact ratio $\varepsilon_a \geq 2$ is ensured. Variables planning are defined. These are addendum coefficients of the basic racks tooth for pinion and wheel h_{a1}^* , h_{a2}^* ; profile angle of the basic rack α ; addendum modification coefficient of the pinion x_1 . Formed a system of constraints for the variables planning: the main functional constraint of the minimum value of the profile contact ratio: $\varepsilon_a \geq 2$; constraint for the addendum coefficients of the basic racks tooth for pinion and wheel h_{a1}^* , h_{a2}^* ; constraint for profile angle of the basic rack α ; constraint for addendum modification coefficients x_1 , x_2 ; absence of the cutter interference for tooth dedendum; absence of the sharpening for tooth addendum; absence of the mesh interference; ensuring the bending strength of pinion and wheel teeth. A method for solving the problem of optimal design is chosen. The method of probing the space of design parameters was chosen from all the variety. The points of the LPt-sequence are used as test points. The method allows you to operate with a significant number of parameters – up to 51, provides a sufficiently large number of evenly distributed test points – up to 2^{20} . The algorithm for optimal design of gear has been developed. The main stages of the algorithm are as follows: setting input data (numerical constraints on design variables, gear parameters and its load); generation of LPt-sequence for variables planning with simultaneous consideration of their numerical constraints; checking of functional constraints; additional verification calculations (if necessary) of the gearing contact strength; formation of an array of possible solutions; searching of the best solution variant (the test point corresponding to the minimum value of the objective function) by sorting the array.

Keywords: spur gear, profile contact ratio, contact stress, optimization, objective function, variables planning, algorithm.

Вступ. Актуальність задачі. Підвищення навантажувальної здатності циліндричних зубчастих передач є актуальною науково-прикладною задачею сучасного машинобудування. Це пов'язано з тим, що вони є невід'ємною частиною більшості механічних приводів: трансмісій колісних та гусеничних машин, редукторів турбогвинтових авіаційних, газотурбінних корабельних двигунів тощо.

Навантажувальна здатність закритої зубчастої передачі визначається насамперед рівнем контактних напружень у зачепленні [1]. Найбільш поширені у світовому машинобудуванні зубчасті передачі з евольвентним зачепленням, поряд із загальновідомими перевагами [1], мають також і суттєві недоліки, які не дозволяють значно підвищити контактну міцність:

1. Двоопуклий контакт зубців, що підвищує рівень контактних напружень.

2. Безпосередня залежність між радіусом кривизни евольвентного профілю ρ та радіусом зубчастого колеса r . Тому збільшення радіусів кривизни спряжених профілів зубців одночасно веде як до зниження контактних напружень, так і до зростання розмірів та маси передачі.

Аналіз існуючих досліджень. На теперішній час існує багато шляхів розв'язання цієї задачі. Умовно їх можна розділити на дві групи:

1. Поліпшення властивостей та підвищення твердості поверхневого шару матеріалів.

2. Застосування нових типів зачеплень із підвищеною контактної міцністю. Саме такі зачеплення

© С. В. Черельов, О. В. Устиненко, М. Бошанський, Р. В. Протасов, О. В. Бондаренко, С. В. Андрієнко, 2024

і є об'єктом нашого дослідження.

Серед останніх найбільш поширеними є зачеплення з опукло-увігнутим контактом зубців, наприклад, передача Вільдгабера-Новікова [2], яка не є обкатною у профільному напрямку. Але поряд із перевагами вона має суттєвий недолік, а саме, її неможливо зробити прямозубцевою. Також за останні 50 років багатьма дослідниками були запропоновані різноманітні традиційні обкатні передачі з опукло-увігнутим контактом. Це, наприклад, синусоїдальні передачі [3], еволютне зачеплення А. І. Павлова [4], С-С зачеплення М. Бошанскі та М. Вереша [5].

Ці передачі забезпечують суттєве підвищення контактної міцності, але мають і недоліки, а саме:

1. Технологічні складності виготовлення ріжучого обкатного інструмента.

2. Висока чутливість роботи зачеплень до похибок міжосьової відстані.

Тому уваги заслуговує інший шлях суттєвого підвищення навантажувальної здатності зубчастих передач за критерієм контактної міцності. А саме, використання традиційних евольвентних передач, які під час роботи постійно мають двопарне зачеплення, тобто, забезпечують сумарний коефіцієнт перекриття ε_γ більш, ніж 2 [6, 7]. Тоді одна пара зубців передає лише частину потужності N (у чисто теоретичному ідеальному варіанті $N/[\varepsilon_\gamma]$, де $[\varepsilon_\gamma]$ – ціла частина ε_γ).

У косозубцевих та особливо у шевронних передачах це досягається в основному за рахунок осьового перекриття зубців з коефіцієнтом $\varepsilon_\beta > 1$. Такі передачі мають широке застосування, наприклад, у турбінобудуванні: відомі серійні шевронні передачі із сумарним коефіцієнтом перекриття $\varepsilon_\gamma \approx 6$ [6].

У прямозубцевих передачах, які на наш час мають досить широке розповсюдження, наприклад, у планетарних приводах, осьове перекриття зубців відсутнє. Для них, з метою досягнення коефіцієнта торцевого перекриття $\varepsilon_\alpha \geq 2$, рекомендують так зване НСР-зачеплення зі збільшеною робочою висотою зубців. Її забезпечують шляхом застосування нестандартних вихідних контурів із підвищеними коефіцієнтами висоти головки та ніжки зубця [8–11], а також використання зменшених кутів профілю вихідного контуру, наприклад $14,5^\circ$ [6].

Постановка задачі. На наш час існує достатня кількість успішних досліджень геометрії, якісних характеристик і міцності прямозубцевих передач зі збільшеною робочою висотою зубців та коефіцієнтом торцевого перекриття $\varepsilon_\alpha \geq 2$ (дивись [6–11]). Але ці передачі та механічні приводи на їхній основі так і не набули значного поширення. На наш погляд, це пов'язано насамперед із наступними причинами:

1. Постійне двопарне зачеплення, тобто коефіцієнт торцевого перекриття $\varepsilon_\alpha \geq 2$ в реальній передачі можливо реалізувати лише при високій точності обробки зубців, якщо їхні пружні деформації під навантаженням переважають похибки кроку між зубцями [12].

2. Зменшення кута профілю вихідного контуру і збільшення коефіцієнтів висоти головки та ніжки зубця призводить до зростання рівня згинальних

напружень у корені останнього.

3. Збільшення коефіцієнтів висоти головки та ніжки зубця при одночасному зменшенні кута профілю вихідного контуру суттєво підвищує ймовірність підрізання та інтерференції зубців у зачепленні. Також зменшення кута профілю призводить до деякого зростання рівня контактних напружень.

Першу причину можливо подолати завдяки сучасному рівню технології виготовлення зубчастих коліс, який дозволяє забезпечити потрібну точність зубців. Для цього навіть не потрібні фінішні операції із високою собівартістю [6].

Друга причина не є вирішальною: як зазначено вище, основним фактором, обмежуючим навантажувальну здатність, є рівень контактних напружень у зачепленні.

А ось третя причина є більш вагомим, тому що під час вибору параметрів зачеплення, які забезпечують $\varepsilon_\alpha \geq 2$, виникає складний та суперечливий процес. Наприклад, ми забезпечили для конкретної передачі $\varepsilon_\alpha \geq 2$ за рахунок тільки збільшення висоти зубців, але отримали інтерференцію у зачепленні. Знижуючи висоту зубця та одночасно зменшуючи кут профілю вихідного контуру, досягаємо мети з геометричної точки зору. Але при цьому збільшуються контактні напруження, що зводить нанівець усі зусилля.

Вихід із цієї суперечливої ситуації автори бачать у визначенні основних геометричних параметрів зачеплення за допомогою методів математичної оптимізації. Варіюючи цими параметрами з урахуванням конструктивних, геометричних та технологічних обмежень, ми маємо можливість отримати евольвентну прямозубцеву передачу з мінімальними контактними напруженнями (мінімальні габарити та маса) при виконанні умови $\varepsilon_\alpha \geq 2$.

У попередніх роботах [13, 14] авторами було виконано постановку оптимізаційної задачі, а саме: побудовано цільову функцію за критерієм мінімальних контактних напружень; визначено змінні проектування; сформульовано систему обмежень на змінні проектування; обрано метод розв'язання задачі.

Отже, метою цього дослідження є:

– повне формування математичної моделі оптимізації евольвентних циліндричних прямозубцевих передач за критерієм мінімальних контактних напружень при забезпеченні коефіцієнта торцевого перекриття $\varepsilon_\alpha \geq 2$, з урахуванням конструктивних, геометричних та технологічних обмежень;

– побудова докладного алгоритму оптимізації таких передач на основі обраного методу розв'язання задачі, а саме, зондування простору параметрів проектування за допомогою точок так званої ЛПт-послідовності [15].

Побудова математичної моделі оптимізації за критерієм мінімальних контактних напружень. Критерій оптимальності було запропоновано у наступному вигляді [13]: контактні напруження у полюсі зачеплення повинні приймати мінімально можливе значення при виконанні усіх конструктивних, геометро-кінематичних та технологічних обмежень, насамперед, при забезпеченні коефіцієнта торцевого перекриття $\varepsilon_\alpha \geq 2$.

Математично можемо записати цільову функцію у наступному вигляді:

$$F_{\sigma} = \sigma_H \rightarrow \min. \quad (1)$$

Розрахунок контактних напружень σ_H , МПа, виконуємо на основі відомої формули Г. Герца [1, 6] для випадку початкового дотику пружних тіл по лінії. Також врахуємо, що досліджуються передачі із коефіцієнтом торцевого перекриття $\varepsilon_{\alpha} \geq 2$. Це означає, що у будь-який момент часу має місце двопарне зачеплення, тобто теоретична сумарна довжина контактних ліній завжди не менш, ніж $2b_w$, де b_w – робоча ширина зубчастого вінця. Тоді маємо:

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{F_n K_{H\alpha} E_H}{b_w \rho_H [\varepsilon_{\alpha}]}}. \quad (2)$$

У залежності (2):

F_n – нормальне зусилля у зачепленні;

$K_{H\alpha}$ – коефіцієнт, який враховує розподілення навантаження між зубцями. Зазвичай, у відповідності до стандартних методик [16, 17], для прямозубцевих передач приймають $K_{H\alpha} = 1$, але при $\varepsilon_{\alpha} \geq 2$ виникає необхідність врахувати нерівномірність навантаження постійно працюючих двох пар зубців;

E_H – приведений модуль пружності матеріалу,

$$E_H = 2 \frac{E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2}, \quad (3)$$

де E_1, E_2 – модулі пружності матеріалів шестерні та колеса;

$[\varepsilon_{\alpha}]$ – ціла частина ε_{α} ;

ρ_H – приведений радіус кривизни,

$$\rho_H = \frac{\rho_{w1} \cdot \rho_{w2}}{\rho_{w1} + \rho_{w2}}, \quad (4)$$

де ρ_{w1}, ρ_{w2} – радіуси кривизни профілів зубців шестерні та колеса в полюсі зачеплення.

Радіуси кривизни ρ_{w1}, ρ_{w2} будемо визначати за допомогою відомої формули для евольвенти [1]:

$$\rho_{w1,2} = 0,5 d_{w1,2} \sin(\alpha_w). \quad (5)$$

У залежності (5):

α_w – кут зачеплення в полюсі, визначається з основного рівняння евольвентного зачеплення [18]

$$\operatorname{inv} \alpha_w = 2 \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{inv} \alpha, \quad (6)$$

де $x_{1,2}$ – коефіцієнти зміщення вихідного контуру шестерні та колеса;

$z_{1,2}$ – числа зубців шестерні та колеса;

α – кут профілю вихідного контуру (рис. 1);

$d_{w1,2}$ – початкові діаметри шестерні та колеса,

$$d_{w1,2} = m z_{1,2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}, \quad (7)$$

де m – модуль зачеплення.

Коефіцієнт торцевого перекриття ε_{α} визначається за залежністю [18]

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{z_1 (\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w) + z_2 (\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w)}{2\pi}, \quad (8)$$

де $\alpha_{a1,2}$ – кути профілю на вершинах зубців шестерні та колеса,

$$\alpha_{a1,2} = \arccos \left(\frac{d_{b1,2}}{d_{a1,2}} \right). \quad (9)$$

У залежності (9):

$d_{b1,2}$ – основні діаметри шестерні та колеса,

$$d_{b1,2} = m z_{1,2} \cos \alpha; \quad (10)$$

$d_{a1,2}$ – діаметри вершин зубців шестерні та колеса,

$$d_{a1,2} = m z_{1,2} + 2 (h_{a1,2}^* + x_{1,2} - \Delta y) m, \quad (11)$$

де $h_{a1,2}^*$ – коефіцієнти висоти головки зубців вихідних контурів шестерні та колеса (рис. 1);

Δy – коефіцієнт зрівняльного зміщення,

$$\Delta y = x_1 + x_2 - 0,5 (z_1 + z_2) \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} - 1 \right). \quad (12)$$

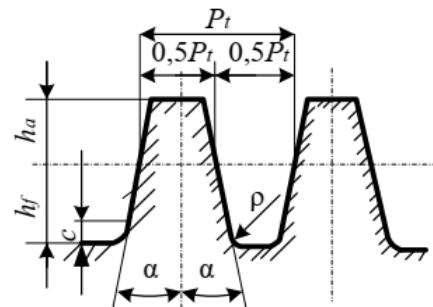


Рисунок 1 – Схема вихідного контуру

На відміну від традиційних евольвентних передач, у тому числі зі стандартним вихідним контуром, де прийняті однакові коефіцієнти висоти головки зубців шестерні та колеса ($h_{a1}^* = h_{a2}^* = h_a^*$), будемо використовувати так зване різне контурне зачеплення, для якого $h_{a1}^* \neq h_{a2}^*$. У цьому випадку, як було обґрунтовано у роботі [11], можливо досягнення більших значень ε_{α} .

Таким чином, рівняння (1)...(12) складають математичну модель оптимізації евольвентних циліндричних прямозубцевих передач за критерієм мінімальних контактних напружень у зачепленні при забезпеченні коефіцієнта торцевого перекриття $\varepsilon_{\alpha} \geq 2$.

Визначення змінних проєктування. У якості змінних проєктування нами були обрані [13] ті геометричні параметри евольвентного зачеплення, які безпосередньо впливають на величину коефіцієнта торцевого перекриття ε_{α} [19].

По-перше, це висоти зубців шестерні та колеса h_1 та h_2 . З метою узагальнення розрахунків і результатів будемо виконувати моделювання з використанням коефіцієнтів висоти головки зубців шестерні та колеса h_{a1}^*, h_{a2}^* , як прийнято у традиційних розрахунках геометрії зубчастих зачеплень.

По-друге, значення кута профілю вихідного ко-

нтуру α . Відомо, що при його зменшенні ε_α зростає. Але при зменшенні α зростає величина контактних напружень σ_H у евольвентному зачепленні, це пов'язано із зменшенням приведенного радіуса кривизни. Таким чином, ми маємо неоднозначність впливу величини кута α на рівень контактних напружень σ_H для передач з $\varepsilon_\alpha \geq 2$.

По-третє, при зростанні сумарного коефіцієнта зміщення вихідного контуру $x_\Sigma = x_1 + x_2$ коефіцієнт торцевого перекриття ε_α дещо зменшується. А у випадку, коли $h_{a1}^* \neq h_{a2}^*$, на величину ε_α може впливати не тільки x_Σ , але й x_1 та x_2 окремо.

Прийmemo для подальших досліджень, що оптимальному проектуванню підлягають зубчасті передачі з наперед призначеними геометричними характеристиками. А саме, відомі модуль зачеплення m ; числа зубців шестерні та колеса $z_{1,2}$; міжосьова відстань передачі a_w ; робоча ширина зубчастого вінця b_w . Тоді ми маємо однозначну величину сумарного коефіцієнта зміщення вихідного контуру x_Σ . Тому зручно аналізувати вплив на величину ε_α тільки одного коефіцієнта зміщення, наприклад, x_1 .

Виходячи з цього, обираємо у якості змінних проектування для нашої цільової функції (1) наступні чотири параметри:

- коефіцієнти висоти головки зубців вихідних контурів шестерні та колеса h_{a1}^* , h_{a2}^*
- кут профілю вихідного контуру α ;
- коефіцієнт зміщення вихідного контуру шестерні x_1 .

Числові та функціональні обмеження на змінні проектування. Обмеження повинні враховувати конструктивні, геометро-кінематичні та технологічні характеристики зубчастого зачеплення. Вони вводяться у вигляді рівностей та нерівностей, при цьому змінні проектування можуть бути обмежені як числовими значеннями, так і деякими функціями [20]. Також можуть бути накладені обмеження на деякі співвідношення між змінними проектування.

Для нашої задачі маємо наступну систему обмежень [14].

Функціональні обмеження:

- основне функціональне обмеження на мінімальну величину коефіцієнта торцевого перекриття: $\varepsilon_\alpha \geq 2$;
- умова відсутності підрізання ніжок зубців шестерні та колеса;
- умова відсутності загострення вершин зубців шестерні та колеса;
- умова відсутності інтерференції у зачепленні;
- умова забезпечення згинальної міцності зубців шестерні та колеса: $\sigma_{F1,2} \leq \sigma_{FP1,2}$, де $\sigma_{F1,2}$ та $\sigma_{FP1,2}$ – відповідно розрахункові та допустимі згинальні напруження.

Числові обмеження:

- коефіцієнти висоти головки зубців вихідного контуру шестерні та колеса h_{a1}^* , h_{a2}^* обмежуються відповідними числовими діапазонами: $h_{a1\min}^* \leq h_{a1}^* \leq h_{a1\max}^*$; $h_{a2\min}^* \leq h_{a2}^* \leq h_{a2\max}^*$;
- кут профілю вихідного контуру α обмежується числовим діапазоном $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$, де α_{\min} визна-

чається із умови відсутності заклинювання передачі, $\alpha_{\min} \geq (1,1 \dots 1,2) \operatorname{tg} f$ (f – коефіцієнт тертя ковзання у зачепленні); α_{\max} призначається у межах $22 \dots 25^\circ$, виходячи із досвіду проектування евольвентних зачеплень [6];

– коефіцієнти зміщення вихідного контуру x_1 , x_2 шестерні та колеса обмежуються відповідними числовими діапазонами: $x_{1\min} \leq x_1 \leq x_{1\max}$; $x_{2\min} \leq x_2 \leq x_{2\max}$, де $x_{1\min}$, $x_{2\min}$ визначаються із умови відсутності підрізання ніжок зубців; $x_{1\max}$, $x_{2\max}$ визначаються із умови відсутності загострення вершин зубців.

Обрання методу розв'язання задачі оптимізації. З усього різноманіття методів розв'язання оптимізаційних задач [20] було обрано так званий метод ЛПт-пошуку [15], який добре себе зарекомендував у процесі оптимізації тривальних коробок передач, трансмісій та редукторів [21, 22]. Він базується на зондуванні простору параметрів проектування, а у якості пробних точок в одиничному багатомірному кубі використовуються точки ЛПт-послідовності. Метод дає змогу оперувати значною кількістю параметрів (до 51) та забезпечує достатньо велику кількість рівномірно-розподілених пробних точок (до 2^{20}).

Скористуємося основними положеннями та розрахунковими залежностями [15] щодо рівномірно розподілених послідовностей.

Якщо точки Q_i з декартовими координатами $(q_{i,1}, \dots, q_{i,n})$ є рівномірно розподіленою послідовністю в K^n (одиничний n -вимірний куб), то точки A_j з декартовими координатами $(\theta_{j,1}, \dots, \theta_{j,n})$, де при $j = 1, 2, \dots, n$ (j – порядковий номер змінної проектування, n – кількість змінних проектування),

$$\theta_{i,j} = a_j + (b_j - a_j) q_{i,j} \quad (13)$$

є рівномірно розподіленою послідовністю в паралелепіпеді Π (n -вимірний паралелепіпед), що складається з точок $(\theta_1, \dots, \theta_n)$, координати яких задовольняють нерівностям $a_j \leq \theta_j \leq b_j$.

Декартові координати $q_{i,j}$ для ЛПт-послідовності зазвичай обчислюються за арифметичним алгоритмом. Цей алгоритм базується безпосередньо на розрахунках за спеціальною таблицею чисельників $r_j^{(l)}$. За заданим номером точки i спочатку обчислюємо допоміжну величину m , а потім для кожного j -го параметру обчислюємо координату $q_{i,j}$,

$$m = 1 + \left\lceil \frac{\ln i}{\ln 2} \right\rceil;$$

$$q_{i,j} = \sum_{k=1}^m 2^{-k+1} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{l=k}^m \left[2\{i^{-l}\} \right] \cdot \left[2\{r_j^{(l)} 2^{k-1-l}\} \right] \right\}, \quad (14)$$

де $[X]$ – ціла частина деякого числа X ;
 $\{X\}$ – дробова частина того ж числа.

Таким чином, розв'язання задачі оптимального проектування методом ЛПт-пошуку складається з наступних етапів.

1. Завдання вхідних даних, у тому числі числових обмежень на змінні проектування.
2. Генерування декартових координат $q_{i,j}$ за за-

лежністю (14).

3. Генерування значень змінних проектування θ_{ij} за залежністю (13). Тут $i = 1, 2, \dots, 2^{20}$ – номер пробної точки; a_j, b_j – відповідно мінімальні та максимальні значення обмежень на змінні проектування.

4. Перевірка функціональних обмежень на змінні проектування з відсівом пробних точок, не задовольняючих цим обмеженням.

5. Розрахунок значення цільової функції $F_{\sigma i}$ у кожній пробній i -й точці, що пройшла усі перевірки.

5. Формування масиву можливих варіантів розв'язку із значень $F_{\sigma i}$.

6. Пошук мінімального значення $F_{\sigma i}$ шляхом сортування масиву. Відповідні йому значення змінних проектування і є оптимальним розв'язком задачі.

Таким чином, математичний апарат ЛПт-пошуку дає змогу швидко та якісно знаходити оптимальні геометричні та конструктивні параметри зачеплень, що досліджуються.

Алгоритм оптимізації С-С зачеплення. Додатково вище наведені математичну модель, обмеження і метод ЛПт-пошуку етапами вводу-виводу даних, складання таблиці можливих варіантів розв'язку, пошуку найкращого варіанта та об'єднаємо їх у єдиний алгоритм, який представлено на рис. 2. Далі докладно розглянемо його роботу.

Функціонування алгоритму оптимізації проходить наступним чином.

1. *Завдання вхідних даних.* Їхньою основою є геометричні та кінематичні параметри передачі, конструкторські та технологічні вимоги, а також фізико-механічні властивості матеріалів зубчастих коліс. Розглянемо деякі з них докладніше.

1.1. Числові обмеження на змінні проектування, а саме, на:

- коефіцієнти висоти головки зубців $h_{a1\min}^*$, $h_{a1\max}^*$; $h_{a2\min}^*$, $h_{a2\max}^*$;
- кут профілю вихідного контуру α_{\min} , α_{\max} ;
- коефіцієнти зміщення вихідного контуру $x_{1\min}$, $x_{1\max}$; $x_{2\min}$, $x_{2\max}$.

1.2. Параметри передачі та її матеріалів і навантаження:

- обертальний момент на шестерні T_1 ;
- модуль зачеплення m ;
- числа зубців шестерні та колеса z_1, z_2 ;
- робоча ширина зубця b_w ;
- модулі пружності матеріалів шестерні та колеса E_1, E_2 ;
- допустимі згинальні напруження для зубців шестерні та колеса $\sigma_{FP1}, \sigma_{FP2}$.

2. *Генерування ЛПт-послідовності* для змінних проектування з одночасним урахуванням їхніх числових обмежень. Взявши за основу залежність (13), маємо наступні формули.

2.1. Для коефіцієнта висоти головки зубця шестерні h_{a1}^*

$$h_{a1i}^* = h_{a1\min}^* + (h_{a1\max}^* - h_{a1\min}^*) q_{i1}. \quad (15)$$

2.2. Для коефіцієнта висоти головки зубця ко-

леса h_{a2}^*

$$h_{a2i}^* = h_{a2\min}^* + (h_{a2\max}^* - h_{a2\min}^*) q_{i2}. \quad (16)$$

2.3. Для кута профілю вихідного контуру α

$$\alpha_i = \alpha_{\min} + (\alpha_{\max} - \alpha_{\min}) q_{i3}. \quad (17)$$

2.4. Для коефіцієнта зміщення вихідного контуру шестерні x_1

$$x_{1i} = x_{1\min} + (x_{1\max} - x_{1\min}) q_{i4}. \quad (18)$$

3. *Перевірка функціональних обмежень*, які були перелічені нами вище. Зауважимо, що числові обмеження на змінні проектування перевіряти не потрібно, тому що вони автоматично враховуються у процесі генерування пробних значень змінних проектування (дивись залежності (15)–(18)). Це теж є перевагою запропонованого підходу з точки зору зменшення обсягів обчислень.

4. *Додаткові перевірочні розрахунки* (при необхідності). У випадку, коли розв'язується задача не тільки знаходження оптимальних параметрів, а також практичного оптимального проектування конкретної передачі, алгоритм дає змогу виконати перевірку контактної міцності зачеплення за залежністю

$$\sigma_H \leq \sigma_{HP}, \quad (19)$$

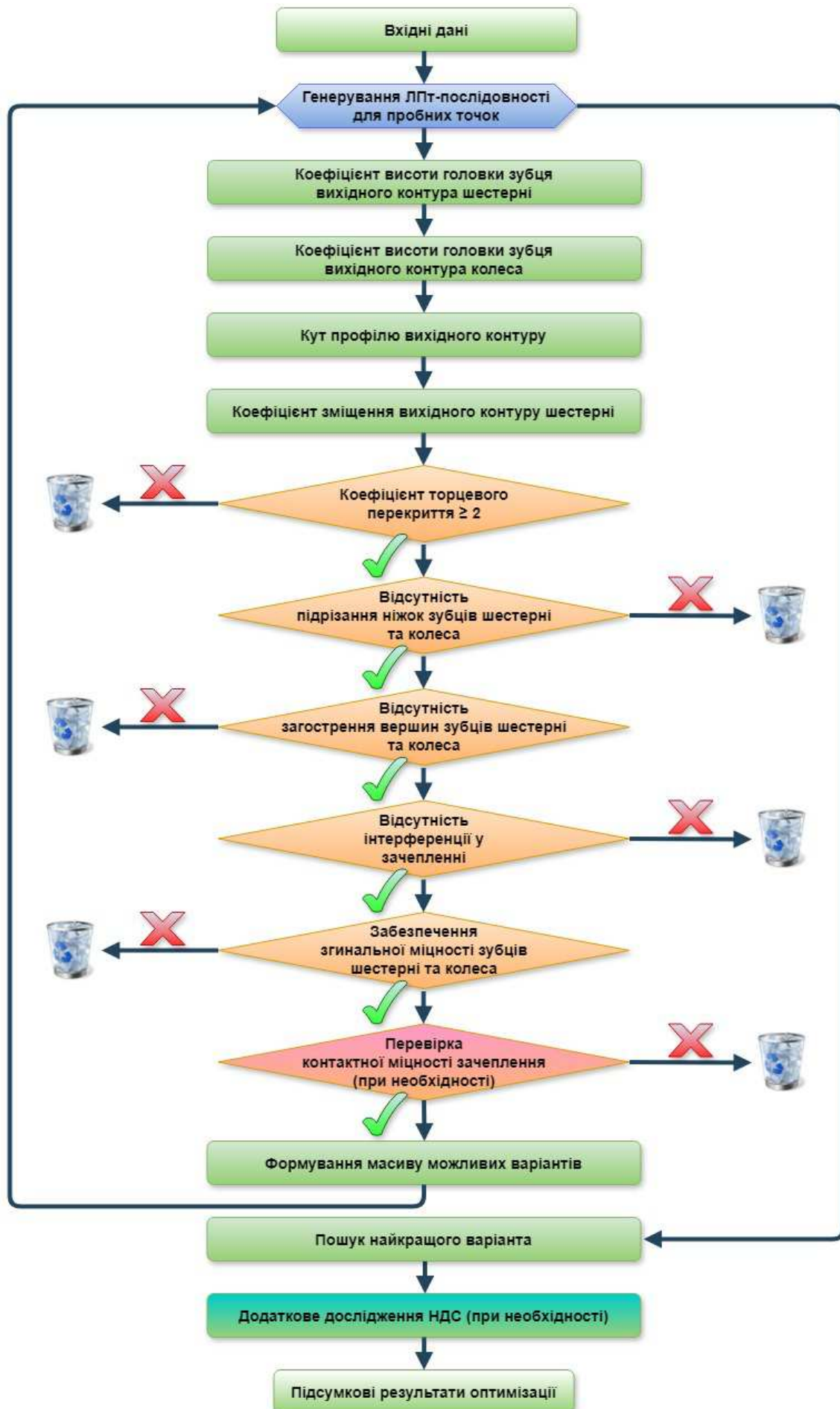
де σ_{HP} – допустимі контактні напруження, які необхідно додати до вхідних даних алгоритму.

Умова (19) є додатковим функціональним обмеженням на значення цільової функції (2).

5. *Формування масиву можливих варіантів розв'язку.* Якщо пробна точка проходить всі обмеження, то для неї розраховується значення цільової функції (2), тобто контактних напружень за залежністю (3). Після цього точка потрапляє до таблиці можливих варіантів. Таблиця являє собою двовимірний масив, в ньому кожному номеру точки відповідає значення цільової функції, а також набір відповідних значень змінних проектування.

6. *Пошук найкращого варіанта* (пробної точки, що відповідає мінімальному значенню цільової функції). Він здійснюється шляхом сортування масиву одним із загальновідомих методів [23], наприклад, бульбашковим сортуванням.

7. *Додаткове дослідження напружено-деформованого стану (НДС) зачеплення* для найкращого та декількох найближчих варіантів (при необхідності). Доцільно виконувати, якщо для декількох варіантів отримані дуже близькі значення контактних напружень. У цьому випадку аналіз контактної взаємодії у зачепленні методом скінченних елементів (МСЕ) дає змогу остаточно обрати найкращий варіант. Також при цьому можливо проаналізувати згинальні напруження у корені зубця. Може виконуватися за допомогою будь якого з поширених у світовій практиці спеціалізованих програмних комплексів, наприклад, Autodesk Inventor Nastran (Nastran In-CAD) [24] або ANSYS [25].

Рисунок 2 – Схема алгоритму оптимізації передачі з $\epsilon_\alpha \geq 2$ за критерієм мінімальних контактних напружень

Висновки:

1. Розв'язання задачі оптимізації евольвентних циліндричних прямозубцевих передач з коефіцієнтом торцевого перекриття $\epsilon_a \geq 2$ є перспективним напрямком досліджень, які дають змогу суттєво поліпшити навантажувальну здатність та масогабаритні показники механічних приводів.

2. Побудовано математичну модель оптимізації передач з коефіцієнтом торцевого перекриття $\epsilon_a \geq 2$ за критерієм мінімальних контактних напружень у зацепленні. Вона, на відміну від існуючих, дає змогу врахувати усі характерні особливості таких передач.

3. Визначені змінні проектування, у якості яких обрані параметри, які безпосередньо впливають на величину коефіцієнта торцевого перекриття ϵ_a . Це коефіцієнти висоти головки зубців вихідних контурів шестерні та колеса h_{a1}^* , h_{a2}^* ; кут профілю вихідного контуру α та коефіцієнт зміщення вихідного контуру шестерні x_1 . Також сформовано систему числових та функціональних обмежень на змінні проектування.

4. У якості метода розв'язання задачі обрано зондування простору параметрів за допомогою метода ЛПТ-пошуку. Він забезпечує швидке та достатньо точне знаходження оптимальних геометричних параметрів зацеплення.

5. Розроблено загальну схему алгоритму розв'язання задачі оптимізації передач з коефіцієнтом торцевого перекриття $\epsilon_a \geq 2$. Алгоритм враховує геометро-кінематичні параметри передачі, конструкторські та технологічні вимоги, а також фізико-механічні властивості матеріалів зубчастих коліс.

6. Алгоритм поєднує математичну модель, обмеження на змінні проектування та метод оптимізації з раціональною послідовністю перевірки обмежень, а також з аналізом і обробкою отриманих результатів. При необхідності він дає змогу виконати практичне оптимальне проектування передачі з конкретними конструктивними параметрами та умовами роботи. Все це є його беззаперечною перевагою.

7. У подальших дослідженнях планується провести тестові та перевіірочні розрахунки з метою підтвердження і оцінки отриманих теоретичних результатів. Також будуть запропоновані варіанти передач з коефіцієнтом торцевого перекриття $\epsilon_a \geq 2$, які забезпечують суттєве підвищення навантажувальної здатності механічних приводів.

Список літератури

1. Павлище В.Т. *Основи конструювання та розрахунк деталей машин*. Львів, Афіша, 2003. 560 с.
2. Radzevich P. Stephen. *High-Conformal gearing. Kinematics and Geometry*. CRC Pres, 2016. 349 p.
3. Грицай І.Є., Литвиняк Я.М. Синусоїдальні зубчасті передачі як альтернатива традиційним передачам та новий метод їх виготовлення. *Вісник НТУ "ХПІ". Тематичний випуск "Проблеми механічного приводу"*. Харків, НТУ "ХПІ", 2009, № 19, с. 43–53.
4. Павлов А.И. *Современная теория зубчатых зацеплений*. Харьков, ХНАДУ, 2005. 100 с.
5. Vereš, M., Bošanský, M., Gaduš J. *Theory of Convex-Concave and plane cylindrical gearing*. STU, Bratislava, Slovakia, 2006. 180 p.
6. *Dudley's Handbook of Practical Gear Design and Manufacture*. Edited by Stephen P. Radzevich. CRC Pres, 2022. 1144 p.
7. Chanhoh Choi, Hyoungjong Ahna, Young-jun Park, Geun-ho Leec, Su-chul Kim. Influence of gear tooth addendum and dedendum on the helical gear optimization considering mass, efficiency, and transmission error. *Mechanism and Machine Theory*.

Vol. 166, December 2021, no. of article 104476. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0094114X21002342> (accessed 30.05.2022).

8. M. Rameshkumar, P. Sivakumar, S. Sundaresh and K. Gopinath. Load Sharing Analysis of High-Contact-Ratio Spur Gears in Military Tracked Vehicle Applications. *Gear Technology*, July 2010, pp. 43–50.
9. Miryam Sanchez, Jose Pedrero, Miguel Pleguezuelos. Tooth-root stress calculation of high transverse contact ratio spur and helical gears. *Mechanism and Machine Theory*. February 2014, vol. 64, no. 2, pp. 93–110.
10. Predrag S. Dobratic, Mileta R. Ristivojevic. Uticaj parametara cilindricnih zupcastih parova na stepen sprezanja profila zubaca. *Vojnotehnicki glasnik / Military technical courier*. 2014, vol. LXII, no. 3, pp. 80–100.
11. Milan Rackov. *Optimization of HCR Gearing Geometry from Scuffing Point of View*. PhD Thesis. Bratislava, 2014. 103 p.
12. Бунаков Ю.Н., Устиненко А.В. Выбор рационального коэффициента высоты головки зуба. *Теория механизмов и машин*. 1988, вып. 44, с. 7–9.
13. О. В. Устиненко, С. В. Черельов, М. Бошанскі, Р. В. Протасов, О. В. Бондаренко, Н. О. Левін. Оптимальне проектування евольвентних циліндричних прямозубцевих передач з підвищеним коефіцієнтом перекриття: цільова функція, змінні проектування та обмеження. *Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Машинознавство та САПР*. Харків, НТУ "ХПІ", 2022, № 2, с. 136–141.
14. Черельов С.В., Устиненко О.В., Бондаренко О.В., Протасов Р.В., Андриєнко С.В. Математична модель оптимізації зубчастих передач із підвищеним коефіцієнтом перекриття. *Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць МДПУ ім. Б.Хмельницького*. Мелітополь, видавництво МДПУ ім. Б.Хмельницького, 2023. вип. 25, с. 226–233.
15. I. Sobol', D. Asotsky, A. Kreinin, S. Kucherenko. Construction and Comparison of High-Dimensional Sobol' Generators. *Wilmott Journal*, 2011, Nov, pp. 64–79.
16. *ГОСТ 21354-87. Передачи зубчатые цилиндрические эвольвентные внешнего зацепления. Расчет на прочность*. Москва, изд-во стандартов, 1989. 76 с.
17. *ISO 6336:2006 Metod B. Calculation of load capacity of spur and helical gears*. 2007.
18. *ГОСТ 16532-70. Передачи зубчатые цилиндрические эвольвентные внешнего зацепления. Расчет геометрии*. Москва, изд-во стандартов, 1983. 43 с.
19. Болотовский И.А., Гурьев Б.И., Смирнов В.Э., Шендерей Б.И. *Цилиндрические эвольвентные зубчатые передачи внешнего зацепления. Расчет геометрии: Справочное пособие*. Москва, Машиностроение, 1974. 160 с.
20. H. Rekleytys, A. Reyvyndran, K. Rjehsdel. *Engineering Optimization*. New York, A Wiley-Interscience Publ., 1983.
21. Бондаренко О. В., Устиненко О. В., Сериков В. І. Приклад раціонального проектування зубчастого циліндричного двоступінчастого редуктору методом псевдовипадкового пошуку при багатьох критеріях. *Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Машинознавство та САПР*. Харків, НТУ "ХПІ", 2018, № 25 (1301), с. 31–35.
22. O. Ustinenko, O. Bondarenko, I. Klochkov, V. Serykov. Multi-criteria optimization of tracked vehicle transmissions. *Proc. of 6th International BAPT Conference Power Transmissions*. 19–22.06.2019, Varna, 1 (2019), pp. 196–199.
23. Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming: Volume 1: Fundamental Algorithms*. Addison-Wesley Professional, 1997. 672 p.
24. *Inventor Nastran: CAD-embedded finite element analysis*. Available at: <https://www.autodesk.com/products/inventor-nastran/overview>. Accessed 28 February 2024.
25. *ANSYS: Engineering Simulation Software*. Available at: <https://www.ansys.com/>. Accessed 28 February 2024.

References (transliterated)

1. Pavlyshhe V. T. *Osnovy konstruiuvannya ta rozrahunok detalej mashyn* [Fundamentals of design and calculation of machine parts]. L'viv, Afisha Publ., 2003. 560 p.
2. Radzevich P. Stephen. *High-Conformal gearing. Kinematics and Geometry*. CRC Pres, 2016. 349 p.
3. Grycaj I. Je., Lytvynjak Ja. M. Synusoi'dal'ni zubchasti peredachi jak al'ternatyva tradycijnym peredacham ta novyj metod ih vygotovlennja [Sinusoidal gears as an alternative to traditional gears and a new method of their manufacture]. *Visnyk NTU "KhPI". Tematychnyj vypusk "Problemy mehanichnogo pryvodu"* [Bulletin of the NTU "KhPI". Thematic issue Problem of mechanical drive].

- Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2009, no. 19, pp. 43–53.
4. Pavlov A. I. *Sovremennaya teoriya zubchatikh zaceplenij* [The modern theory of gearing]. Kharkov, KhNADUPubl., 2005, 100 p.
 5. Vereš, M., Bošanský, M., Gaduš, J. *Theory of Convex-Concave and plane cylindrical gearing*. STU, Bratislava, Slovakia, 2006. 180 p.
 6. *Dudley's Handbook of Practical Gear Design and Manufacture*. Edited by Stephen P. Radzevich. CRC Pres, 2022. 1144 p.
 7. Chanhoo Choi, Hyoungjong Ahna, Young-jun Park, Geun-ho Leec, Su-chul Kim. Influence of gear tooth addendum and dedendum on the helical gear optimization considering mass, efficiency, and transmission error. *Mechanism and Machine Theory*. Vol. 166, December 2021, no. of article 104476. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0094114X21002342> (accessed 30.05.2022).
 8. M. Rameshkumar, P. Sivakumar, S. Sundaresh and K. Gopinath. Load Sharing Analysis of High- Contact-Ratio Spur Gears in Military Tracked Vehicle Applications. *Gear Technology*, July 2010, pp. 43–50.
 9. Miryam Sanchez, Jose Pedrero, Miguel Pleguezuelos. Tooth-root stress calculation of high transverse contact ratio spur and helical gears. *Mechanism and Machine Theory*. February 2014, vol. 64, no. 2, pp. 93–110.
 10. Predrag S. Dobratic, Mileta R. Ristivojevic. Uticaj parametara cilindricnih zupcastih parova na stepen sprezanja profila zubaca. *Vojnotehnicki glasnik / Military technical courier*. 2014, vol. LXII, no. 3, pp. 80–100.
 11. Milan Rackov. *Optimization of HCR Gearing Geometry from Scuffing Point of View*. PhD Thesis. Bratislava, 2014. 103 p.
 12. Bunakov Ju.N., Ustinenko A.V. Vybor racional'nogo koeficienta vysoty golovki zuba [The choice of a rational addendum factor. Theory of mechanisms and machines]. *Teorija mehanizmov i mashin* [Theory of mechanisms and machines]. 1988, vol. 44, pp. 7–9.
 13. O. Ustynenko, S. Cherelev, M. Bošanský, R. Protasov, O. Bondarenko, N. Levin. Optymal'ne projektuvannja evol'ventnyh cylindrychnykh prjamozubcevyh peredach z pidvyshhenym koeficijentom perekryttja: cil'ova funkciija, zminni projektuvannja ta obmezhennja [Optimal design of involute spur gears with increased contact ratio: objective function, variables planning and constraints]. *Visnyk NTU "KhPI". Serija: "Mashynoznavstvo ta SAPR"* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Engineering and CAD]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2022, no 2, pp. 136–141.
 14. Stanislav Cherelev, Oleksandr Ustynenko, Oleksiy Bondarenko, Roman Protasov, Sergij Andrienko. Matematychna model' optymizacii' zubchastyh peredach iz pidvyshhenym koeficijentom perekryttja [A mathematical model of optimization for gears with increased contact ratio]. *Suchasni problemy modeljuvannja: zb. nauk. prac' MDPU im. B. Khmel'nyc'kogo* [Modern problems of modeling: coll. of science works by MDPU named after B. Khmelnytskyi]. Melitopol, MDPU named after B. Khmelnytskyi Publ., 2023, vol. 25, pp. 226–233.
 15. I. Sobol', D. Asotsky, A. Kreinin, S. Kucherenko. Construction and Comparison of High-Dimensional Sobol' Generators. *Wilmott Journal*, 2011, Nov, pp. 64–79.
 16. *GOST 21354–87. Peredachi zubchatye cilindricheskie jevol'ventnye vneshnego zaceplenija. Raschet na prochnost'* [State Standard 21354-87. Cylindrical evolvent gears of external engagement. Strength calculation]. Moscow, Standarts Publ., 1989. 76 p.
 17. *ISO 6336:2006 Metod B. Calculation of load capacity of spur and helical gears*. 2007.
 18. *GOST 16532–70. Peredachi zubchatye cilindricheskie jevol'ventnye vneshnego zaceplenija. Raschet geometrii* [State Standard 16532–70. Cylindrical involute external gear pairs. Calculation of geometry]. Moscow, Standarts Publ., 1983. 43 p.
 19. Bolotovskij I.A., Gur'ev B.I., Smirnov V.Je., Shenderej B.I. *Cilindricheskie jevol'ventnye zubchatye peredachi vneshnego zaceplenija. Raschet geometrii: Spravochnoe posobie* [Cylindrical involute gears with external engagement. Geometry Calculation: Reference Guide]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1974. 160 p.
 20. H. Reklejtsy, A. Reyvyndran, K. Rjehsdel. *Engineering Optimization*. New York, A Wiley-Interscience Publ., 1983.
 21. Bondarenko O. V., Ustynenko O. V., Serykov V. I. Pryklad racional'nogo proektuvannja zubchastogo cylindrychnogo dvostupinchastogo reduktoru metodom psevdovypadkovogo poshuku pry bagat'oh kryterijah [Example of rational design of toothed cylindrical gears using pseudo-random method search with multiple criteria]. *Visnyk NTU "KhPI". Serija: "Mashynoznavstvo ta SAPR"* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Engineering and CAD]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2018, no. 25 (1301), pp. 31–35.
 22. O. Ustinenko, O. Bondarenko, I. Klochkov, V. Serykov. Multi-criteria optimization of tracked vehicle transmissions. *Proc. of 6th International BAPT Conference Power Transmissions*. 19–22.06.2019, Varna, 1 (2019), pp. 196–199.
 23. Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming: Volume 1: Fundamental Algorithms*. Addison-Wesley Professional, 1997. 672 p.
 24. *Inventor Nastran: CAD-embedded finite element analysis*. Available at: <https://www.autodesk.com/products/inventor-nastran/overview>. Accessed 22 May 2023.
 25. *ANSYS: Engineering Simulation Software*. Available at: <https://www.ansys.com/>. Accessed 22 May 2023.

Надійшла (received) 30.03.2024

Відомості про авторів / About the Authors

Черельов Станіслав Володимирович / Cherelev Stanislav – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-69-01; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2046-3913>; e-mail: s1515@tmm-sapr.org

Устиненко Олександр Віталійович / Ustynenko Oleksandr – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), доцент, старший науковий співробітник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідувач кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; м. Харків, Україна; тел.: (093) 398-33-83; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6714-6122>; e-mail: ustin1964@tmm-sapr.org

Міроslав Бошанскі / Miroslav Bošanský – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), професор, Словацький технічний університет в Братиславі, професор кафедри транспортної техніки та конструювання; м. Братислава, Словаччина; тел.: +421-257-296-426; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0505-2689>; e-mail: miroslav.bosansky@stuba.sk

Протасов Роман Васильович / Protasov Roman – Словацький технічний університет в Братиславі, старший викладач кафедри автомобільної інженерії та конструювання; м. Братислава, Словаччина; тел.: +421-949-352-655; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1611-0610>; e-mail: roman.protasov@stuba.sk

Бондаренко Олексій Вікторович / Bondarenko Oleksiy – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», докторант кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; м. Харків, Україна; тел.: (067) 189-97-00; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2693-5301>; e-mail: avbondko@gmail.com

Андрієнко Сергій Володимирович / Andrienko Sergij – Харківський національний автомобільно-дорожній університет, викладач кафедри інженерної та комп'ютерної графіки; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-37-24; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4310-3128>; e-mail: andrisherjjsv@gmail.com