

*М. М. ТКАЧУК, Н. В. ПІНЧУК, Г. В. ТКАЧУК, І. Є. КЛОЧКОВ, М. А. ТКАЧУК, А. В. ГРАБОВСЬКИЙ, В. І. СЕРИКОВ, І. П. ГРЕЧКА, С. В. КУЦЕНКО, Г. І. ЦИМБАЛ, А. М. КОБА*

## НОВІ ФІЗИЧНІ ЧИННИКИ ЗА КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПРУЖНИХ ТІЛ УЗДОВЖ ПОВЕРХОНЬ БЛИЗЬКОЇ ФОРМИ

У роботі міститься узагальнення та розвиток підходів, моделей та методів дослідження контактної взаємодії складнопрофільних тіл. У випадку контактування уздовж поверхонь близької форми виникає низка проблем. Вони стосуються, по-перше, того, що аналітичні методи при цьому втрачають межі застосовності. По-друге, за малих зазорів між поверхнями контактуючих тіл різко зростає внесок у баланс переміщень деформування проміжних та поверхневих шарів. По-третє, при застосуванні традиційних чисельних методів також різко зростає внесок похибок апроксимації форми контактуючих поверхонь. Усі перелічені чинники викликають необхідність розвитку нових підходів, моделей та методів дослідження контактної взаємодії складнопрофільних тіл. Для цього залучаються варіаційні принципи із застосуванням апарату теорії варіаційних нерівностей та принципу Калькера. Крім того, розроблено новий принцип побудови множини моделей контактної взаємодії складнопрофільних тіл. Він полягає у поступовому нарощуванні кількості фізичних чинників, які враховуються при побудові цих моделей. Це дає можливість формувати послідовність варійованих параметричних моделей, при цьому природним чином удається уникати конфліктних ситуацій при урахуванні нових чинників. Крім того, це забезпечує спадковість у послідовності моделей різного рівня. У кінцевому підсумку забезпечується також визначення чутливості характеристик контактної взаємодії до варіювання тих чи інших параметрів, а також розв'язання задачі обґрунтування раціональної форми контактуючих поверхонь за критеріями міцності. Запропоновані удосконалені підходи, моделі та методи проілюстровані на прикладі дослідження контактної взаємодії тіл із розташованими між ними проміжними шарами.

**Ключові слова:** контактна взаємодія, складнопрофільне тіло, метод скінченних елементів, метод граничних елементів, варіаційний принцип Калькера, варіаційні нерівності

*M. M. TKACHUK, N. PINCHUK, G. TKACHUK, I. KLOCHKOV, M. A. TKACHUK, A. GRABOVSKIY, V. SIERYKOV, I. HRECHKA, S. KUTSENKO, G. CYMBAL, A. KOBA*

## NEW PHYSICAL FACTORS IN CONTACT INTERACTION OF ELASTIC BODIES OVER CLOSELY MATCHED SURFACES

The paper contains generalization and development of approaches, models and research methods for contact interaction of complex shaped bodies. In the case of contact along the surfaces of a close shape there are a number of problems. Firstly, analytical methods are not universally applied. Secondly, with a small gap between the surfaces of the contacting bodies the contribution of the deformation of the intermediate and surface layers to the balance of displacements becomes substantial. Thirdly, the application of traditional numerical methods also sharply increases the contribution of errors in contact surface shape approximation. All these factors bring on the need to develop new approaches, models and methods for the analysis of contact interaction of complex shaped bodies. For this purpose, the apparatus of the theory of variational inequalities is applied to deliver Kalker's variational principle. In addition, a new principle for deriving multiple models of contact interaction of complex shaped bodies has been developed. It consists in gradually increasing the number of physical factors that are taken into account when building these models. This makes it possible to form a sequence of varied parametric models by taking into account new factors while naturally avoiding conflict situations. Furthermore it ensures inheritance in the sequence of models of different levels. The proposed improved approaches, models and methods are illustrated by the case study of the contact interaction of bodies with the intermediate layers located between them.

**Keywords:** contact interaction, complex shaped body, finite element method, boundary element method, Kalker's variational principle, variational inequalities

**Вступ.** На теперішній час у контактній механіці [1] склалася низка проблемних ситуацій. З одного боку, цей розділ механіки має багату історію розвитку. Розроблені потужні моделі та методи дослідження контактної взаємодії пружних тіл. Зокрема, це аналітична модель Герца та її варіанти. Також суттєво розвинені методи граничних інтегральних рівнянь (МГІР) та варіаційні постановки. З іншого боку, набули потужного розвитку чисельні методи типу скінченних (МСЕ) та граничних (МГЕ) елементів.

У результаті створилася «ілюзія» вичерпання будь-яких принципових проблем при аналізі напружено-деформованого стану (НДС) контактуючих тіл. Тобто, на заводі при таких дослідженнях можуть стояти тільки обмеження обчислювальних ресурсів.

Разом із тим інженерна практика формує низку нових тенденцій у проектуванні та виготовленні конструкцій. Так, набувають застосування системи контактуючих тіл зі складними поверхнями. Ці контактуючі поверхні є або номінально конгруентними (співпадаючими), або геометрично близькими. Такі рішення диктуються умовами передачі складних взаємних рухів або значних потужностей.

У результаті втрачають застосовність будь-які

аналітичні моделі типу Герца та їм подібні. Це пояснюється, зокрема, нелокальністю зони контакту та роллю властивостей проміжних або поверхневих шарів між тілами. Разом із тим втрачають застосовність і чисельні методи. Так, стохастичні збурення положень окремих точок на спряжених контактуючих поверхнях можуть призводити до суттєвих похибок у апроксимації розподілу зазору між ними. Відтак, це непередбачуваним чином впливає на розрахований розподіл контактного тиску, який визначається, наприклад, при застосуванні МСЕ.

У кінцевому підсумку, виникає системна проблема, що полягає у неконтрольованій похибці при розрахунку контактних областей та розподілу контактного тиску, а також НДС спряжених тіл. У свою чергу, це спричиняє похибки в оцінці міцності, тертя та зношування. Із практичної ж точки зору це призводить до хибних технічних рішень.

Відповідно, актуальною проблемою є розроблення нових, більш адекватних, комплексних та

© М. М. Ткачук, Н. В. Пінчук, Г. В. Ткачук, І. Є. Клочков, М. А. Ткачук, А. В. Грабовський, В. І. Сериков, І. П. Гречка, С. В. Куценко, Г. І. Цимбал, А. М. Коба, 2022

системних підходів до аналізу напружено-деформованого стану контактуючих складнопрофільних тіл (СПТ) із близькими формами поверхонь. Це становить напрямок досліджень, описаних у цій статті, на розвиток та розширення матеріалів, описаних у [2, 3].

**Аналіз моделей та методів дослідження контактної взаємодії пружних тіл.** Аналіз існуючих моделей та методів дослідження контактної взаємодії складнопрофільних пружних тіл може здійснюватися за багатьма напрямками. Це пояснюється надзвичайною широтою та глибиною проблем контактної механіки [1–5]. У цьому аналізі увага зосереджена на окремих напрямках, які мають суттєве значення для вирішення завдань досліджень, а також створюють проблемні ситуації.

Перший напрямок стосується моделювання умов контактної взаємодії тіл. Традиційна модель Герца [1] базується на поданні цієї взаємодії як контакту двох напівнескінчених параболоїдів. При цьому розподіл початкового зазору між ними описується квадратичною формою  $h(x, y)$  від координат  $Ox, y$ . Тут  $O$  – точка первинного (геометричного) контакту параболоїдів їхніми вершинами, а  $x, y$  – координати у спільній дотичній площині.

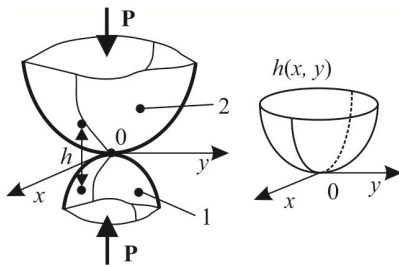


Рисунок 1 – Подання зазору  $h(x, y)$  між контактуючими параболоїдами

Формально квадратична форма за рахунок вибору системи координат може набувати вигляду

$$h(x, y) = \frac{1}{2} Ax^2 + \frac{1}{2} By^2, \quad (1)$$

де  $A = \frac{1}{R_1}$ ,  $B = \frac{1}{R_2}$ , а  $R_1 > 0$ ,  $R_2 > 0$  – головні радіуси кривизни.

Якщо між тілами 1 і 2 діє притискна сила  $P$  (див. рис. 1), то зближення нескінченно віддалених точок тіл  $\delta$ , напівосі еліптичних областей контакту  $a$  і  $b$ , а також розподіл контактної тиску  $p$  мають аналітичні подання [4], зокрема, розподіл контактної тиску має вигляд:

$$p = \frac{3P}{2ab} \cdot \sqrt{1 - (x/a)^2 - (y/b)^2}. \quad (2)$$

Якщо відволіктися від розподілу (1), то функція  $h(x, y)$  буде диктувати особливості розподілу  $p(x, y)$ . Але якщо розмір області контакту набагато менший розмірів тіл 1 і 2, то залишаються справедливими залежності для нормальних переміщень поверхонь тіл 1 і 2 (рис. 2–4):

$$u_{1,2} = \frac{(1 - \nu_{1,2})^2}{\pi E_{1,2}} \int_{(S_{1,2})} \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta, \quad (3)$$

$$\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2},$$

де  $E_1, E_2$  та  $\nu_1, \nu_2$  – відповідно модулі пружності та коефіцієнти Пуассона матеріалів тіл 1 і 2.

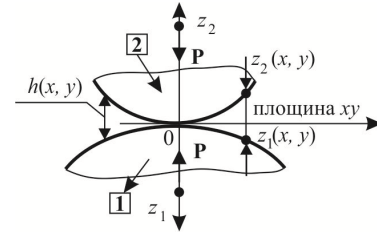


Рисунок 2 – Подання локального зазору між контактуючими тілами [2]

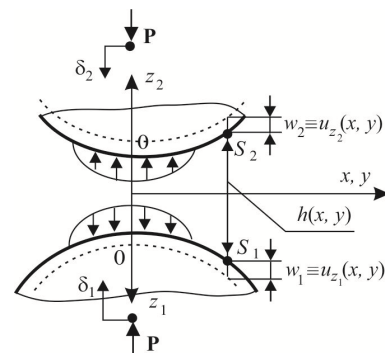


Рисунок 3 – Деформація тіл і утворення контактної площадки під дією нормального зусилля (тіла 1 і 2 умовно рознесені) [2]

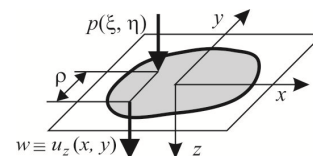


Рисунок 4 – Переміщення границі напівпростору під дією нормальної сили [2]

Тоді можна застосувати співвідношення МГІР

$$\begin{cases} w + h = \delta - \text{у області контакту;} \\ w + h \leq \delta - \text{поза областю контакту,} \end{cases} \quad (4)$$

де  $w = w_1 + w_2 \equiv u_1 + u_2$  – сумарне нормальне зміщення точок тіл 1 і 2.

При цьому для загального вигляду  $h(x, y)$  аналітичних виразів, подібних до (2), побудувати неможливо. Це змушує застосовувати, адаптувати та розвивати різні чисельні методи. Отже, це становить другий напрямок аналізу.

Зокрема, привертає увагу варіант МГЕ для контакту напівнескінчених тіл. Він описаний у роботах [2, 3]. Розглянемо, слідуючи [2, 3], застосування МГЕ при аналізі контактної взаємодії на основі варіаційного формулювання та методу граничних інтегральних рівнянь.

Слід зауважити, що при дослідженні контактної взаємодії СПТ [2, 3] виникає необхідність здійснен-

ня багатоваріантного розв'язання задач аналізу при варіюванні форми і розмірів взаємодіючих тіл. Як там зазначається, при цьому конкуруючими вимогами при розв'язанні одиначної задачі аналізу (значною мірою визначаються методом, обраним для її розв'язання) виступають оперативність і точність. Там же міститься аналіз та виклад початкових співвідношень, моделей та методів аналізу контактної взаємодії гладких та шорстких тіл. Нижче вони наведені у первинній редакції або близькій до неї, оскільки у подальшому у роботі згадані положення використані як базові та відправні при розв'язанні теоретичних основ, розроблених та описаних у ній.

З усього розмаїття існуючих методів аналізу контактної взаємодії розглядаються, зокрема, метод Герца (див. вище) і МСЕ (див. далі). Слідуючи аналізу в [2, 3]: «...Метод Герца значно звужує множину тіл, для яких він дає прийнятну точність розв'язку, однак дає можливість здійснювати досить оперативну оцінку контактної тиску і контактних площадок. Другий застосовний МСЕ забезпечує високу точність моделювання для тіл скінченних розмірів будь-якої форми, однак вимагає великих витрат часу на формування чисельних моделей, особливо для контакту СПТ. Таким чином, за критеріями «точність – оперативність» ці методи нібито рознесені на протилежні краї уявного інтервалу показників «застосовність – ресурсовитратність», умовно позначаючи крайності можливостей за кожним із критеріїв. Компромісним із цієї точки зору видається МГР: він вільний від вимог теорії Герца про первинний точковий контакт тіл і про подання локального зазору у сполученні тіл у вигляді додатно визначеної квадратичної форми від координат (1), які задають точки загальної дотичної площини (що істотно розширює множину тіл, доступних для дослідження їх контактної взаємодії). З іншого боку, на відміну від МСЕ, він оперує з істотно меншими за розмірами дискретними моделями, оскільки знижує на одиницю фізичну розмірність при постановці задачі. Таким чином, для багатьох випадків досліджуваної контактної взаємодії СПТ метод граничних інтегральних рівнянь є альтернативою методу Герца і МСЕ, поєднуючи переваги першого та другого, і будучи позбавлений значною мірою їх недоліків. Тому він може вважатися кращим для розв'язання контактних задач» [2].

Розглянемо модифікацію МГР для дослідження контактної взаємодії гладких і шорстких складнопрофільних тіл, обмежених поверхнями довільної форми. Розв'язання задач здійснюється у наступній послідовності: формування розв'язувальних рівнянь для випадку контакту гладких тіл; узагальнення отриманих співвідношень на випадок шорсткуватих тіл, у т.ч. – з нелінійною характеристикою «переміщення – контактний тиск».

Проаналізуємо модель контактної взаємодії СПТ, слідуючи [2]. При дослідженні контакту гладких тіл із контактуючими поверхнями неузгодженої форми (тобто незбіжних) [2] у першому наближенні за відсутності тертя розглядаються переміщення точок поверхонь і зазор між ними тільки у нормальному напрямку, і на цій основі визначаються кінематичні співвідношення контакту. Таке спрощення моделі нормального контакту базується на нехтуванні зміною напрямку векторів нормалі

поверхонь взаємодіючих тіл [1–3]. Прикладом такої моделі є теорія Герца (відповідно до неї, як зазначалося вище, нормальний зазор між поверхнями наближено є квадратичною формою (1) у локальній системі координат, пов'язаній із точкою початкового дотику тіл).

У більш загальному випадку (рис. 2) притискна сила  $P$  спричиняє зміну зазору між контактуючими тілами. Ця зміна зазору подається у вигляді трансляційної  $\delta_i$  та деформаційної  $u_i$  компонент (рис. 3). Рівняння (4) сумісності переміщень набуває вигляду

$$\begin{cases} u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) = \delta_1 + \delta_2; \\ S_1(x, y), S_2(x, y) - \text{у контакті}; \\ u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) > \delta_1 + \delta_2; \\ S_1(x, y), S_2(x, y) - \text{поза зоною контакту}. \end{cases} \quad (5)$$

При цьому між контактним тиском  $p$  і нормальними переміщеннями точок границі напівпросторів діє відоме інтегральне співвідношення (3) (див. рис. 4):

$$w \equiv u_z(x, y) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \iint_{(s)} \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta, \\ \rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

Тоді

$$u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) = \left( \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \right) \times \\ \times \iint_{(s)} \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta = \frac{1}{\pi E^*} \iint_{(s)} \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta. \quad (6)$$

Тут  $\nu_i$ ,  $E_i$ ,  $i = 1, 2$  – коефіцієнт Пуасона і модуль пружності матеріалу кожного з контактуючих тіл, розподіл тиску  $p(\xi, \eta)$  і контактна площадка  $S$  є невідомими і

шуканими, а  $E^* = \frac{E_1 E_2}{E_2(1 - \nu_1^2) + E_1(1 - \nu_2^2)}$ .

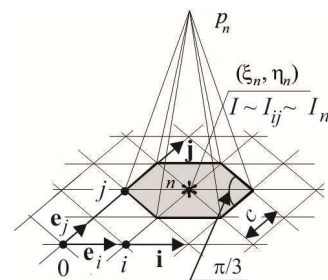


Рисунок 5 – Регулярна трикутна сітка з кроком  $c$  та із вузлами  $(i, j)$  і пірамідальний елемент тиску  $P_n \equiv p_{ij}$  [2]

Як один із варіантів чисельного розв'язання контактної задачі використовується подання шуканого розподілу тиску  $p$  у вигляді комбінації пірамідальних кусково-лінійних функцій  $p_n \equiv p_{ij}$  (рис. 5)

$$p(\xi, \eta) \equiv \sum_n \hat{p}(\xi - \xi_n, \eta - \eta_n) \cdot p_n. \quad \text{Формування розв'язувальних співвідношень здійснено на основі двох наступних підходів:}$$

1) *прямий метод (або метод колокації)*, у якому система формується шляхом запису умов (4) для заданого набору точок колокації;

2) *варіаційний метод (принцип Калькери)*, у рамках якого за дійсні приймаються вузлові значення контактної тиску, що мінімізують функціонал енергії [1, 2, 5–7].

При застосуванні методу колокації маємо:

$$\begin{aligned}
 u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) &= \frac{1}{\pi E^*} \iint_{(S)} \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta = \\
 &= \frac{1}{\pi E^*} \sum_m \iint_{(S_m)} \sum_n \frac{\hat{p}(\xi - \xi_m, \eta - \eta_m)}{\rho(x, y, \xi, \eta)} d\xi d\eta = \\
 &= \left| \begin{array}{l} \xi = c\tilde{\xi}, \eta = c\tilde{\eta} \\ x = c\tilde{x}, y = c\tilde{y} \end{array} \right| = \\
 &= \frac{1}{\pi E^*} c \sum_m \iint_{(S^{(1)})} \frac{\hat{p}^{(1)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \cdot P_m}{\rho(\tilde{x} - \tilde{\xi}_m, \tilde{y} - \tilde{\eta}_m, \tilde{\xi}, \tilde{\eta})} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} = \\
 &= \frac{1}{\pi E^*} c \sum_m w(\tilde{x} - \tilde{\xi}_m, \tilde{y} - \tilde{\eta}_m),
 \end{aligned} \tag{7}$$

де  $w(x, y) = \sum_m \iint_{(S^{(1)})} \frac{\hat{p}^{(1)}(\xi, \eta) \cdot P_m}{\rho} d\xi d\eta$  – «шаблон»

форми розподілу переміщень для одиничного пірамідального елемента (див. рис. 6).

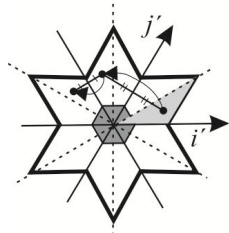


Рисунок 6 – Відображення індексів для обчислення коефіцієнтів «шаблону»

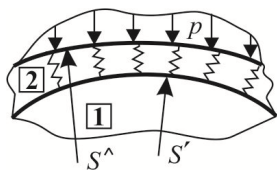


Рисунок 7 – Модель шорсткого складнопрофільного пружного тіла: 1 – пружне гладке тіло  $\Omega'$  ( $S'$  – границя гладкого тіла  $\Omega'$ ); 2 – шорсткий шар  $\Omega^{\wedge}$  ( $S^{\wedge}$  – границя СПТ)

Алгоритми обчислення  $w(x, y)$  можуть бути різноманітними [1, 2, 6]. Зокрема, слідуючи [2], можна для вузлових точок записати (7) у вигляді:

$$\begin{aligned}
 u_n &= u_{z_1}(I_n) + u_{z_2}(I_n) = u_{z_1}(I_{ij}) + u_{z_2}(I_{ij}) = \\
 &= u_{z_1}(x_{ij}, y_{ij}) + u_{z_2}(x_{ij}, y_{ij}) = \\
 &= \frac{1}{\pi E^*} c \sum_{kl} w\left(\frac{x_{ij} - \xi_{kl}}{c}, \frac{y_{ij} - \eta_{kl}}{c}\right) \cdot p_{kl} = \\
 &= \frac{1}{\pi E^*} c \sum_{kl} w(i-k, j-l) \cdot p_{kl} = \sum_m C_{nm} p_m.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Тут фігурують значення матриці коефіцієнтів впливу  $C = (C_{nm})$  для різних розмірів ґратки  $c$ . Для обчислення коефіцієнти впливу  $C_{nm}$  достатньо скористатися тим, що ці коефіцієнти визначаються їх відносним, а не абсолютним, розташуванням:

$$C_{nm} = \frac{c}{\pi E^*} w(i(n) - i(m), j(n) - j(m)).$$

Крім того, важливою властивістю є симетрія пірамідального елемента та базової сітки триангуляції області можливого контакту. Це дає підстави обчислювати значення коефіцієнтів  $W_{ij'}$  тільки у вузькому секторі  $\{i' \geq 0, 0 \leq j' \leq i'\}$  (на рис. 6 – світло-сірий фон). Для довільного  $w_{ij'}$  використовується власна вісь симетрії  $w_{ij'} = w_{j'i'}$ , що графічно відображається відповідністю індексів ( $i', j'$ ), наведених на рис. 6.

Дискретизовані умови контактування набувають вигляду:

$$\begin{cases} \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta = 0, \\ \text{вузол } J_n \text{ – у контакті;} \\ \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta > 0, \\ \text{вузол } J_n \text{ – поза зоною контакту.} \end{cases} \tag{9}$$

де  $\delta = \delta_1 + \delta_2$  – сумарне зближення, а  $h_n = h(x_n, y_n)$  – вузлові значення початкового зазору. Природні вимоги до контактної тиску трансформуються у обмеження:  $p_m \geq 0, m \in J$ ;  $p_m = 0, m \notin J$  ( $J_m$  – індекси вузлів сітки, що належать області контакту). Інша природна інтегральна умова – рівність сумарного зусилля, створюваного контактним тиском, притискному зусиллю:

$$\sum_m \frac{\sqrt{3}c^2}{2} p_m = P.$$

Отже, формується система співвідношень

$$\begin{cases} \sum_{m_c \in N_c} C_{n_c m_c} p_{m_c} - \delta = -h_{n_c}, n_c \in N_c; \\ \sum_{m_c \in N_c} \frac{\sqrt{3}c^2}{2} p_{m_c} = P, \end{cases} \tag{10}$$

що може бути розв'язана за допомогою ітераційної процедури, у ході якої уточнюється множина  $J$ .

Як альтернатива запропонованому підходу використаний варіаційний принцип Калькери [7]. Він полягає у тому, що дійсний розподіл  $p$  доставляє мінімум повної додаткової роботи  $\Phi(p)$

$$\begin{cases} \Phi(p) = \frac{1}{2} \int_{(S)} p(u_{z_1} + u_{z_2}) dS + \int_{(S)} p(h - \delta) dS \rightarrow \min; \\ p(\xi, \eta) \geq 0 \text{ в } S, \end{cases} \tag{11}$$

де  $S$  – область, що покриває область можливого контакту.

Застосування певних квадратурних формул типу

$$\int_S f g dS = 0,5\sqrt{3}c^2 \sum_i f_i g_i$$

призводить до наступної задачі квадратичного програмування:

$$\begin{cases} \Phi_n(\{p_n\}_{n=1}^N) = \frac{\sqrt{3}}{2} c^2 \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N C_{nm} p_n p_m + \\ + \sum_{m=1}^N p_m (h_m - \delta) \rightarrow \min; \quad p_m \geq 0, \quad m = 1, N. \end{cases} \quad (12)$$

Умови мінімуму (12) призводять до систем співвідношень типу (9), (10).

Розширення вихідної постановки задачі про контакт гладких тіл може бути здійснено у багатьох напрямках. Зокрема, для шорстких тіл (рис. 7) можливе застосування різних аналітичних моделей контакту [1, 2, 8]. Так, проста модель типу Вінклера [8]

$$u_z^{\wedge} = \lambda p \quad (13)$$

описує властивості пружного шару з податливістю  $\lambda$ .

Приймаючи модель (13), одержуємо:

$$\begin{cases} \sum_m C_{nm}^{\Sigma} p_m + h_n - \delta = 0, \text{ вузол } J_n \text{ – у контакті;} \\ \sum_m C_{nm}^{\Sigma} p_m + h_n - \delta > 0, \text{ вузол } J_n \text{ – поза зоною контакту.} \end{cases} \quad (14)$$

Тут модифіковані коефіцієнти матриці впливу  $C_{nm}^{\Sigma} = C_{nm} + \lambda \delta_{nm}$  визначаються з урахуванням підсумування «глобальної» податливості гладких тіл (розглядаються як напівпростори) та «локальної» – шару Вінклера, що моделює, наприклад, властивості шорсткості. У підсумку маємо:

$$\begin{cases} \sum_{m \in N_c} C_{n,m}^{\Sigma} p_m - \delta = -h_n, \quad n_c \in N_c; \\ \sum_{m \in N_c} \sqrt{3} c^2 p_m = P. \end{cases} \quad (15)$$

Цю систему співвідношень можна розв'язувати за допомогою процедури ітераційного уточнення області контакту і розподілу контактної тиску [1, 2, 5, 9].

Що стосується проблеми синтезу геометричної форми тіл за умови контактної міцності, то можливе пряме й безпосереднє застосування методів функцій рівня та зануреної границі [10–13] включно із оптимізацією в контактних задачах [14] та методів змінної густини або SIMP (ізотропного суцільного матеріалу без штрафу) [15–17] до задачі про тіла, що контактують. Ці методи передбачають накладання, як правило, багатокрокових ітераційних процедур нелінійного програмування на багатократне розв'язання задач аналізу контактної взаємодії, що теж розв'язується переважно ітераційними методами. Отже, відбувається лавиноподібне нарощування (помноження) ітераційних процедур. Такий традиційний підхід зводить нанівець будь-які зусилля із підвищення ефективності розв'язання задач аналізу. Отже, вкрай необхідним є розроблення нового, альтернативного підходу, у якому передбачалося б об'єднання низки процедур із прозорим фізичним смислом, математичною формалізацією та обчислювальною ефективністю. Якраз це і складає одне із основних завдань цієї роботи (див. нижче).

У роботі [2] описані нові методи і моделі аналізу ко-

тактної взаємодії СПТ тіл із розділюючим їх нелінійно пружним шаром. При цьому, слідуючи цій роботі, можна для випадку контакту виділити два випадки: контакт тіл неузгодженої і узгодженої форм. У першому випадку (див. вище) початковий зазор між тілами подається у вигляді квадратичної форми координат (або іншої функції) у площині, дотичній до точки геометричного контакту тіл (у багатьох випадках може бути застосована модель Герца). У другому випадку має місце збіг (конгруентність) поверхонь контактуючих тіл на деякій ділянці поверхні. У той же час прагнення до поліпшення функціональних властивостей вузлів машин визначає тенденцію проектування деталей з близькими, але не співпадаючими поверхнями. У цьому випадку не застосовні ні модель Герца, ні Штаєрмана, ні інші моделі [1, 2]. Більш того, не завжди контактуючі поверхні можуть бути описані аналітично. Таким чином, на додаток до традиційної класифікації, можна ввести третій тип контактуючих СПТ. Він характерний тим, що локалізація контакту у номінальному вихідному стані або лінійна, або точкова. При цьому величини зазорів, пружних переміщень, зближень за рахунок обтискання проміжних шарів – сумірні. А, значить, незастосовні моделі і методи, що працюють для двох перших випадків за [1, 2]. Цим і визначається досліджуваний у роботі випадок контакту тіл, названих складнопрофільними.

Для розв'язання задачі про контактну взаємодію в одержуваній системі складнопрофільних тіл залучаються 2 підходи. Перший із них заснований на локальному формулюванні задачі про контакт напівнескінчених тіл. Він базується на виконанні умов сумісності нормальних переміщень точок поверхні взаємодіючих тіл (рис. 8):

$$u_v^{(1)} + u_v^{(2)} \leq h, \quad (16)$$

де  $u_v^{(1)}$ ,  $u_v^{(2)}$  – нормальні переміщення точок поверхні тіл 1 і 2 відповідно, а  $h = h_1 + h_2$  – зазор у спряженні контактуючих тіл за нормаллю ( $v^{(1)} = -v^{(2)}$ ).

Подаючи нормальні переміщення точок поверхонь СПТ у вигляді

$$u_v^{(i)} = \delta^{(i)} - w^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (17)$$

де  $\delta^{(i)}$  – зміщення нескінченно віддалених точок тіл 1 і 2, а  $w^{(i)}$  – розподіл прогинів точок границі напівпростору, викликане контактним тиском  $p$ , отримуємо співвідношення, що зв'язує локальне зближення  $w = w^{(1)} + w^{(2)}$ , загальне зближення тіл  $\delta = \delta^{(1)} + \delta^{(2)}$ , розподіл зазору  $h$  і контактний тиск  $p$  (див. рис. 4 та співвідношення (6)):

$$w = \left[ \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right] \int_{(S)} \frac{p(\xi, \eta)}{\rho(x, u, \xi, \eta)} d\xi d\eta \geq \delta - h. \quad (18)$$

Це граничне інтегральне рівняння може бути дискретизоване із застосуванням, наприклад, базисних функцій (див. рис. 5). Тоді система співвідношень набуває вигляду [2] (див. вище):

$$\left\{ \sum_j C_{i,j} p_j = \delta - h_i, \quad p_j \geq 0; \quad \frac{\sqrt{3}}{2} c^2 \sum_i p_i = P, \quad (19) \right.$$

де  $C$  – матриця коефіцієнтів впливу, що визначає переміщення у  $i$ -му вузлі сітки дискретизації при дії тиску  $p_j$  одиничної величини і з розподілом за базисною функцією, що відповідає  $j$ -му вузлу (рис. 5), а  $h_i$  – вузлові зазори. Якщо між контактуючими тілами знаходиться пружний шар із фізично нелінійними характеристиками

$$w^{(i)} = w^{(i)}(p), \quad i = 3, 4, \quad (20)$$

то у співвідношення (19) увійдуть додаткові складові:

$$\sum_j C_{ij} p_j + w_i^{(3)}(p) + w_i^{(4)}(p) = \delta - h_i, \quad (21)$$

де  $w_i^{(3)}(p), w_i^{(4)}(p)$  – додаткові прогини за рахунок деформування шарів на поверхнях контактуючих тіл 1 і 2. Це можуть бути, наприклад, шари шорсткості, для яких справедливі співвідношення [2]

$$w = \lambda p^s. \quad (22)$$

Тут  $\lambda, s$  – параметри, які визначаються мікромеханічними характеристиками шорсткості (середня висота виступів шорсткості  $R_a$ , фізико-механічні характеристики матеріалу і вид механічної обробки поверхні). Ці параметри можуть бути розраховані на основі статистичних мікромеханічних моделей контакту шорстких тіл [8] або з експериментальних даних [18], або із статистичних моделей [19–27].

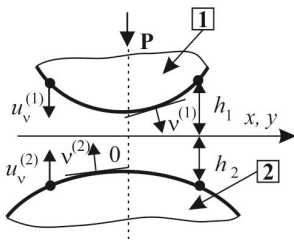


Рисунок 8 – Контактна взаємодія тіл 1 і 2

Отримується у загальному випадку нелінійна система рівнянь і нерівностей, відмінною рисою якої є наявність нелінійних доданків в умовах сумісності переміщень. Ця особливість відрізняє створену модель від традиційних [1], у яких в лівій частині рівнянь і нерівностей (16) присутні тільки лінійні члени. Структурна нелінійність цих співвідношень, яка зумовлена наявністю умов типу нерівностей, доповнюється також і фізичною. При цьому складові, відповідальні за останню, присутні у співвідношеннях, що описують першу. У результаті отримуємо пов'язані нелінійні умови контактної взаємодії, далі в роботі названі структурно-фізичною нелінійністю [2].

Таким чином, застосування локальної постановки дало можливість різко розширити коло досліджуваних об'єктів механіки контактної взаємодії за рахунок включення в цей процес, окрім гладких тіл [1], і тіл із лінійно-пружним шаром на поверхні [2, 3], також і тіл із нелінійно-пружним проміжним шаром між ними. Важливо, що методологія формування розв'язувальної системи рівнянь залишилася в цілому аналогічною, хоча результат – якісно відмінний. Це дає можливість розглядати

випадки контакту гладких тіл і тіл із лінійно-пружним шаром між ними як частинні випадки одержуваних співвідношень.

Для контакту тіл із проміжним шаром розвинено другий підхід, заснований на застосуванні варіаційного принципу Кальєра [7]. Він формується щодо шуканого контактного тиску, тобто (див. вище) фізична розмірність задачі знижується на одиницю. У підсумку, розширивши відоме формулювання принципу Кальєра [7] (див. вище), отримуємо задачу мінімізації функціонала додаткової енергії

$$\Phi(p) = \frac{1}{2} \int_{(S)} p(u_{z_1} + u_{z_2}) dS + \int_{(S)} p(h - \delta) dS + \Phi_n(p) \rightarrow \min \quad (23)$$

на невід'ємному тиску  $p$ . Цей опуклий функціонал складається з суми квадратичної форми тиску і нелінійної частини  $\Phi_n$ , що відповідає нелінійно-пружному шару. Застосування квадратурних формул переводить задачу (23) у матричному записі до вигляду:

$$Cp + D(p) = \delta - h. \quad (24)$$

Тут  $C$  – матриця коефіцієнтів впливу (породжується квадратичною частиною функціоналу),  $D(p)$  – компонента, що породжується нелінійною частиною функціоналу загального вигляду,  $p$  – масив значень контактного тиску у вузлах квадратурних формул, а  $\delta$  і  $h$  – мають той же сенс, що і у (19). При застосуванні певного виду квадратурних формул, як це було показано у [2] (див. вище), отримувані співвідношення (24) для випадку контакту гладких тіл співпадають із співвідношеннями, отриманими у локальній та гранично-інтегральній постановках. У той же час варіаційна постановка дає можливість більш строго обґрунтувати існування, єдиність і збіжність чисельного розв'язку контактної задачі.

Цей підхід має математичну строгість, універсальність та природний перехід до дискретної форми. З іншого боку, порівняно із традиційною скінченно-елементною постановкою (див. далі) різко знижується розмірність масиву шуканих змінних (оскільки як варіювані виступають вузлові значення тиску на сітці, що накинута тільки на поверхню, а не на весь об'єм, який займає СПТ), і у багатьох випадках це дає можливість підняти оперативність розв'язання задач аналізу при збереженні точності одержуваних результатів. Така властивість особливо важлива на перших етапах проектних досліджень, коли потрібне здійснення великого обсягу різноманітних розрахунків НДС СПТ із урахуванням контактної взаємодії.

Метод, заснований на використанні варіаційного принципу Кальєра, природно підходить до застосування у випадку контакту напівнескінчених тіл, деформування яких від дії нормального тиску на поверхні мало відрізняється від деформування пружного напівпростору. Одним із обмежень при цьому є вимога значного перевищення габаритів контактуючого тіла над розмірами плями контакту. У той же час при невиконанні цієї вимоги можна адаптувати запропонований метод, замінивши аналітичний розв'язок задачі Буссінеска для напівпростору на функцію Грі-

на для тіл скінченних розмірів [2]. У дискретному варіанті це означає заміну аналітично обчислюваних компонент матриці коефіцієнтів впливу  $C$  на такі, що визначаються чисельно (наприклад, за допомогою МСЕ). При цьому матриця  $C$  видозмінюється, проте додаткові операції будуть потрібні тільки на етапі формування системи розв'язувальних рівнянь, не зачіпаючи етапи розв'язання, які формують переважну складову загальної обсягу розв'язання задачі.

Отримання розв'язувальних рівнянь типу (24) є тільки початковою частиною поставленої у роботі проблеми. Важливим же компонентом є розробка методів розв'язання цієї системи співвідношень, принциповою відмінністю якої від, наприклад, традиційної системи нелінійних рівнянь, є те, що невідомими є не тільки шукані вузлові змінні, але і склад їх множини, оскільки шуканою є також і область контакту. Таким чином, застосування традиційних методів розв'язання у цьому випадку напряму неприйнятне. З іншого боку, вже існують методи розв'язання подібних задач для гладких тіл і тіл з лінійно-пружними шарами, що продемонстрували працездатність і ефективність [2]. У зв'язку із цим перспективним є розвиток та узагальнення цих методів на досліджуваній випадок. Зокрема, систему (24) можна подати як

$$Cp = \delta - [h + D(p)], \quad (25)$$

що дає можливість організувати ітераційний процес уточнення розв'язку, тракуючи останній доданок у (25) як певний додатковий зазор ( $s = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$\begin{cases} p^{(s+1)} = C^{-1}[\delta - \tilde{h}(p^{(s)})]; \\ \tilde{h}(p^{(s)}) = h + D(p^{(s)}). \end{cases} \quad (26)$$

Співвідношення (26) відображають суть методу додаткових зазорів (МДЗ) [2].

З іншого боку, систему (24) можна подати у вигляді:

$$[C + \lambda^{\wedge}(p)]p = \delta - h, \quad (27)$$

де змінна контактна податливість  $\lambda^{\wedge}(p)$  визначається рівністю

$$\lambda^{\wedge}(p) \cdot p = D(p). \quad (28)$$

Це дає можливість організувати ітераційний процес ( $s = 0, 1, 2, \dots$ )

$$\begin{cases} p^{(s+1)} = [C^{(s)}]^{-1}[\delta - h]; \\ C^{(s)}(p) = C + \lambda^{\wedge}(p^{(s)}). \end{cases} \quad (29)$$

Співвідношення (29) реалізують метод змінних параметрів податливості (МЗПП) [2].

Представлені МДЗ і МЗПП зводять вихідну структурно-фізично нелінійну задачу до послідовності контактних задач для гладких тіл або тіл із лінійно пружним проміжним шаром між ними. Фізичне трактування цих методів полягає у тому, що розв'язок вихідної задачі збігається з розв'язком задачі для контакту гладких тіл зі спеціально підбраною корекцією профілю поверхні (МДЗ) або з вінклеровим шаром зі спеціально підбраною нерівномірною податливістю (МЗПП). Крім цих методів,

можливе застосування, наприклад, процедур, аналогічних методу Ньютона-Рафсона, проте доповнених процедурою корекції множини активних обмежень (тобто тих вузлів, у яких виконуються умови контакту). Також для мінімізації нелінійного функціоналу Калькера на опуклій множині невід'ємного вузлового тиску у роботі [2] запропоновано застосовувати релаксаційні методи, що складаються з реалізації алгоритмів для розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь типу методу послідовної верхньої релаксації (МПВР), доповненою процедурою покрової проєкції поточного наближення розв'язку на обмеження. Запропоновано також нові процедури блочної релаксації з проєкцією [2].

Крім того, у [2] розроблені нові підходи до якісного аналізу і кількісного опису контактної взаємодії СПТ. Відгук картини розподілу контактної тиску на варіювання значущих параметрів, які фігурують у співвідношеннях для опису їх контактної взаємодії, трактується у вигляді двох процесів: зміна форми і розмірів плями (області) контакту, а також зміна форми і розмірів «купола» розподілу тиску, що спирається на цю область контакту. При цьому можна визначити чутливість зміни контрольованих областей і розподілів на варіювання тих чи інших параметрів. У першу чергу, це дає уявлення про тенденції та інтенсивності зміни розв'язку задач аналізу контактної взаємодії при зміні певних величин. Відповідно, визначається множина параметрів, шляхом варіювання якими у першу чергу доцільно оптимізувати розв'язок задач за тим чи іншим критерієм. Для оцінки вкладу в загальний баланс переміщень у контакті СПТ розроблений новий спосіб їх геометричної інтерпретації. Він полягає в тому, що загальне переміщення в кожній точці контакту подається у вигляді суми трьох доданків: *перший* відповідає за переміщення, викликані «глобальною» пружною деформацією гладких СПТ; *другий* породжується локальним обтисканням проміжного шару; *третій* відповідає початковому зазору. Баланс переміщень подається у вигляді точки на одиничній сфері. При зміні параметрів точка на сфері прокреслює характерну траєкторію. Крім поточкових, введена також і аналогічна інтегральна характеристика за всією областю контакту. Таким чином, побудовані нові характеристики, що дають можливість інтерпретувати внесок різних складових у баланс переміщень у контакті СПТ.

У результаті побудована система розв'язувальних співвідношень, які описують структурно-фізичну нелінійність у контакті, а також розроблені методи їх розв'язання, і, крім того, способи аналізу та оцінки зміни отримуваних розв'язків при варіюванні вихідних даних. Створені моделі, методи та засоби складають теоретичні підвалини, які лежать у основі досліджень контактної взаємодії СПТ.

Сформульовані фізично-структурно нелінійні співвідношення, а також розроблені методи їх розв'язання, служать основою для розробки методів розв'язання обернених задач. Зокрема, становить інтерес задача синтезу геометричної форми контактуючих тіл із метою формування заданого розподілу контактної тиску  $p$ . Для цього передбачається використовувати ті ж співвідношення (19), (21) і (24), що і для розв'язання задач аналізу. Дійсно, з формальної точки зору ці співвідношення можна трактувати і як щодо набору шуканих

величин  $(p, \delta)$  при заданих  $(h, P)$ , і – навпаки. Таким чином, вдається на єдиній системі співвідношень будувати як розв’язання задач аналізу, так і синтезу.

У рамках другого напрямку аналізу методів дослідження контактної взаємодії варто визначити потужний апарат теорії варіаційних нерівностей (ТВН) [28, 29]. Ця теорія може бути застосована для розв’язання задач аналізу контактної взаємодії [2, 3]. Як один із варіантів дискретизації при цьому може бути використаний метод скінченних елементів. Із застосуванням ТВН задача може бути зведена до пошуку мінімуму функціоналу повної енергії системи контактуючих тіл на множині полів переміщень, що задовольняють умовам непроникнення у вигляді нерівностей.

Так, у [2] визначається, що постановкою, альтернативною локальній, є варіаційне формулювання контактної задачі. У цьому випадку можна розглянути два найбільш перспективних варіанти. Перший базується на модифікації варіаційного принципу Калькера (див. вище). Другий варіант впливає з постановок задач про контактну взаємодію пружних тіл на основі ТВН [28, 29]. У досліджуваному випадку як таке нелінійне пружне тіло в системі присутній шар, матеріал якого підкоряється, наприклад, закону (22). Перетворивши це співвідношення, контактний тиск  $p$  можна надалі трактувати як напруження в тонкому шарі типу вінклерового, а, відповідно, можна застосувати підхід ТВН, що, як уже зазначалося, зводить вихідну задачу в кінцевому рахунку до мінімізації функціоналу повної внутрішньої енергії досліджуваної системи тіл (включаючи і нелінійний шар):

$$I(u) \rightarrow \min. \quad (30)$$

де  $u$  – множина розподілів переміщень точок взаємодіючих тіл, в т.ч. і нелінійно-пружного шару. Застосовуючи до цього функціоналу (30) процедуру дискретизації, наприклад, за МСЕ, отримуємо у результаті функціонал у вигляді суми квадратичної і лінійної форм, що відповідають за енергію лінійно-пружної частини досліджуваної системи, і нелінійного доданку, відповідного енергії нелінійно-пружного шару:

$$I(u) \approx \frac{1}{2} X^T KX - FX + I^n(X). \quad (31)$$

Процедура лінеаризації отриманого опуклого функціоналу (31) може бути здійснена методами множників Лагранжа, штрафу, застосуванням інших процедур [2] або шляхом прямої лінеаризації із проекцією на множинну обмежень (16). У будь-якому випадку такі відомі методи мають ті загальні недоліки, що як масив шуканих величин (при застосуванні, наприклад, МСЕ) виступають вузлові переміщення всіх вузлів скінченно-елементної сітки взаємодіючих тіл: і в об’ємі, і на поверхні. Таким чином, при застосуванні ітераційних процедур розв’язання задачі потрібне оперування з великими масивами вузлових змінних, у той час як у контактних умовах задіяна тільки та частина вузлових переміщень, яка знаходиться у зоні можливого контакту.

Третій напрямок аналізу стосується моделювання мікроемеханічних властивостей поверхневих шарів матеріалу контактуючих тіл. Ці властивості

(тобто локальне (місцеве) змінання поверхневого шару, наприклад, шорсткості, плівок, напилень тощо) здійснюють суттєвий вплив на контактну взаємодію тіл будь-якої форми. Хоча деформація цих шарів незначна, сама їх присутність викликає, так-би мовити, «фізичну регуляризацию» задачі. Дійсно, із фізичних міркувань неможлива передача нескінченного тиску через поверхневий шар матеріалу (типу вінклерового). Внаслідок цього усуваються особливості у розподілі контактного тиску, навіть у випадку контакту тіл у формі клину. Цей ефект особливо важливий для контакту тіл близької форми, коли «місцеві» (локальні) та «загальні» (глобальні) переміщення точок поверхонь є співмірними.

Якщо розглянути зазначений напрямок більш детально, то для визначення напрямків досліджень у роботі [2] розглядається сучасний стан методів дослідження контактної взаємодії елементів машинобудівних конструкцій складної геометричної форми, у т.ч. – у розрізі та із урахуванням мікроемеханіки поверхневих та проміжних шарів. Як уже зазначалося вище, поверхні реальних тіл на мікроскопічному рівні не є ідеально гладкими, а мають випадковий профіль, що складається з опуклостей і западин. Це означає, що при первинному контакті стикання відбудеться не на всій номінальній поверхні, а лише на її малій частині, яка буде збільшуватися в міру зростання притискного зусилля у певному зв’язку із деформаціями мікронерівностей. Урахування впливу шорсткості на характер контактної взаємодії є фундаментальним завданням, яке, незважаючи на істотний прогрес декількох поколінь дослідників за тривалу історію, далеко від повного вирішення.

Перші спроби побудувати модель контакту шорстких тіл пов’язані із застосуванням теорії Герца до окремих вершин нерівностей. Однак отримані таким чином теоретичні оцінки не узгоджувалися із експериментально встановленим законом пропорційності між величиною притискного зусилля  $P$  і площею плями контакту  $A$ . Протириччя, на яке вказав Дж. Арчард [30], полягало в тому, що з ростом навантаження не тільки збільшується площа існуючих контактних майданчиків, а й виникають нові. Ним було запропоновано наближення, згідно з яким на нерівностях розташовуються мікронерівності, на яких у свою чергу присутні ще менші мікронерівності. Така модель зі зростанням числа ступенів збільшення у граничному значенні давала шукану пропорційність.

Наступні уточнення теорії шорсткого контакту мали на меті отримання не тільки якісно вірних, а й кількісно точних оцінок поведінки. Для цього були задіяні методи статистичного осереднення. Вичерпна теорія, що описує статистичні властивості випадкових поверхонь, запропонована в роботі [23]. Однак ще до її появи Грінвуд і Вільямсон розробили модель контакту, засновану на спрощених припущеннях щодо розподілу характеристик нерівностей [31]. Зокрема, їхня форма була прийнята сферичною, так що при навантаженні контакт здійснюється на кругових областях, а кривизна – постійна для всіх вершин незалежно від висоти. Із використанням співвідношень теорії Герца для всіх нерівностей та осередненням одержуваних випадкових величин були обчислені значення дійсної площі контакту і повного зусилля, що передається через мікронерівності, як функції середнього зазору між поверхнями. Отримані спів-



відношення містили в собі наступні параметри: щільність вершин, середню кривизну шорсткостей та середньоквадратичне відхилення передбачуваного гауссового розподілу висот нерівностей.

Теорія Грінвуда-Вільямсона допускає великі можливості для уточнення, зокрема, щодо геометричних властивостей випадкових поверхонь. Так, на розвиток цієї моделі враховується випадковий розподіл кривизни вершин нерівностей. У подальшому окремі положення моделі були переглянуті як самим Грінвудом [32], так і багатьма іншими авторами. Так, Маккул [33] запропонував використовувати двопараметричний розподіл Вейбулла для опису висот нерівностей. В оригінальній теорії Грінвуда-Вільямсона контакт окремих нерівностей враховувався незалежно. У роботах М. Чіаварелла [19, 20] було враховано взаємний вплив від деформацій, викликаних прикладанням контактних зусиль у сусідніх вершинах. Окремі моделі містять режим пластичних деформацій. Їх наявність зазвичай заперечується тим, що нерівності не збільшують значення максимального контактного тиску відносно середнього значення настільки сильно, щоб це призводило до істотних пластичних деформацій. Крім того, навіть у разі їх виникнення, є всі підстави вважати, що всі наступні навантаження після декількох циклів змінання найбільш навантажених ділянок поверхні відбуватимуться пружно.

Надалі розвиток теорії шорсткого контакту пов'язаний із фрактальною природою геометрії тіл. Результати теоретичних досліджень [27, 34, 35] продемонстрували значимість впливу масштабного ефекту топографії поверхонь на прогнозовану контактну поведінку. Чим більше деталей фрактальної поверхні враховуються на все більш дрібному масштабі, тим більше контактна пляма дробиться на кластери мікроконтактів. При цьому у граничному значенні для самоподібної поверхні їх кількість прямує до нескінченності, при цьому повна площа контакту зменшується до нуля. Однак реальні системи характеризуються скінченними нижньою і верхньою границею масштабів нерівностей, і, відповідно, вони є ключовими характеристиками випадкової топографії. Ці висновки підтверджуються численними дослідженнями [25, 26, 36], у тому числі проведеними за допомогою чисельного моделювання.

Перссон розробив детальну модель, у якій обґрунтував обернено-потенціальну залежність значення контактного тиску від величини середнього зазору між притискуваними поверхнями [19]. Така поведінка очікується при помірному притисненні поверхонь, коли зближення призводить до розвитку контакту на великому числі вершин нерівностей, але далеко від встановлення повного контакту. Для перевірки основних положень цієї теорії були проведено чисельне моделювання, яке підтвердило якісно і в загальному випадку також кількісно основні оцінки [21].

Ще однією величиною, що відображає властивості шорсткого контакту, є контактна жорсткість. Як показав Барбер [25], запропонувавши пряму аналогію між задачею пружного контакту і електричною провідністю, вона безпосередньо пов'язана з опором контактуючих тіл [22, 31]. Відповідно до теорії Грінвуда-Вільямсона, так само як і теорії Перссона, контактна жорсткість прямо пропорційна притисковому зусиллю. Однак у низці інших досліджень вказується степенева залежність з показником від

0.5 до одиниці [24, 37, 38]. Ключовим параметром, що впливає на точне його значення, є фрактальна розмірність поверхні, що знайшло вираження в аналітичній оцінці, запропонованій Портом і Поповим [39, 40]. У роботі [41] відзначається, що ця залежність, яка прогнозує показник, менший одиниці, справедлива лише за малих розмірів систем, де значущим є лише найвища нерівність із фрактальним профілем. В інших же випадках, коли у контакт вступає статистично значимий ансамбль нерівностей на великій площі, виконується лінійний закон, що передбачається класичними теоріями.

Порт і Попов в роботі [42] розглянули контактну жорсткість. Для цієї величини герцевському закону зміни з зусиллям передують фрактальний режим, аналогічний поведінці номінально плоских шорстких тіл. При цьому цей перехід відбувається за значно меншого навантаження, ніж те, яке потрібно для встановлення суцільної герцевської плями контакту.

Отже, можна зазначити, що існує значна кількість теоретично, чисельно та експериментально визначених моделей для опису властивостей поверхневих шарів контактуючих тіл. Застосування тих чи інших залежностей визначається конкретними умовами.

Дійсно, як уже відзначалося, поверхні деталей механізмів і машин не є абсолютно гладкими. Їхній мікрорельєф (рис. 9) дає декілька складових. По-перше, на цей мікрорельєф чинить вплив структура зерен та міжзеренного простору (для кристалічних матеріалів) або міжкомпонентні (аж до масштабу міжмакромолекулярних) зв'язки (для аморфних, композиційних матеріалів). По-друге, суттєвим є вплив інструменту та режимів обробки поверхонь при виготовленні деталей, у т.ч. – механічної, тиском або литтям. При цьому важливими є способи модифікації поверхневих шарів матеріалів (термообробка, хіміко-термічна обробка, напилення, пластичне деформування поверхневих шарів, нанесення тонких плівок тощо). По-третє, важливу роль відіграють залишкові напруження, що також впливають на властивості приповерхневих шарів деталей машинобудівних конструкцій. Ці напруження виникають внаслідок дій технологічних чинників, які на шаруються у процесі виготовлення деталей. Таким чином, у підсумку приповерхневі шари деталей машинобудівних конструкцій набувають форм і фізико-механічних властивостей, відмінних від основного матеріалу. Це чітко прослідковується, наприклад, на прикладі мікрорельєфу (див. рис. 9, 10). Він має стохастичний характер розподілу висоти мікронерівностей. Для опису цього розподілу вводяться осереднені характеристики, наприклад, – середнє відхилення від умовного номінального рівня. Крок мікронерівностей (у координатах поверхні деталі) – від  $10^{-6}$  до  $8 \cdot 10^{-3}$  м, їхня висота – від  $3 \cdot 10^{-8}$  до  $3 \cdot 10^{-4}$  м [43]. Базова довжина, тобто та довжина, на якій визначаються статистичні показники мікрорельєфу, складає  $8 \pm 22 \cdot 10^{-3}$  м залежно від класу чистоти обробки деталей. Якщо крок періодичних нерівностей перевищує цей розмір, то їх відносять до хвилястостей. Одиничні ж відхилення від номінальної форми є макровідхиленнями. На рис. 11 умовно показані співвідношення мікронерівностей, які характеризують шорсткість, хвилястості та макровідхилення.

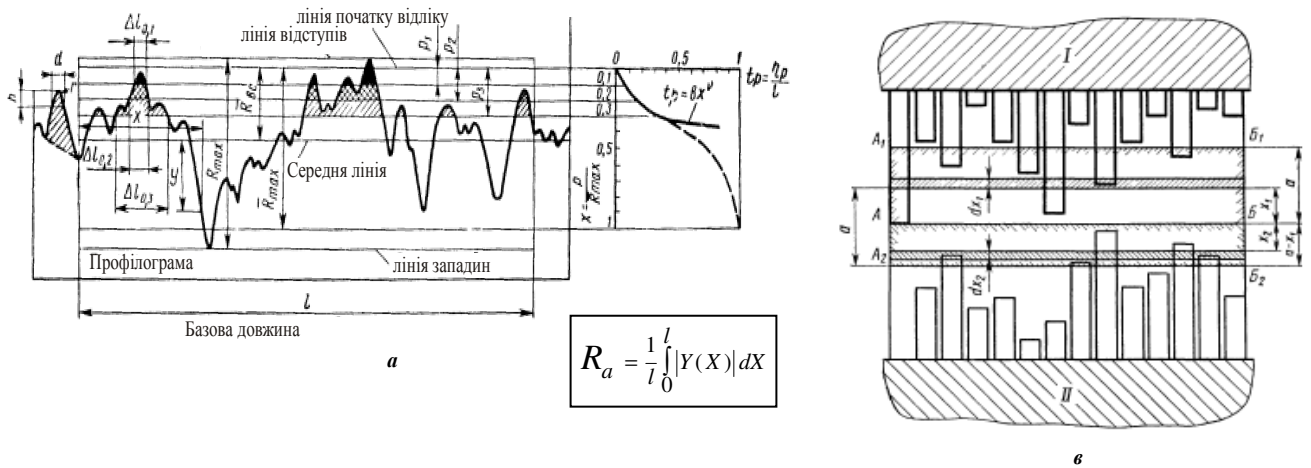


Рисунок 9 – Приклади мікрорельєфу [2, 43]:  
 а – ділянка профілограми; б – основна розрахункова схема контакту ідеально гладкої та шорсткуватої поверхні із сферичними нерівностями (а – вихідне положення; б – після прикладання притискувальної сили);  
 в – контакт двох шорсткуватих тіл (стержнева модель)

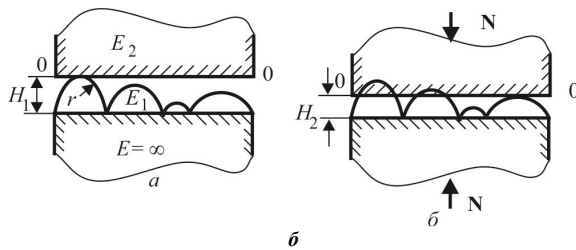


Рисунок 10 – Приклади моделей шорсткості (геометрична модель):  
 а – двох шорстких поверхонь; б – гладкої та «еквівалентної» шорсткої поверхонь [1]

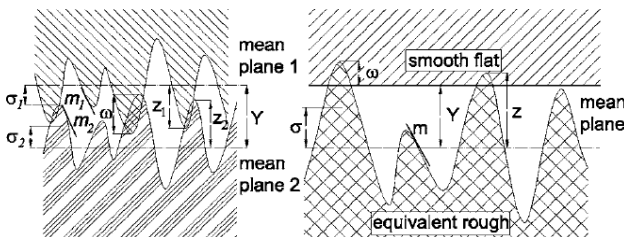


Рисунок 11 – Профіль поверхні деталі:  
 1 – макровідхилення; 2 – хвилястість; 3 – шорсткість [2]

Крім особливостей геометричної форми, приповерхневі шари матеріалу тієї чи іншої деталі мають також фізико-механічні властивості, відмінні від властивостей матеріалу у глибині деталі. Це викликане не тільки мікроструктурою цих шарів, але й сукупною дією чинників, які впливають на ці приповерхневі шари при виготовленні (див. вище), а також в умовах реальної експлуатації. Крім того, із функціональних вимог між контактуючими тілами часто розміщують прокладки, плівки, шари – тобто тонкі деталі із відповідними характеристиками.

Таким чином, з точки зору контактної механіки маємо взаємодію не гладких тіл, а тіл із нанесеними або привнесеними проміжними шарами. Фізично це призводить до того, що замість номінальної площі контакту (як для гладких тіл), до розгляду вводиться фактична площа контакту (тобто сукупність контактних зон мікронерівностей). Крім того, хвилястість формує кластери фактичних площадок контакту,

сукупність яких є контурною площею контакту.

Для моделювання контактної взаємодії шорстких (шорсткуватих) тіл прямий опис усіх перелічених чинників незастосовний, оскільки це призводить до занадто громіздких та неефективних із точки зору, наприклад, чисельного дослідження моделей. З іншого боку, з огляду на слабкий взаємний вплив деформування окремих мікронерівностей, їх можна подати у вигляді псевдошару, віднісши усі характеристики мікрорельєфу до фізико-механічних властивостей матеріалу цього шару. При цьому, як правило, такі моделі описують місцеві деформації такого псевдошару, тобто силовий розподілений вплив викликає у цьому шарі тільки місцеві (локальні) його деформації. Така модель вперше до розгляду була запропонована І. Я. Штаерманом [1]. Особливостями такого шару, на відміну від основи Вінклера, є: нормальний тиск на зовнішню його поверхню спричиняє не тільки «локальну» деформацію шару, але й передається на глибинні шари тіла, спричиняючи «глобальну» деформацію усього тіла; у загальному випадку залежність прогинів (локальних переміщень точок зовнішньої поверхні шару, умовно зафіксованих на внутрішній його поверхні) має нелінійний характер відносно нормального тиску  $p$

$$w = w(p), \tag{32}$$

яка у багатьох випадках [44] замінюється лінійною залежністю

$$w = \lambda p, \quad p = c^v w, \tag{33}$$

де  $\lambda, c^v$  – так звані контактна податливість та жорсткість відповідно.

У підсумку слід визнати, що подальші дослідження контактної взаємодії шорсткуватих тіл залежать від типу моделі, яка пов'язує мікроструктурні властивості приповерхневих шарів матеріалів деталей, із одного боку, та моделей місцевої (локальної) деформації (32), (33), – з іншого. На цьому рубежі

здійснюється перехід від мікро- до макромеханіки контактної взаємодії.

Як уже було зазначено, для опису властивостей шарів шорсткості застосовуються різноманітні моделі. Вони досягли на сьогодні значного прогресу, проте не втратили застосовності також і традиційні підходи, які базуються або на спрощених моделях, або на емпіричних даних. Перші з них оперують, наприклад, певними геометричними формами мікронерівностей, розміри яких мають деякий статистичний розподіл у площині контакту. Так, у [1] розглядається синусоїдальний розподіл мікрорельєфу. Крім того, досліджуються також моделі мікронерівностей, що подаються простими геометричними фігурами (сфери, піраміди, конуси, стержні тощо). При цьому контактна взаємодія кожної пари мікронерівностей описується, як правило, деякою аналітичною залежністю, наприклад, моделлю Герца. Так, отримали розповсюдження стержнева модель Крагельського, еліпсоїдальна, двопараметрична модель Дьомкіна. Серед емпіричних можна виділити модель, яка описана у [45], де запропонована ступенева залежність

$$w = cp^m, \quad (34)$$

де  $c$ ,  $m$  – параметри, що залежать від матеріалу деталі, мікрорельєфу його поверхні та технологічної операції обробки [8].

Слід зазначити також, що нормальний контакт, як правило, не можна відділити від процесів тертя і зношування, які супроводжують експлуатацію деталей машин. Таким чином, формується взаємозв'язок та взаємовплив наступних чинників: розподіл контактного навантаження; мікрорельєф та властивості приповерхневих шарів деталей; розподіл контактного тиску та взаємних зміщень точок поверхонь спряжених СПТ; тертя на контактуючих поверхнях; зношування поверхневих шарів контактуючих деталей. Усі ці чинники знаходяться, так би мовити, у постійному «динамічному» взаємозв'язку та взаємовпливі. Дійсно, контактне навантаження розподіляється між тілами під впливом властивостей поверхневих шарів, викликаючи певний розподіл тиску. У свою чергу, тиск впливає на сили тертя, а ті – на зношування, яке тепер уже у свою чергу – на величину та розподіл навантаження, а також на мікроструктуру і властивості поверхневих шарів матеріалу. Частина перелічених чинників та виявлених при цьому залежностей описані, зокрема, у роботах [18, 45–49]. Так, мікроструктурні включення на поверхнях контактуючих тіл у вигляді виїмок також може мати ефект не лише на розподіл контактного тиску, але і на електричне поле у випадку п'єзоелектричних матеріалів. Дії пов'язаних електромеханічних сил перешкоджають утворенню повного контакту, що вимагає більш істотного притискного зусилля для закриття утвореного зазору. Крім того, параметри шорсткості можуть бути запрограмовані з метою отримання бажаної поведінки поверхонь за контакту. Для цього в роботі запропоновано відповідний метод оптимізації, побудований на аналогії між генетичною інформацією та випадковою шорсткістю.

Шорсткість також істотно впливає на адгезійні властивості поверхонь. Останнім часом значну увагу

приділено дослідженню різних моделей адгезійного контакту, огляд сучасних напрямків можна знайти в [50]. Зокрема, було переглянуто та доповнено класичну теорію Фюллера-Табора відносно оцінки параметра адгезії поверхонь, шорсткість яких вписується в модель Наяка [51]. У роботі [52] аналізується анізотропія адгезії за присутності дотичних зусиль, задля опису якої застосовуються співвідношення механіки крихкого руйнування. У роботі [49] запропонована дуже проста модель адгезійної взаємодії твердого тіла із тонким еластичним покриттям. На основі методу енергетичного балансу запропоновано критерій відокремлення індентора від субстрату. У роботі [48] запропоновано ефективну оцінку впливу шорсткості поверхні на залежність величини відокремлення між поверхнями від адгезійного зусилля за широким спектром випадкового розподілу профілю шорсткості. Широкого застосування у [48] отримали варіанти МГЕ на базі швидкого перетворення Фур'є. Огляд наукових успіхів в області моделювання трибологічних властивостей на мікро- та макрорівнях міститься у нещодавній спільній праці дослідницької спільноти [46].

Останнім часом багато уваги приділяють контактним задачам для функціонально-градієнтних матеріалів, які розв'язують у термопружній постановці [53], умовах адгезійної взаємодії [54], ортотропних тіл [55] тощо.

Так, у роботі [56] у стандартну модель Джонсона-Кендалла-Робертса було внесено урахування додаткового двовісного розтягу одного з тіл. Вплив зміни геометрії на величину сили відриву досліджено в роботі [57]. Також істотний вплив на контактну поведінку тіл має в'язкопружне деформування матеріалів, про що свідчать результати досліджень, описані у [58–60].

Також слід зазначити, що важливими для контактної взаємодії є термомеханічні деформації. Вони можуть призводити до відносного ковзання за нормального контакту ідентичних тіл [61].

Підводячи підсумки, можна на основі аналізу описаного матеріалу обґрунтувати наступні висновки.

1. Натепер відсутні універсальні моделі для урахування властивостей приповерхневих шарів деталей машинобудівних конструкцій, які би коректно врахували усі значущі чинники.

2. Існує велика кількість моделей, що пов'язують мікро- та макромеханічні властивості поверхневих шарів матеріалів; у загальному випадку вони, як правило, пов'язують місцеві (локальні) деформації проміжних шарів із контактним тиском.

3. Основною перешкодою до моделювання реальних процесів і станів при контактній взаємодії СПТ є відсутність достатньо універсальної математичної моделі, яка б пов'язувала «локальні» та «глобальні» деформативні властивості поверхневих шарів контактуючих тіл, причому із урахуванням варіативності цих властивостей та їх залежності від історії навантаження.

4. Відсутні математичні моделі, які би пов'язували властивості мікроструктури поверхневих шарів, з одного боку, та форми деталей, – з іншого; отже, так би мовити, не збудовані зв'язки мікро- та макрогеометричних параметрів контактуючих деталей, а, відповідно, складно дослідити їх взаємний вплив.

5. Натепер відсутні математичні моделі, які би пов'язували усі значущі чинники у єдиній розв'язувальній системі співвідношень для розв'язання задач синтезу геометричної форми контактуючих поверхонь складнопрофільних тіл та властивостей проміжних шарів (шорсткості, плівок, напилень тощо) за критеріями міцності, довговічності, працездатності деталей машинобудівних конструкцій.

У той же час для частинних випадків вдається побудувати достатньо адекватні моделі, що описують фізико-механічні властивості приповерхневих шарів контактуючих тіл (типу (32)–(34)). Отже, принциповою проблемою є якраз побудова моделей та методів розв'язання співвідношень, які поєднують мікро- та макромеханічні властивості поверхневих шарів та усього об'єму контактуючих тіл. Ця обставина формує одну із задач досліджень, тобто створення такої системи співвідношень, яка відповідає природним потребам досліджень, а також методів їх розв'язання.

Четвертий напрямок аналізу стосується методів моделювання геометричної форми поверхонь контактуючих тіл на макорівні. Відповідно, це відображається у моделях початкового (геометричного) контакту між тілами. Традиційні підходи контактної механіки полягають у розгляді контакту гладких тіл, поверхні яких або частково співпадають (так званий «узгоджений» контакт [1]), або зазор між ними описується степеневою функцією двох змінних у координатах точок площини, дотичної до точки початкового контакту («неузгоджений» контакт). У багатьох випадках такі підходи допустимі для первинного аналізу напружено-деформованого стану. Проте, з одного боку, прагнення реалізувати складні взаємні рухи призводить до формування складних поверхонь контактуючих тіл, які не можуть бути описані навіть локально поверхнями другого порядку. Це, зокрема, поверхні двопараметричних, еволютивних та інших зубчастих передач, фасонні кулачки механізмів двигунів внутрішнього згоряння, модифіковані поверхні підшипників та профільовані бічні поверхні їхніх поршнів [2].

Прагнення знизити рівень контактних навантажень призводить до тенденції зближення поверхонь контактуючих тіл на якомога більшій площі. Отже, зазор між контактуючими поверхнями не тільки не може бути задовільно описаний деякою апроксимаційною поверхнею другого порядку, але й стає сумірним із нормальними переміщеннями точок поверхонь контактуючих тіл та приповерхневих шарів на всій площі можливого контакту. Окрім того, розміри поверхонь можливого контакту сумірні із розмірами контактуючих тіл. Таким чином, порушуються основні гіпотези, у рамках яких базуються традиційні моделі контактної взаємодії.

Отже, на розвиток традиційних постановок свого часу були розглянуті випадки, що є розширенням класичних постановок. Так, у роботах [1, 2, 45] множина функцій, якими описується зазор  $\Phi$  між поверхнями контактуючих тіл, був розповсюджений на степеневі функції радіальної координати  $r$  їхніх точок у дотичній площині  $\Phi(r) = Ar^{2n}$ , де  $n$  – натуральне число, а  $A$  – деякий коефіцієнт. Тут перемі-

щення штампа –

$$\delta_0 = \left( \frac{\pi \vartheta}{2} P \right)^{\frac{2n}{2n+1}} \left[ \frac{A(2n)!!(2n+1)^{2n}}{(2n-1)!!(2n)^{2n}} \right]^{\frac{1}{2n+1}}$$

(випадок двох пружних тіл може бути зведений до проникнення штампа із профілем  $\Phi(r)$  у пружний

напівпростір) [45], притискне зусилля –  $P$ ,  $\bar{v} = \frac{1-v^2}{\pi E}$ .

Тоді радіус контактної області визначається як [45]

$$a = \left( \frac{\pi \vartheta}{2} \right)^{\frac{1}{2n+1}} \left[ \frac{(2n+1)!!}{2An(2n)!!} P \right]^{\frac{1}{2n+1}},$$

розподіл тиску підпорядковується формулі

$$q(r) = \left( \frac{1}{\pi^2 \vartheta} \right) \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot 2nAa^{2n-1} S_n \left( \frac{r}{a} \right) \cdot \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}, \quad (35)$$

де поліноми Штаермана  $S_n$  визначаються за формулою [45]

$$S_n(\rho) = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \left[ \rho^{2n-2} + \frac{1}{2} \rho^{2n-4} + \frac{3}{2 \cdot 4} \rho^{2n-4} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{(2n-5)!!}{(2n-4)!!} \rho^2 + \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \right].$$

Зокрема, тиск у центрі кругової області контакту має значення

$$q(0) = \left( \frac{1}{\pi^2 \vartheta} \right) \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot Aa^{2n-1} = \frac{P}{\pi a^2} \cdot \frac{2n+1}{2(2n-1)}$$

при середньому тиску  $q_0 = \frac{P}{\pi a^2}$ . Відповідно, (35)

набуває вигляду [45]

$$q(r) = \frac{2n+1}{2} q_0 S_n \left( \frac{r}{a} \right) \cdot \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}.$$

Як зазначається у [1, 45], при  $n \geq 2$  тиск у центрі контактної площадки  $P(0)$  стає меншим середнього тиску  $q_0$ . При цьому максимум контактного тиску переміщується від центру до периферії області контакту.

Крім того, у низці робіт [1, 2, 45] визначено розв'язки форми зазору у вигляді степеневого ряду або зі скругленими кромками штампу. Також визначається тиск для форми зазору у вигляді [1, 45]

$\Phi(r) = Ar^\lambda$ , де  $\lambda$  – довільне, не обов'язково ціле, число.

Перевагою аналітичних розв'язків [1, 45] є можливість оперативного якісного та кількісного аналізу впливу окремих параметрів на розподіл контактного тиску. Разом із цим для довільного розподілу зазору між контактуючими тілами необхідно залучати більш загальні підходи. Наприклад, для цього застосовні варіаційні формулювання. При цьому досягається

більш висока універсальність, але, разом із тим, втрачається оперативність та наочність.

Більш високий ступінь універсальності, для прикладу, на основі теорії варіаційних нерівностей, дає можливість урахування різних чинників, у т.ч. – нелінійних фізико-механічних властивостей матеріалу. Разом із тим при дискретизації задачі методом скінченних елементів велику роль для випадку контакту тіл їх майже конгруентними поверхнями починають відігравати похибки апроксимації форми зазору. Крім того, виникають проблеми із урахування різних додаткових чинників. Таким чином, потрібні альтернативні постановки.

Одним із чинників, які потрібно урахувати у першу чергу, є шорсткість поверхонь реальних деталей. Моделі шорсткості мають різну фізичну основу та математичне формулювання (див. вище). Зокрема [45], враховуються шорсткість, субшорсткість, хвилястість. Також розрізняють номінальну, фактичну і контурну площі контакту. Відповідно, визначаються за різними моделями мікронерівностей (стержнева, сферична, параболоїдна, стохастична, фрактальна) залежності між зближенням між шорсткуватими поверхнями та контурним тиском. Ці моделі мають застосування та розвиток також у низці робіт [21, 22]. Проте наявний арсенал моделей та методів не вичерпує усієї множини задач, доступних до розв'язання із їх залученням. Це стосується, у першу чергу, відсутності універсальних формулювань для генерування розв'язувальних співвідношень аналізу контактної взаємодії тіл із урахуванням різних чинників, а, крім того, механізмів інденатації мікромеханічних моделей властивостей поверхневих і проміжних шарів у ці співвідношення та урахування їх залежності від історії навантаження. Разом із тим певні формулювання природним чином адаптовані до розвитку у напрямках, що становлять інтерес. Так, варіаційні принципи, які можуть бути сформовані на розвиток принципу Калькера, мають певну універсальність щодо властивостей контактуючих тіл. Це дає змогу, використовуючи принцип Калькера як початкове «ядро», нарощувати його за рахунок доданків, у яких зосереджені різні характерні властивості тих чи інших досліджуваних об'єктів. Це уможливило урахування нелінійних властивостей поверхневих шарів матеріалів тіл, які піддані технологічним операціям зміцнення, напилення, термообробки тощо. Вплив цих ефектів є суттєвим, тому потрібно розробляти фізично адекватні та математично строгі моделі, які передбачають, зокрема, залежність поведінки матеріалів досліджуваних об'єктів від історії навантаження. Проте на сьогодні такі розробки, які повною мірою націлені на перелічені проблемні аспекти, у літературі відсутні. Отже, склалося протиріччя між потребами практики промислового виробництва у нових методах і моделях аналізу контактної взаємодії та можливостями механіки. На протигагу існуючим розробкам, авторські підходи [2, 3] продемонстрували суттєвий прогрес у напрямку розвитку моделей та методів аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл.

Разом із тим, окрім шорсткості, існує ще велика група інших чинників, які впливають на контактну

жорсткість приповерхневих шарів, зокрема, технологічного походження. Це і різні види зміцнення (дискретне, континуальне, комбіноване), і напилення, і плівки, а також різні варіанти термохімічного та механічного впливів на поверхні відповідальних деталей машин. Якраз ці особливості не мають засобів інтеграції моделей їхніх властивостей у загальні моделі контактної взаємодії. У випадку складнопрофільних тіл із контактуючими поверхнями близької форми приходимо до ситуації контакту СПТ із малим зазором та проміжним шаром зі складним законом поведінки. Її аналіз на основі існуючих підходів, методів та моделей неможливий. У результаті виникає проблема аналізу контактної взаємодії системи СПТ із фізично нелінійним шаром. При цьому виокремлюються два пласти проблеми (див. вище). Перший – мікромеханічний рівень. Він передбачає дослідження мікрооб'єму випадкового профілю мікронерівностей у контакті із спряженим. Інший пласт – макромеханічний. Він якраз формує і рівень, і розподіл навантажень між складнопрофільними тілами. Разом із тим цей розподіл залежить від властивостей, сформованих на мікрорівні. У підсумку приходимо до проблем контактної взаємодії СПТ, яка поєднує два рівні (мікро- та макро-). Основна нова методологічна проблема при цьому – поєднання цих різнорівневих підмоделей. Інша сторона проблеми – урахування ефекту впливу нелінійності залежності зминання поверхневого шару від контактного тиску. І, нарешті, основним аспектом проблеми є відсутність методів розв'язання сформованої системи рівнянь та нерівностей.

Вирішення всіх перерахованих проблемних питань повною мірою та у завершеному вигляді дотепер відсутнє. У свою чергу, потреби практики у розробці методів розв'язання описаного типу задач переоцінити важко. Ці потреби спонукають подальший розвиток нових розробок у механіці задля вирішення масштабної науково-практичної проблеми, яка полягає в розробці і реалізації методів розв'язання фізично і структурно нелінійних задач визначення НДС та контактної взаємодії для забезпечення конструкційної міцності складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій. Це особливо важливо із огляду на те, що подібні елементи зазвичай є тими, що в основному визначають технічні характеристики машин.

При цьому слід зазначити, що відмова від будь-якої спрощуючої гіпотези призводить до неадекватних результатів при застосуванні традиційних моделей. У випадку ж, що розглядається у роботі, усі традиційні гіпотези контактної механіки у повному обсязі не працюють, отже, потрібні принципово нові підходи до побудови моделей контактної взаємодії та методів розв'язання створюваної системи співвідношень. А це спонукає до вирішення цих проблемних питань, оскільки вони стоять на заваді розв'язанню основних задач досліджень.

Таким чином, традиційні моделі опису розподілу зазору між контактуючими тілами втрачають ефективність для випадку поверхонь близької форми. До того ж слід зауважити, що у ході дискретизації привноситься додаткова чисельна похибка. Ця похибка із фізичної точки зору може трактуватися як певна

штучна хвилястість. У математичній моделі це відображається у додаванні стохастичної складової в умови непроникнення. Обидва фактори спроможні привнести суттєвий внесок у збурення розв'язку, особливо за малого або нульового зазору між тілами.

П'ятий напрямок аналізу стосується самого принципу побудови математичних і чисельних моделей контактної взаємодії тіл за наявності різного типу нелінійностей та невизначеності [2, 3]. Дійсно, ті чи інші моделі будуються за певних гіпотез. При цьому враховується визначена множина факторів, які підлягають урахуванню. Разом із тим для реальних випадків характерною є ситуація, коли наперед є невідомим міра впливу того чи іншого фактору. Отже, сам принцип побудови математичних і чисельних моделей має бути гнучким. Модель має бути відкритою для поповнення, урізання, видозміни. Більш того, це має стосуватися етапів і фізичного, і математичного, і чисельного моделювання.

Зокрема, мова йде про фізичну нелінійність поверхневих та глибинних шарів матеріалів контактуючих тіл, тертя, зношування, адгезії, пластичності тощо. Натепер всі ці фактори у моделях контактної взаємодії контактуючих тіл відображаються в окремих зрізах, без сумісного урахування та взаємовпливу. Більш того, немає загальної методології побудови таких комплексних моделей, які би природним чином урахували усі ці фактори сукупно.

Таким чином, при розв'язанні прикладних задач напружено-деформованого стану контактуючих тіл виникає низка особливостей, відмінних від традиційних постановок. Вони викликані зазначеними вище особливостями, які характерні для сучасних машинобудівних конструкцій.

1. У багатьох випадках існує тенденція до формування поверхонь контактуючих тіл за критеріями максимального зближення або навіть часткового номінального співпадіння. Це породжує два міркування, які створюють принципові перепони на шляху еволюції та адаптації традиційних моделей контактної взаємодії. Перше міркування стосується неприйнятності аналітичного подання розподілу початкового зазору між поверхнями контактуючих тіл у вигляді частинної суми ряду Тейлора в околі точки  $O$  початкового геометричного контакту. Найпростішим, зокрема, є подання цього розподілу у вигляді квадратичної форми координат  $x, y$  спільної дотичної площини до цих поверхонь  $Oxy$ . Отже, незастосовними є і моделі Герца, і Штаермана, а також варіанти їх розвитку [1, 2]. Більш того, існує багато випадків, коли форма поверхонь контактуючих тіл формується, наприклад, із умов кінематичного контакту чи інших умов. При цьому такі умови записуються у вигляді диференціальних рівнянь, які у загальному вигляді не допускають аналітичного розв'язку. Відповідно, чисельний розв'язок подається у вигляді двох хмар попарно спряжених точок. У цьому випадку взагалі відсутня можливість та прийнятність будь-якої аналітичної апроксимації розподілу зазору. Друге міркування стосується того, що функціональні, конструктивні або технологічні критерії можуть призводити до варіанту неунімодального розподілу початкового зазору між контактуючими тілами. Тоді початковий

контакт може реалізовуватися, наприклад, у скінченній множині точок, замкнених лініях чи на частинах поверхонь. Можливе також поєднання цих варіантів. У цьому випадку відсутня центральна точка початкового контакту тіл. Тому традиційні моделі первинного геометричного контакту аналізу контактної взаємодії [1] є неефективними. Більш того, при зміні певних параметрів може змінюватися і форма, і зв'язність області контакту.

2. На відміну від традиційного випадку локального контакту із початковим точковим контактом тіл, на область контакту і розподіл контактного тиску чинить сильний вплив збурення форми контактуючих поверхонь. При цьому важливо визначити, що цей вплив відчутно проявляється не тільки для скінченних, але й нескінченно малих збурень. Слід зауважити, що при обґрунтуванні тих чи інших проектних рішень залучаються чисельні методи аналізу НДС. Ці методи самі привносять певну похибку, що може трактуватися як додаткове неконтрольоване збурення. Отже, пряме застосування традиційних чисельних методів скінченних, граничних елементів та інших може призводити до спотворення результатів аналізу НДС контактуючих тіл, причому не тільки кількісного, але і якісного.

3. У силу співпадіння (конгруентності) чи близькості номінальної макрогеометричної форми поверхонь контактуючих тіл в умовах їх контактної взаємодії суттєве значення починають відігравати мікрогеометричні фактори. Це, зокрема, шорсткість та хвилястість поверхневих шарів деталей. Цими чинниками у традиційних моделях зазвичай нехтують або враховують за спрощеними лінеаризованими моделями. Це також може призвести до суттєвих похибок у результатах аналізу розподілу контактного тиску і НДС контактуючих тіл.

4. У багатьох випадках у контактуючих деталях конструкцій цілеспрямовано на етапі виготовлення створюють зони пластичних деформацій. Також у загальному випадку довільними можуть бути властивості поверхневих шарів деталей або шарів проміжних матеріалів. Отже, крім структурної, у задачі з'являється і фізична нелінійність. При цьому вони діють одночасно і взаємовпливають. Ці чинники необхідно врахувати у математичних і чисельних моделях, які необхідно при цьому створити.

5. Для аналізу напружено-деформованого стану контактуючих тіл необхідно розробити такий підхід, що давав би змогу будувати варіативні моделі, які враховували би різні чинники природним шляхом без залучення додаткових нефізичних параметрів.

Відзначені проблеми і протиріччя формують напрямок досліджень, описаних у роботі.

*Мета роботи* – розроблення моделей аналізу напружено-деформованого стану тіл із контактуючими поверхнями близької форми із урахуванням збурення цієї форми, властивостей матеріалів поверхневих та глибинних шарів матеріалів.

Задля цього вирішені такі завдання.

1. Розроблення загального підходу до моделювання контактної взаємодії тіл із урахуванням широкої множини факторів.

2. Ілюстрація підходу на прикладі одного із методів.

3. Розв'язання низки тестових прикладних задач.

### 1. Загальний підхід до моделювання контактної взаємодії тіл із урахуванням широкої множини факторів

1.1. *Принцип формування моделей.* Розглядається система контактуючих тіл, які займають у просторі області  $\Omega_i$  із границями (поверхнями)  $S_i, i=1,2,\dots,N$ . Кожна із поверхонь

$$S_i = S_i^{(u)} \cup S_i^{(\sigma)} \cup S_i^{(c)}, \quad (36)$$

де на частинах поверхонь задані:

на  $S_i^{(u)}$  – умови Діріхле

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^*, \quad (37)$$

на  $S_i^{(\sigma)}$  – умови Неймана

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^*, \quad (38)$$

на  $S_i^{(c)}$  – умови контакту

$$u_{\theta}^v + u_{\xi}^v \leq \delta_{\theta\xi}. \quad (39)$$

Тут  $\mathbf{u}$  – вектор переміщень точок  $\Omega$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  – вектор повних напружень [62],  $\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*$  – задані переміщення та навантаження. У (39)  $u_{\theta}^v, u_{\xi}^v$  – переміщення уздовж нормалей на частинах поверхонь  $S_{\theta}^{(c)}, S_{\xi}^{(c)}$ , а  $\delta_{\theta\xi}$  – початковий розподіл первинного зазору між цими поверхнями.

Тензор деформацій  $\boldsymbol{\varepsilon}$  має компоненти

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right], \quad (40)$$

де  $Ox_1x_2x_3$  – система координат у кожній із областей [62].

Тензор напружень  $\boldsymbol{\sigma}$  пов'язаний із тензором деформацій  $\boldsymbol{\varepsilon}$  фізичними співвідношеннями типу узагальненого закону Гука

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (41)$$

Для складних нелінійних процесів (наприклад, за появи пластичних деформацій) залежність (41) трансформується у співвідношення у прирощеннях

$$d\boldsymbol{\sigma} = d\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, d\boldsymbol{\varepsilon}, \kappa), \quad (42)$$

де  $\kappa$  – деякий внутрішній параметр (або їх набір  $\kappa_d, d=1,2,\dots$ ), який описує історію того чи іншого процесу.

Між тілами  $\theta, \xi$  діє контактний тиск

$$q_{\theta\xi} = -\sigma_{\theta}^v \equiv -\sigma_{\xi}^v, \quad (43)$$

де  $\sigma^v$  – нормальні напруження на відповідній поверхні  $S^{(c)}$ .

Крім того, можуть діяти тангенціальні зусилля  $\boldsymbol{\pi}$ :

$$d\boldsymbol{\pi}_{\theta\xi} = d\boldsymbol{\pi}_{\theta\xi}(q_{\theta\xi}, dq_{\theta\xi}, du_{\theta}, du_{\xi}), \quad (44)$$

які визначаються виглядом закону тертя.

Також на поверхнях  $S_i^{(c)}$  діють процеси зношування, які у об'ємних прирощеннях описуються деякими співвідношеннями

$$d\Omega_i = -\rho \cdot dS_i^{(c)}, \quad (45)$$

де  $\rho$  – поточна швидкість зношування, що залежить від контактної тиску, відносної швидкості проковзування точок поверхонь та властивостей поверхневих шарів.

Система рівнянь (36)–(45) формує у загальному вигляді зв'язану задачу контактної взаємодії, пружно-пластичного деформування, тертя та зношування. Якщо розглядати ці процеси та стани у розвитку, то можна ввести деякий параметр  $\tau$ , який описуватиме їх еволюцію. Тоді як розв'язок сформованої системи будуть отримані залежності  $\Omega_i(\tau), S_i^{(c)}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \boldsymbol{\varepsilon}(\tau), \boldsymbol{\sigma}(\tau), q(\tau), \boldsymbol{\pi}(\tau)$ .

Якщо розширювати множину фізичних процесів, що розглядаються, то відповідно розширюватиметься система співвідношень (36)–(45). Основна ідея підходу, що пропонується, полягає в тому, що для моделювання фізико-механічних процесів  $F_r, r=0,1,2,\dots$ , формується послідовність математичних моделей

$$L_r(U_r, F_r, P_r, \kappa_r, \tau) = 0, \quad (46)$$

де  $U_r$  – змінні, які описують поточний стан досліджуваної системи;

$P_r$  – узагальнені варійовані параметри (форма та розміри тіл, властивості матеріалів, навантаження тощо).

Набори  $\kappa_r$  відповідають множині тих чи інших процесів  $F_r$ , що досліджуються. До послідовності операторів  $L_r$  ставляться такі вимоги. Нехай маємо множину фізико-механічних процесів  $\Phi = \bigcup F_r, r=0,1,2,\dots$ . При цьому базовим  $F_0$  є контактна взаємодія двох пружних гладких (як окремих випадок – напівнескінчених) тіл. Подальші  $F_r, r=1,2,\dots$  містять у собі  $F_0$  як частинний крайній (початковий) випадок. Тоді можна організувати послідовність або вкладених процесів (рис. 12), або таких, що розгалужуються (рис. 13).

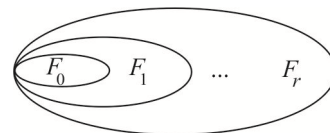


Рисунок 12 – Послідовність вкладених процесів  $\Phi'$

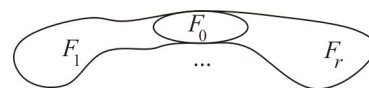


Рисунок 13 – Послідовність процесів  $\Phi''$ , що розгалужуються

Можливі також комбіновані послідовності  $\Phi'''$ ,

які поєднують особливості  $\Phi'$  та  $\Phi''$ .

Кожній такій послідовності фізико-механічних процесів відповідають послідовності операторів

$$\Lambda = \bigcup L_r, \quad (47)$$

узагальнених параметрів

$$\Pi = \bigcup P_r, \quad (48)$$

змінних стану

$$Y = \bigcup U_r, \quad (49)$$

внутрішніх параметрів

$$K = \bigcup k_r. \quad (50)$$

Послідовності  $\Lambda$ ,  $\Pi$ ,  $Y$ ,  $K$  організовані аналогічно до послідовностей  $\Phi$  (див. рис. 12, 13).

Тоді видається природною побудова моделі будь-якого процесу  $F_r$  шляхом поступового нарощування «шарів»  $\Lambda$ ,  $\Pi$ ,  $Y$ ,  $K$ . При цьому це нарощування здійснюється відповідно до того чи іншого ланцюжка  $F_0 \rightarrow \dots \rightarrow F_r$ . Тобто відбувається послідовне нарощування згаданих «шарів» за запропонованими принципами.

Основні переваги розробленого підходу:

- несуперечливість окремих моделей різного рівня, оскільки діє принцип ієрархічної спадковості «знизу – вверх» (для послідовності  $\Phi'$ );
- можливість визначення спільного «ядра» для різних гілок дерева послідовностей (випадок  $\Phi''$ );
- однозначність, параметричність та наскрізна асоціативність усієї множини моделей;
- можливість визначення збурення розв'язку задачі аналізу  $F_r$  на варіювання будь-яких складових моделі;
- можливість визначення значущості того чи іншого чинника на результат моделювання того чи іншого процесу шляхом його «увімкнення – вимкнення» у відповідній моделі.

Слід зазначити, що тут не акцентується увага на конкретному вигляді оператора  $L$ . Цей підхід із цієї точки зору є індиферентним до способу побудови оператора. Важливе тільки дотримання описаної вище методології.

Зокрема, одним із найбільш ефективних шляхів побудови  $\Lambda$  є варіаційна постановка.

*1.2. Побудова математичної моделі на основі теорії варіаційних нерівностей.* Як уже зазначалося, теорія варіаційних нерівностей є потужним математичним апаратом для аналізу процесів і станів для задач із обмеженнями у вигляді нерівностей. Для такого випадку формується варіаційна нерівність. Цій нерівності є еквівалентним пошук екстремуму певного функціоналу

$$I_r(U) \rightarrow \text{extr}. \quad (51)$$

Екстремум (51) формується, наприклад, у переміщеннях.

Для випадку фізичної нелінійності задачу (51) можна формувати у прирощеннях  $u$ . Зокрема, для випадку контакту  $N$  гладких пружних тіл під дією

сил  $f$  це функціонал повної енергії

$$I = \sum_{l=1}^N \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega_l} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{S_l^{(\sigma)}} f \cdot u dS \right). \quad (52)$$

Переміщення точок поверхонь  $S_l^{(c)}$  попарно задовольняють умовам (39). Для цього випадку маємо задачу квадратичного програмування (52) із односторонніми обмеженнями (39).

У більш складних випадках враховуються відповідні більш складні залежності. При цьому принцип побудови функціоналу  $I$  зберігається. Він може формуватися, наприклад, у прирощеннях, на кожному етапі можуть лінеаризуватися співвідношення (41), (44) або їм подібні. Цим самим на функціонал (51) «нашаровуються» додаткові складові залежно від типу задачі (див. далі).

*1.3. Побудова математичної моделі на основі варіаційного принципу Калькера.* У цьому варіанті для випадку контакту пари гладких напівнескінчених тіл мінімізується функціонал

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_{S^{(c)}} q \cdot w(q) dS + \int_{S^{(c)}} q(h - \delta) dS, \quad (53)$$

де  $q, h$  – розподіли тиску та зазору, а  $\delta, w$  – зближення нескінченно віддалених точок тіл та точок поверхонь внаслідок деформування.

Мінімізація (53) здійснюється на невід'ємних розподілах тиску  $q \geq 0$ . Для випадку контакту багатьох тіл функціонал (53) відповідно доповнюється.

На відміну від (52), на всіх контактних парах (53) основною змінною є контактний тиск  $q$ . У випадку пружних тіл функціонал  $\Phi$  є квадратичним. Пружні переміщення  $w$  прямо пропорційні тиску  $q$ . У випадку наявності пружного проміжного шару до (53) додається відповідна квадратична складова. Якщо ж цей шар має нелінійні пружні властивості, то додаткова складова для (53) приводить до задачі випуклого програмування. Якщо ж маємо справу із пластичним деформуванням, тертям чи зношуванням, до здійснюється перехід до формулювання у прирощеннях  $q$ . При цьому базова структура функціоналу (53) зберігається.

*1.4. Чисельне моделювання контактної взаємодії тіл.* Якщо звернутися до варіаційного формулювання, то для загального випадку можна відволіктися від типу функціоналу. Так, для базових моделей (52) або (53) можна запропонувати узагальнений їх вигляд:

$$J(\psi) = \frac{1}{2} a(\psi, \psi) - b(\psi) \rightarrow \min, \quad (54)$$

$$l(\psi) \geq 0, \quad (55)$$

де  $J$  – квадратичний функціонал із квадратичною  $a$  та лінійною  $b$  формами,  $l$  – лінійний алгебраїчний оператор, а  $\psi$  – відповідні змінні стану.

При чисельному розв'язанні задачі (54), (55) застосовується дискретизація  $\psi$ . Тоді



$$\Psi = \sum_m \alpha_m \varphi_m, \quad (56)$$

де  $\varphi_m$  – відомі базисні функції, а  $\alpha_m$  – шукані коефіцієнти частинного ряду.

Застосування тих чи інших квадратурних формул при обчисленні форм  $a$  та  $b$  у (54) призводить до подання  $J$  у вигляді

$$J = \frac{1}{2} \sum_{s,t} A_{st} \alpha_s \alpha_t - \sum_s B_s \alpha_s \rightarrow \min, \quad (57)$$

де  $A_{st}$ ,  $B_s$  – коефіцієнти, що визначаються як

$$A_{st} = a(\varphi_s, \varphi_t); \quad B_s = b(\varphi_s). \quad (58)$$

При цьому обмеження (55) набувають вигляду

$$\sum_t G_{st} \alpha_t - D_s \leq 0, \quad (59)$$

де  $G, D$  – масиви коефіцієнтів, які визначаються із (55), наприклад, методом поточної колокації.

Якщо застосовується МСЕ, то матриця  $A = (A_{st})$  відповідає матриці жорсткості, а вектор  $\mathbf{B} = \{B_s\}^T$  – вектор вузлових навантажень. Коефіцієнти матриці  $G = (G_{st})$  формуються із апроксимації нормальних переміщень через вузлові переміщення, а вектора  $\mathbf{D} = \{D_s\}^T$  – із апроксимації нормального зазору між тілами.

Якщо застосовується МГЕ, то матриця  $A$  відповідає матриці коефіцієнтів впливу, вектор  $\mathbf{B}$  – вектор вузлових зазорів. Коефіцієнти матриці  $C$  у цьому випадку формуються із умов невід’ємності вузлових значень контактної тиску, а також із умови сумарної рівності цих значень притискній силі.

Формальна подібність чисельних реалізацій за допомогою МСЕ та МГЕ у співвідношеннях (56)–(59), тим не менш, не робить їх тотожними. Фізичний зміст розв’язувальних співвідношень у випадку МСЕ – рівняння рівноваги. Для вузлів поза контактом

$$A^I \cdot \alpha^I = B^I, \quad q^I = 0, \quad (60)$$

у контактні –

$$q^{II} = A^{II} \cdot \alpha^{II} - B^{II}. \quad (61)$$

Тут  $A^I$  і  $A^{II}$  – відповідні підматриці матриці жорсткості,  $B^I$  і  $B^{II}$  – відповідні їм вектори вузлових навантажень,  $q^I$  і  $q^{II}$  – підвектори вузлових значень контактних сил.

Якщо застосовується МГЕ, то аналогічні рівняння сумісності переміщень мають вигляд для вузлів поза контактом

$$A^I \cdot q^{II} \leq \Delta^I, \quad q^I = 0, \quad (62)$$

у контактні –

$$A^{II} \cdot q^{II} = B^{II}, \quad \Delta^{II} = 0. \quad (63)$$

Тут підматриці  $A^I$ ,  $A^{II}$  відповідають матриці коефіцієнтів впливу поза контактом та у зоні контакту, підвектори  $B^I$  і  $B^{II}$  – підвектори вузлових зазорів,  $q^I$  і  $q^{II}$  –

підвектори шуканих вузлових значень контактної тиску у та поза зоною контакту, а  $\Delta^I$  та  $\Delta^{II}$  – підвектори зазорів у актуальному (деформованому під навантаженням) стані.

У будь-якому випадку розв’язання системи розв’язувальних співвідношень (57)–(63) дає повну інформацію про напружено-деформований стан контактуючих тіл. Формально для випадку МСЕ НДС визначається зі звичайної системи розв’язувальних рівнянь, у яких покладено  $B := B + q$ , а для випадку МГЕ – із інтегральних рівнянь теорії пружності [62] за визначених навантажень  $q$ .

Формальне подання процедури розв’язання задачі визначення НДС контактуючих тіл, описане вище, відображає загальну суть. Проте реально алгоритми, що застосовуються, можуть бути самими різноманітними. Незважаючи на це, як розв’язок отримуються залежності розподілів контактної тиску та компонент НДС від усіх узагальнених параметрів  $P$  та параметрів еволюції  $\tau$ . Це, з одного боку, дає змогу установлювати залежність цих полів та характеристик НДС від варійованих параметрів та чинників, що ураховуються. З іншого боку, це надає додаткові можливості стосовно визначення впливу параметрів чисельної дискретизації на розв’язок.

Таким чином, запропонована у роботі методологія побудови моделі контактної взаємодії системи тіл шляхом «нашарування» дає можливість розв’язання широкої множини задач подібного типу.

**2. Ілюстрація підходу на прикладі застосування методу граничних елементів.** Розглянемо можливість дослідження контактної взаємодії на прикладі аналізу впливу властивостей матеріалу проміжного нелінійного пружного шару на контакт двох напівнескінчених параболоїдів.

Основна увага приділяється, на відміну від широко застосовуваного методу скінчених елементів, на метод граничних елементів.

У випадку використання розробленого варіанту МГЕ, як впливає з аналізу постановки, наведеної вище, при залученні базисних функцій для апроксимації контактної тиску у вигляді кусочно-лінійних пірамідальних розподілів на трикутній регулярній сітці (з шестикутною основою, див. рис. 5), отримуємо для випадку гладких тіл систему співвідношень [2]

$$\left. \begin{array}{l} \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta = 0, \\ \text{вузол } J_n - \text{у контактї, } n \in J; \\ \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta > 0, \\ \text{вузол } J_n - \text{поза зоною контакту, } n \notin J. \\ p_m \geq 0, m \in J; \quad p_m = 0, m \notin J; \\ \sum_m \frac{\sqrt{3}c^2}{2} p_m = P. \end{array} \right\} \quad (64)$$

При введенні між контактуючими тілами лінійно-пружного шару всі співвідношення (64) залишаються у силі, за винятком заміни коефіцієнтів матриці жорсткості  $C$  на коефіцієнти модифікованої матриці

$$C^\Sigma = C + \text{diag}(\lambda), \quad (65)$$

де  $\lambda$  – вузлова контактна податливість (у загальному випадку – нерівномірна у вузлах, на відміну від рівномірної (тобто коли  $C^\Sigma = C + \lambda E$ , а  $E$  – одинична матриця)).

Для варіанту використання варіаційної постановки (на базі принципу Калькера) із застосуванням певних квадратурних формул, як уже зазначалося, отримувана система співвідношень відповідає (64) з урахуванням (65). Як зауваження слід зазначити, що співвідношення (64), модифіковані з урахуванням (65), як уже зазначалося, зберігають структуру не тільки для рівномірного розподілу податливості  $\lambda$ , але і при її нерівномірному розподілі на контактній площадці. У цьому випадку маємо покомпонентно співвідношення (65) у вигляді:

$$C_{nm}^\Sigma = C_{nm} + \lambda_n \delta_{nm}, \quad (66)$$

де  $\lambda_n$  – «вузлова» податливість, тобто податливість у вузлі з номером  $n$ .

Ці співвідношення впливають як із дискретизації прямого варіанта методу граничних інтегральних рівнянь, так із варіаційного принципу Калькера. Дійсно, при доповненні функціоналу, що мінімізується, складовою

$$\Phi_\lambda = \frac{1}{2} \int_{(S)} \lambda(S) p^2 dS \quad (67)$$

і при його наближенні квадратурними формулами з точками інтегрування, які збігаються з вузлами введеної на  $S$  триангуляції, з'являються складові, пропорційні квадратам вузлових контактних тисків і вузловим податливостям  $\lambda_n$ . Це після мінімізації дає такі ж співвідношення для  $C^\Sigma$ , як і для (66).

На розвиток цього формулювання можна поширити використовуваний підхід і на випадок ненульової розподільчої здатності лінійно пружного шару. У цьому випадку замість (66) отримуємо

$$C_{nm}^\Sigma = C_{nm} + \lambda_{nm}, \quad (68)$$

де компоненти матриці  $\lambda_{nm}$  визначають переміщення в вузлі  $n$  при дії базисного зусилля у вузлі  $m$  (тільки за рахунок деформування проміжного шару).

Наведені зауваження визначають напрямки розвитку відомих постановок без зміни загальної структури розв'язувальних співвідношень. У той же час представлені співвідношення в цілому не вичерпують постановку контактної задачі. Йдеться про те, що, виходячи з мікромеханіки контактної взаємодії шорстких тіл, приходимо до фізично нелінійної залежності в описі зміни нормальних переміщень від контактної тиску. До такого типу нелінійності призводять також фізично нелінійні моделі тонких плівок, напилень, прокладок тощо. Таким чином, потрібна розробка більш сучасних постановок, які враховують нелінійність у залежностях «нормальні переміщення – контактний тиск».

При аналізі контактної взаємодії складнопрофільних тіл із проміжним нелінійно пружним шаром пропонується здійснити розвиток раніше запропонованих методів і моделей для випадку гладких або шорстких тіл із лінійно-пружним вінклеровим шаром між ними.

2.1. *Модель контакту тіл із розташованим між ними нелінійним вінклеровим шаром.* Моделі, запропо-

новані раніше [2, 3] і описані вище, мають, серед інших, ще й деяку додаткову цінну якість, що дає можливість «нарошувати» початкове ядро, доповнюючи його відповідно до нових враховуваних чинників. Це зумовлено тим, що прийняті за основу співвідношення є нічим іншим, як умовами сумісності переміщень точок взаємодіючих у контактні тіл. Ці геометричні співвідношення у вихідному вигляді не залежать від фізико-механічних властивостей контактуючих тіл і виконуються в актуальному стані для будь-якої досліджуваної системи об'єктів. Вплив же пружних властивостей взаємодіючих тіл проявляється в кожному випадку у вигляді залежності переміщень точок їх поверхні від контактної тиску. Таким чином, з огляду на ті чи інші фізичні співвідношення, що зв'язують нормальні переміщення точок поверхонь із контактним тиском та іншими величинами (наприклад, описують вплив мастила, швидкості взаємного руху, температури тощо), можна істотно модифікувати вихідну математичну модель. При цьому не зачіпаються вихідний принцип і структура моделі самого «нижнього» рівня (для випадку гладких тіл). Модель нібито «обростає» новими компонентами, що у деяких випадках змінюють її якісно (за наповненням), але зі збереженням успадкованої початкової форми.

Так, для моделювання поведінки шорсткості або іншого пружного шару між контактуючими тілами можна застосувати не тільки лінійну модель, але і модель загального вигляду (що впливає з аналізу мікромеханіки контакту

$$w \equiv u_z^{\wedge} = u_z^{\wedge}(p) \equiv w(p). \quad (69)$$

Зокрема, як уже зазначалося, у низці робіт [1–3, 8] описана степенева залежність переміщень від контактної тиску (для урахування властивостей шорсткості). Можливі, доречні та реалізовані також й інші залежності, аби вони тільки адекватно описували властивості шорсткості, прокладок, напилень, плівок чи інших шарів між контактуючими тілами. Тоді отримуємо наступну систему в розгорненому і матричному вигляді відповідно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m_c \in N_c} C_{n_c m_c} p_{m_c} + w(p_{m_c}) - \delta = -h_{n_c}, \quad n_c \in N_c; \\ \sum_{m_c \in N_c} \sqrt{3}/2 \cdot c^2 p_{m_c} = P; \quad p_{m_c} \geq 0; \\ Cp + D(p) + h = \delta; \quad \delta^- p = \frac{2\sqrt{3}}{3c^2} P; \quad p \geq 0. \end{array} \right. \quad (70)$$

Тут  $D(p)$  – діагональна матриця з компонентами  $w(p)$ ,  $C$  – матриця коефіцієнтів впливу, а  $\delta^- = \{1; 1; \dots; 1\}$  – одиничний вектор-рядок.

Таким чином, вихідна система (70), що містить у лівій частині умов сумісності переміщень раніше [2] тільки лінійні члени, приростає нелінійними складовими  $w(p)$ . Іншими словами, структурна нелінійність доповнюється фізичною, і в записі співвідношень верхнього рядка (70) здійснити пряму лінеаризацію, як прийнято у відомих постановках, у загальному випадку не видається можливим. У цьому – принципова відмінність цієї моделі, названої структурно-фізично нелінійною, від традиційних

структурно нелінійних, але фізично лінійних.

Співвідношення (70) або їм аналогічні можуть бути отримані також із узагальнення варіаційного принципу Кальєра

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi(p) &= \frac{1}{2} \int_{(S)} p \cdot u_z dS + \int_{(S)} p(h - \delta) dS + \\ &+ \int_{(S)} \left[ \int_0^p w(p) dp \right] dS \rightarrow \min; \\ p(\xi, \eta) &\geq 0 \text{ в } S. \end{aligned} \right. \quad (71)$$

Тут третій доданок у виразі  $\Phi(p)$  описує енергію деформування нелінійно пружного шару (для окремого випадку лінійно пружного шару маємо для цього вираз  $\frac{1}{2} \int_{(S)} \lambda p^2 dS$ ). Застосовуючи певні квадратурні формули, отримуємо співвідношення, аналогічні (70).

Таким чином, можна запропонувати досить універсальний спосіб побудови математичної моделі контактної взаємодії системи СПТ за наявності нелінійно деформівних проміжних шарів (див. п. 1.1). Він полягає у формуванні функціоналу  $\Phi(p)$ , що містить енергію пружного деформування усіх компонентів системи. У силу адитивності функціонала  $\Phi(p)$  така процедура не становить значної складності. При цьому кожний додатковий доданок в  $\Phi(p)$  може привносити нові види нелінійності. Це буде проявлятися на етапі застосування гранично-елементної апроксимації та квадратурних формул для обчислення дискретизованого аналога цього функціоналу. Після накладання вимоги мінімізації вже дискретизованого функціоналу  $\Phi(p)$  можна або отримати умови у вузлах дискретизації, або запропонувати процедуру мінімізації на невід'ємних значеннях вузлових величин контактної тиску.

Запропонований підхід до побудови математичної моделі контактної взаємодії володіє не тільки універсальністю, але і математичною строгістю, причому на всіх етапах досліджень. Він оперує із проблемою мінімізації варійованого функціоналу  $\Phi(p)$  на опуклій множині невід'ємних вузлових значень контактної тиску  $p$ . Цим самим обходяться всі проблеми обґрунтування існування та єдиності розв'язку задач, їх збіжності та точності при використанні дискретизованих моделей [1–3].

**2.2. Модифікація запропонованих підходів до тіл скінченних розмірів.** Підхід, розроблений і описаний вище для випадку контакту напівнескінченних тіл (тобто тіл, площа плями контакту яких набагато менше розмірів контактуючих тіл), може бути розширений і на випадок контактування відносно великого (напівнескінченного) тіла з тілом скінченних розмірів. На рис. 14 наведена схема такої взаємодії. Тут тіло  $\Omega_1$  закріплене, а між ним і напівнескінченним тілом  $\Omega_2$  міститься нелінійно пружний шар  $\Omega_3$ . До такої системи застосовуємо запропонований вище підхід із тією лише різницею, що змінюється спосіб подання функціоналу (71):

$$\Phi(p) = \Phi_1(p) + \Phi_2(p) + \Phi_3(p), \quad (72)$$

де  $\Phi_i(p)$  – функціонали, відповідні вкладкам компонент  $\Omega_i$ :

$$\begin{aligned} \Phi_1(p) &= \frac{1}{2} \int_{(S)} p u_z^{(1)} dS; \\ \Phi_2(p) &= \frac{1}{2} \int_{(S)} p u_z^{(2)} dS + \int_{(S)} p(h - \delta) dS; \\ \Phi_3(p) &= \int_{(S)} \left[ \int_0^p w(p) dp \right] dS. \end{aligned} \quad (73)$$

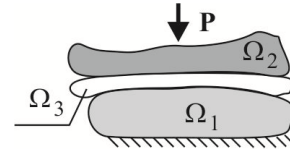


Рисунок 14 – Контакт із тілом скінченних розмірів

З огляду на, що тіло  $\Omega_1$  закріплене, нормальне переміщення його поверхні лінійно залежить від контактних навантажень, а функціонал  $\Phi_1(p)$  є квадратичним. Однак, на відміну від (32), має місце більш складна залежність:

$$u_z^{(1)}(x, y) = \int_{(S)} p(\xi, \eta) \cdot G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (74)$$

де  $G(x, y, \xi, \eta)$  – функція Гріна для крайової задачі визначення НДС тіла  $\Omega_2$ , що визначає переміщення його точок на поверхні як функцію зосередженого навантаження у точці з координатами  $(\xi, \eta)$  (див. рис. 4).

Таким чином, у цьому випадку втрачається аналітичний зв'язок  $u_z^{(1)}$  і  $p$ , оскільки для тіла в загальному випадку довільної форми побудова функції Гріна – складне завдання. Для вирішення цієї проблеми в роботі пропонується підхід, заснований на твердженні, що при дискретизації, аналогічній використовуваній вище, функціонал  $\Phi_1(p)$  набуває вигляду:

$$\Phi_1(p) = \frac{1}{2} \sum C_{nm}^{(1)} p_n p_m, \quad (75)$$

де  $C_{nm}^{(1)}$  – коефіцієнти впливу, що визначають переміщення у вузлі  $n$  від дії тиску з розподілом базисної функції (див. рис. 5, 6, 15), що відповідає вузлу  $m$ .

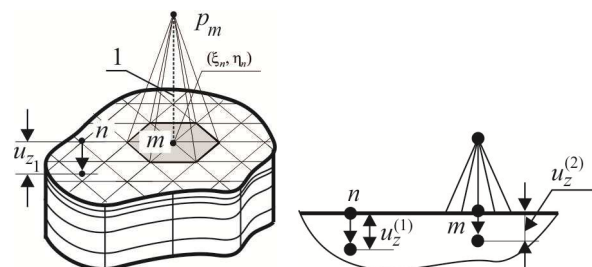


Рисунок 15 – До визначення коефіцієнтів впливу  $C_{nm}^{(1)}$

Отже, втрачається простота обчислення компонент матриці коефіцієнтів впливу «за шаблоном». Однак сама структура матриці зберігається.

Залишається проблема обчислення цих самих ко-

ефіцієнтів впливу  $C_{nm}^{(1)}$ . Пропонується для цих цілей використовувати процедуру МСЕ. Дійсно, якщо на контактну поверхню  $S$  тіла 1 нанести трикутну сітку аналогічно нанесеній гранично-елементній сітці, а далі згенерувати мережу призматичних або тетрадральних скінченних елементів, які «замошують» область  $\Omega_1$  (див. рис. 15), то при прикладанні навантаження у вузлі з індексом  $m$  можна зафіксувати за підсумками розв'язання за допомогою МСЕ нормальне переміщення у вузлі  $n$ . Це легко здійснити, зберігши обернену матрицю жорсткості МСЕ:

$$K \cdot X = f \Rightarrow X = K^{-1} f, \quad (76)$$

де  $K$  – матриця жорсткості скінченно-елементного ансамблю, яка описує поведінку тіла  $\Omega_1$  під вузловими навантаженнями  $f$ .

Якщо у другому виразі у (76) взяти компоненту вузлового навантаження  $f$ , відповідну базисному одиничному розподілу тиску  $p$  (див. рис. 15), то для компонент вузлових переміщень, які відповідають нормальним переміщенням у вузлах  $n$ , отримуємо можливість визначення

$$C_{nm}^{(1)} = \kappa_m^{(n)} = K_{(n)(m)}^{-1} \cdot f_{(m)}. \quad (77)$$

Сукупність  $\kappa_m^{(n)}$  формує матрицю впливу  $C^{(1)}$ .

Якщо ж у силу будь-яких міркувань застосування сітки скінченних елементів, що збігається з регулярною розбивкою  $S$  на трикутники, недоцільне, то можна застосувати розв'язок на іншій, відмінній від «породжуваної» описаним вище способом скінченно-елементної моделі, а потім коефіцієнти впливу можуть бути обчислені шляхом апроксимації отриманих результатів на трикутну сітку граничних елементів на границі  $S$ . Для обчислення же матриці коефіцієнтів впливу  $C_{nm}^{(2)}$  застосовна звичайна процедура, використана вище.

Таким чином, у підсумку отримуємо матрицю коефіцієнтів впливу

$$C^{\vee} = C^{(2)} + C^{(1)}, \quad (78)$$

а співвідношення (70) зберігають свій вигляд, за винятком заміни  $C$  на  $C^{\vee}$ .

У результаті отримуємо узагальнення запропонованого в роботі підходу на більш широкий клас контактуючих тіл. Аналогічно цей підхід може бути поширений і на випадок контакту системи тіл скінченних розмірів із нелінійно пружними шарами між ними.

**3. Методи розв'язання структурно та фізично нелінійних задач контактної взаємодії.** Вище описана нова математична модель НДС і контактної взаємодії СПТ – гладких, шорсткуватих і тіл за наявності між ними у загальному випадку нелінійних пружних шарів. При цьому в результаті отримуємо структурно-фізично нелінійну систему співвідношень. Для розв'язання цієї системи співвідношень необхідно розробити нові методи, оскільки традиційні орієнтовані на розв'язання контактних задач із лінійно пружними компонентами. Як

що як приклад, не знижуючи загальності, прийняти нелінійну модель пружного шару, що моделює шорсткість контактуючих тіл або нелінійність проміжного шару, вигляду [8]

$$w = \bar{\lambda} \cdot p^s, \quad (79)$$

де  $\bar{\lambda}, s$  – деякі емпіричні або обчислювані параметри, то, як зазначалося вище, зміниться сам вигляд рівнянь сумісності переміщень точок контактуючих поверхонь взаємодіючих тіл (з лінійних вони перетворяться у нелінійні).

Таким чином, як уже зазначалося, структурні нелінійності, тобто умови контактної взаємодії у вигляді умов непроникнення взаємодіючих тіл одне в одне, які в першому наближенні традиційно містять тільки лінійні функції від переміщень, доповнюються в разі моделі (79) (чи іншої) нелійними складовими. У результаті формально співвідношення сумісності можна звести до системи нелінійних рівнянь. Таким чином, виникає задача розробки методів розв'язання таких задач, що і складає, як уже зазначалося, мету цього параграфу.

**3.1. Метод додаткових зазорів.** Якщо записати співвідношення сумісності переміщень, що входять в систему (70), у вигляді підсистеми

$$C p = \delta - h - \bar{\lambda} q; \quad q = \{p_1^s, p_2^s, \dots, p_N^s\}^T, \quad (80)$$

то формально її можна подати як

$$C p = \delta - \bar{h}, \quad \bar{h} = \bar{h}(p) = h + \bar{\lambda} q = h + \Delta h(p). \quad (81)$$

Тоді співвідношення (81) формально повторюють лінійні співвідношення в (70), але в яких початковий зазор  $h$  доповнений деякими компенсаційними складовими  $\Delta h(p)$ . За аналогією з методом додаткових навантажень ці складові можна назвати додатковими зазорами.

Рівняння (81) є нелінійним операторним рівнянням, для якого дійсний розподіл контактної тиску є нерухомою точкою оператора повної системи рівнянь  $K\{h, \delta\}^T = \{h, P\}^T$  за умов  $p \geq 0$ . Таким чином, можна організувати ітераційний процес:

$$\begin{cases} \tau := 0; & (*) \\ p^{(\tau)} := 0; & (**) \\ q^{(\tau)} = \{[p_1^{(\tau)}]^s, \dots, [p_N^{(\tau)}]^s\}^T; & (***) \\ \Delta h^{(\tau)} = \bar{\lambda} q^{(\tau)}; & (^) \\ \bar{h}^{(\tau)} = h^{(0)} + \Delta h^{(\tau)}; & (^^) \\ \{p^{(\tau)}, \delta^{(\tau)}\}^T = K^{-1} \{h^{(\tau)}; P\}^T; & (^^^ ) \\ \tau := \tau + 1. & (:) \end{cases} \quad (82)$$

У (82) величини  $P, q, h, \delta$  беруть участь в ітераційному уточненні розв'язку  $(^^^)$ . При цьому  $h^{(0)}$  – вектор початкових (номінальних) зазорів між поверхнями контактуючих тіл. Ітерації здійснюються у межах циклу  $(***) \rightarrow (:) \rightarrow (***)$ . Умовою закінчення цього процесу може бути або критерій щодо уточнення додаткових зазорів, або – тиску:

$$\begin{cases} \Delta_h^{(\tau)} = \frac{\|\Delta h^{(\tau)} - \Delta h^{(\tau-1)}\|}{\|\Delta h^{(\tau)}\|} \leq \varepsilon_h; \\ \Delta_p^{(\tau)} = \frac{\|\Delta p^{(\tau)} - \Delta p^{(\tau-1)}\|}{\|\Delta p^{(\tau)}\|} \leq \varepsilon_p, \end{cases} \quad (83)$$

де  $\Delta_h^{(\tau)}$ ,  $\Delta_p^{(\tau)}$  – контрольовані параметри збіжності процесу;

$\varepsilon_h, \varepsilon_p$  – наперед задані порогові значення відповідно для  $\Delta_h^{(\tau)}, \Delta_p^{(\tau)}$ , після досягнення яких згаданий ітераційний процес припиняється;

$\|\bullet\|$  – деяка норма (наприклад, евклідова або чебишевська) для оцінки величин векторів.

Крім того, можна також контролювати ітераційний процес за швидкістю зміни  $\delta^{(\tau)}$ :

$$\Delta_\delta^{(\tau)} = \left| \delta^{(\tau)} - \delta^{(\tau-1)} \right| / \left| \delta^{(\tau)} \right| \leq \varepsilon_\delta, \quad (84)$$

де зміст величин відповідає введеним у (83).

Таким чином, розв'язок поставленої задачі еквівалентний розв'язку задачі (70) для контакту гладких тіл, але зі скоригованим розподілом зазорів. Природно, що сама область контакту внаслідок введення нелінійного пружного шару змінюється, тому задоволення у ході ітераційного уточнення вимагають не тільки умови типу рівності для переміщень в області контакту і тиску – поза нею, а й умови типу нерівності для тиску всередині області контакту і щодо переміщень – поза областю. У (70) всі вони сформульовані щодо шуканих  $p_n$ . У ході цього процесу змінюється відповідно множина  $J^{(\tau)}$  вузлів, які відповідають умовам (70) на  $\tau$ -му кроці ітераційного процесу. Таким чином, уточнюється і сама область контакту  $S^{(\tau)}$ . Саме по собі мається на увазі виконання рівняння  $\sqrt{3}/2 \cdot c^2 \sum_m p_m = P$ .

Розв'язання задачі визначення контактного тиску за алгоритмом (82) вимагає обернення матриці з підматрицею  $C$ . Для підвищення чисельної стійкості у деяких випадках може бути доцільно модифікувати розв'язувальну систему рівнянь шляхом додавання в ліву і праву частини співвідношень (81) додаткових лінійних доданків. У цьому випадку результуюча система співвідношень, а також ітераційна процедура (82), залишаються незмінними.

3.2. *Метод змінних коефіцієнтів впливу (або параметрів податливості, див. вище)*. Подавши рівняння сумісності переміщень у системі (70) за наявності на границі тіл вінклерова шару (79) у вигляді

$$C p + (\bar{\lambda} p^{(s-1)}) \cdot p = \delta - h, \quad (85)$$

і ввівши позначення  $\bar{\lambda}(p) = \bar{\lambda} p^{(s-1)}$ , за аналогією із методом змінних параметрів пружності (85) можна переписати у вигляді ( $E$  – одинична матриця)

$$\bar{C} p = \delta - h, \bar{C}(p) = C + \bar{\lambda} \cdot E. \quad (86)$$

Для розв'язання (86) можна організувати ітерацій-

ний процес:

$$\begin{cases} \beta := 0; & (*) \\ \bar{C}^{(\beta)} := C; & (**) \\ K^{(\beta)} = K \left( \bar{C}^{(\beta)} \right); & (***) \\ \Pi^{(\beta)} = \{p^{(\beta)}, \delta^{(\beta)}\}^T = (K^{(\beta)})^{-1} \cdot H = (K^{(\beta)})^{-1} \cdot \{h, P\}^T; & (^\wedge) \\ J^{(\beta)} : \{p_n \geq 0 \forall n \in J^{(\beta)}; p_n = 0 \forall n \notin J^{(\beta)}\}; & (^\wedge\wedge) \\ \Delta_n = 0 \forall n \in J^{(\beta)}; \Delta_n \geq 0 \forall n \notin J^{(\beta)}; & \\ \bar{C}^{(\beta)} := C + \bar{\lambda} [p^{(\beta)}]^{(s-1)} \cdot E; & (^\wedge\wedge\wedge) \\ \beta := \beta + 1. & (:) \end{cases} \quad (87)$$

У (87) ітераційний процес йде у послідовності  $(***) \rightarrow (:) \rightarrow (***)$ . При цьому етап  $(***)$  означає складання матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь  $K^{(\beta)}$  за скоригованою на етапі  $(^\wedge\wedge\wedge)$  підматрицею  $\bar{C}^{(\beta)}$  (тобто аналогічно  $K$  в (82), але з підматрицею  $\bar{C}$  замість  $C$ ), причому множина контактуючих вузлів  $J^{(\beta)}$  уточнюється на етапі  $(^\wedge)$ . Припинення ітераційного процесу (86) можна здійснювати за умовою стабілізації ітераційного наближення множини вузлів, у яких реалізується контакт:

$$J^{(\beta)} = J^{(\beta-1)}. \quad (88)$$

Представлений алгоритм (87) відрізняється від алгоритму (82) тим, що перебудові піддається не права частина системи рівнянь при незмінній за структурними компонентами підматрицею  $C$ , а, навпаки, змінюється сама матриця, в той час як права частина – постійна.

Запропонований підхід можна трактувати як узагальнення (68), а саме: у ході розв'язання (86) за алгоритмом (87) визначається такий розподіл на вузлах сітки коефіцієнтів податливості  $\lambda_n (n \in J)$  лінійно пружного Вінклерова шару з рівномірною за площею контакту жорсткістю, що розв'язок задачі з матрицею

$$C : C_{nm} = C_{nm} + \lambda_n \cdot \delta_{nm}, \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n \end{cases} \quad (89)$$

дає той же розподіл контактного тиску, що і в разі нелінійно пружного шару (79).

#### Зауваження

а) зазначена тут для обох методів незмінність матриці або правої частини дотримується в межах незмінності множини контактуючих вузлів. У іншому випадку перебудові піддаються всі компоненти підматриці впливу і відповідного підвектора правих частин;

б) запропоновані вище методи додаткових зазорів і змінних коефіцієнтів впливу є всього лише окремими випадками розв'язання задачі про контактну взаємодію двох шорсткуватих тіл, модельованих півпростором з нелінійним вінклеровим шаром, розташованим на границі: описані лише два частинних методи з множини можливих до застосування для розв'язання систем нелінійних рівнянь; при цьому необхідно відзначити, що вони мають наочне фізичне трактування, яке не завжди наявне при використанні інших методів; використана лише степенева модель для опису властивостей шару шорстко-

сті на контактуючих поверхнях, хоча в літературі міститься багато інших залежностей «переміщення – контактний тиск»; тут доречно, однак, відзначити, що степенева залежність досить часто застосовується для розв’язання множини прикладних задач зі збереженням прийнятної точності; також можна повторно відзначити, що такий вибір у вигляді степеневої залежності  $w(p)$  не знижує загальності підходу.

Слід зауважити, що збіжність алгоритмів (85), (87) залежить від властивостей нелінійно-пружного шару (тут – від параметрів  $\bar{\lambda}, s$  в (79)).

Розглянемо врешті загальну постановку задачі про контактування шорсткуватих тіл, модельованих напівпростором. Відволікаючись від виду залежності « $w-p$ », її у загальному випадку можна подати у вигляді:

$$w = w(p). \quad (90)$$

Ця залежність може мати складний характер у зв’язку з урахуванням різних чинників, бути найрізноманітнішою за способом використовуваних статистичних моделей для опису форми мікронерівностей або за використовуваним типом моделі одиничної мікронерівності в контакті, а також впливати з обробки масиву експериментальних даних тощо. Ці залежності не вичерпують усієї множини типів співвідношень (90), а лише ілюструють їх різноманіття. Тоді система розв’язувальних рівнянь, дискретизованих за методом граничних елементів, може бути подана у вигляді:

$$\begin{cases} \sum_m C_{nm} p_m + w(p_n) = \delta - h_n, & n \in J; \quad m \in J; & (i) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} c^2 \sum_n p_n = P, & n \in J; & (ii) \\ p_n \geq 0, & n \in J; & (iii) \\ p_n = 0, & n \notin J; & (iiii) \\ \sum_m C_{nm} p_m < \delta - h_n, & n \notin J; & (iiiii) \end{cases} \quad (91)$$

Цю систему співвідношень можна трактувати як нелінійну систему рівнянь (i), (ii) щодо вектора невідомих  $\{p, \delta\}^T = \Pi$  за обмежень (iii), (iiii), (iiiii), що одночасно формують і кількість вузлів  $J$ , що контактують, а з ним – і компоненти підвектора  $p$ . Звідси, переписавши (91), отримуємо:

$$U(\Pi_J) = 0; \quad V(\Pi_J) \geq 0. \quad (92)$$

Тут  $U$  – оператор нелінійної системи рівнянь (i, ii) в (91), а  $V$  – оператор обмежень, записаних в (91) нижче. Тоді для відшукування розв’язку (92) можна застосувати, наприклад, процедуру Ньютон-Рафсона

$$Cp + D(p) + h = \delta \quad (p \geq 0). \quad (93)$$

Перевагами постановки (91) і алгоритму Ньютон-Рафсона є загальність, універсальність, стійкість і збіжність. Разом із тим втрачається наочність фізичного трактування (82) і (87).

Взагалі-то, ключові співвідношення сумісності переміщень містять два типи нелінійностей: в  $D(p)$  зосереджена фізична нелінійність, а в  $p \geq 0$  – структурна. Традиційні методи задовільно «працюють» з одним або

іншим типом нелінійностей окремо. Проблема якраз полягає в поєднанні ефективності у рамках єдиного підходу. Часткове вирішення цієї проблеми запропоновано вище в параграфі. Можливі також й інші підходи. Зокрема, це – релаксаційні процедури для мінімізації функціоналу, що збігаються з методами типу методу послідовної верхньої релаксації із проекцією для розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (див. вище).

**4. Розв’язання тестових задач.** Розроблені методи і моделі аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл за наявності нелінійного пружного проміжного шару вимагають апробації на прикладах розв’язання тестових задач. Зокрема, проблемним місцем є питання збіжності чисельного розв’язання із використанням розроблених ітераційних процедур. В силу цього було запропоновано розв’язати тестові задачі про контакт двох тіл, обмежених параболоїдами обертання з розміщеними між ними нелінійними пружними шарами (рис. 16). Варіюваними тут є пружні характеристики, тобто залежності  $w(p)$ .

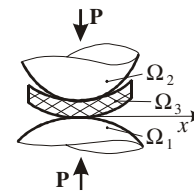


Рисунок 16 – Розрахункова схема взаємодії параболоїдів  $\Omega_1, \Omega_2$  з розміщеним між ними нелінійним шаром

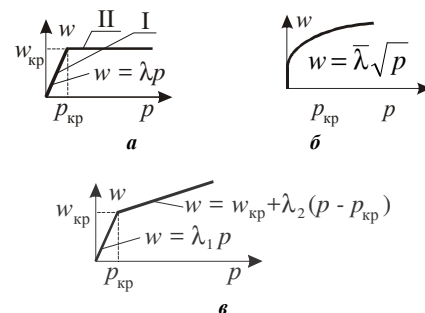


Рисунок 17 – Нелінійні характеристики  $w(p)$ : а – пружно-жорстка характеристика; б – «коренева» характеристика типу  $w = \bar{\lambda} \sqrt{p}$ ; е – білінійна характеристика

При цьому, зокрема, були розглянуті наступні типи нелінійностей, наведені на рис. 17. На рис. 18 наведені розподіли контактного тиску залежно від зміни порога переходу на горизонтальну ділянку залежності  $w(p)$  (див. рис. 17). Поріг виставляється за значенням коефіцієнта  $\alpha_a = p_{kp} / p_{max}^\lambda$ , де  $p_{max}^\lambda$  – максимальний контактний тиск у розподілі, отриманий під час розв’язання задач без обмежень  $p_{kp}$  (випадок  $\alpha_a = 0$  відповідає контакту гладких тіл). Як видно з наведених розподілів, спостерігається плавна їх видозміна при варіюванні коефіцієнта  $\alpha_a$  в інтервалі  $[0; 1]$  (рис. 19,  $k$  – номер ітерації). Чітко видно зону переходу між областями I і II (рис. 20). В зоні  $\alpha_a \approx 0,5$  спостерігається різна картина розподілів кон-

тактного тиску  $q$  в областях  $I$  і  $II$ , а між ними – перехідна зона. При наближенні  $\alpha_a$  до 0 або 1 розподіли  $q$  наближаються до граничних (відповідно, при  $\alpha_a = 0$ ,  $\alpha_a = 1$ ).

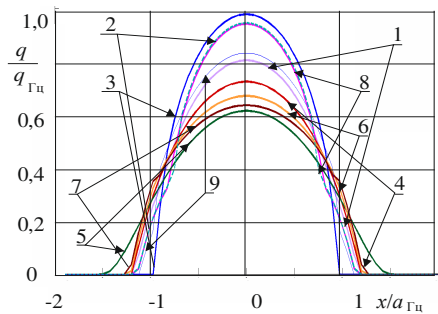


Рисунок 18 – Розподіл безрозмірного контактного тиску віднесеного за безрозмірною координатою  $\bar{x} = x/x_{ГЦ}$  ( $x_{ГЦ}$  – ширина плями контакту за моделлю Герца в осьовому перерізі):

- 1 – білінійна залежність,  $\alpha_a = \arctg 0,5$  (див. рис. 17, в);
- 2 – пружно-жорстка залежність  $w(p)$ ,  $\alpha_a = 0,5$ ; 3 – контакт гладких параболоїдів; 4 – контакт параболоїдів з лінійно-пружним вінклеровим шаром,  $\lambda = 10 C_{m1}$ ; 5 – «коренева» залежність  $w(p)$  (див. рис. 17, б); 6 – білінійна залежність,  $\alpha_2 = \arctg 1,5$  (див. рис. 17, в); 7 – білінійна залежність,  $\alpha_2 = \arctg 2$  (див. рис. 17, в); 8 – пружно-жорстка залежність  $w(p)$ ,  $\alpha_a = 0,5$  (розв'язок отримано МЗПП);
- 9 – білінійна залежність,  $\alpha_2 = \arctg 1,5$  (див. рис. 17, в) (розв'язок отримано МЗПП)

На рис. 21, а проілюстровано зміну відносного максимального контактного тиску в ході ітераційного процесу, а на рис. 21, б – відносного максимального контактного тиску залежно від параметра  $\alpha_a$  (див. рис. 17, а). Видно, що ітераційний процес сходиться досить швидко. Крім того, при варіюванні  $\alpha_a$  рівень контактного тиску змінюється плавно, проте у досить широких межах. На рис. 22 наведено зміну картин розподілів контактного тиску в осьовому перерізі залежно від номера ітерації (номер ітерації – в полі рисунка) за різних значень  $p_{кр}$  (позначення кривих на рисунках аналогічно рис. 18). На рис. 23, 24 проілюстровано зміни

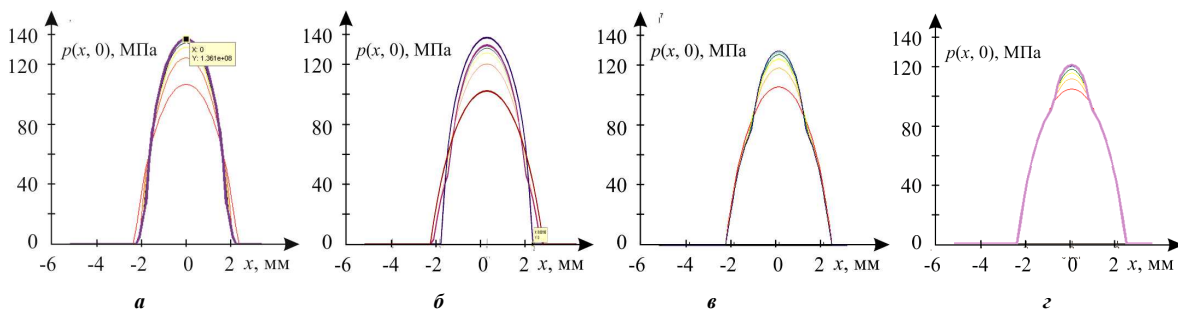


Рисунок 22 – Картин розподілів контактного тиску в осьовому перерізі залежно від номера ітерації при різних значеннях  $p_{кр}$ :

а –  $p_{кр} = 25$  МПа; б –  $p_{кр} = 50$  МПа; в –  $p_{кр} = 75$  МПа; г –  $p_{кр} = 90$  МПа

розподілу контактного тиску при зміні параметра  $\alpha_a$ . Помітна еволюція картин розподілів контактного тиску, а також перехідні зони між реалізаціями гілок  $I$  і  $II$  залежності  $w(p)$  (див. рис. 17, а).

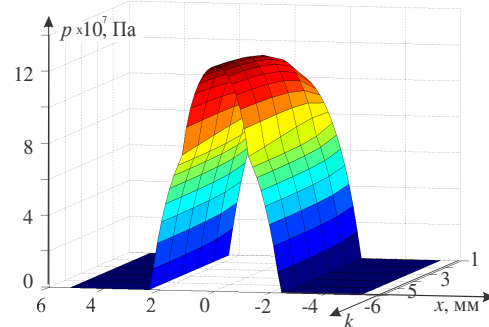


Рисунок 19 – Зміна картин розподілення контактних тисків в осьовому перерізі в ході ітераційного процесу їх уточнення для пружно-жорсткої моделі проміжного шару (див. рис. 17, а) при  $\alpha_a = 0,6$

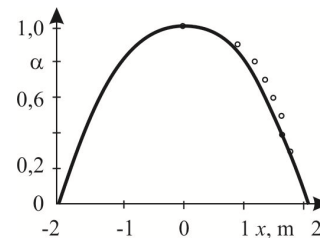


Рисунок 20 – Лінія переходу між пружною і «жорсткою» ділянкою залежності  $w(p)$  (див. рис. 17, а) при зміні параметра  $\alpha_a \in [0; 1]$

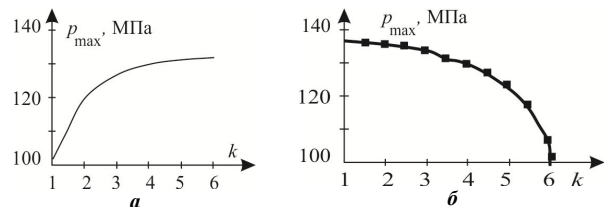


Рисунок 21 – Зміна відносного максимального контактного тиску: а – в ході ітераційного процесу; б – залежно від параметра  $\alpha_a$  (див. рис. 17, а)

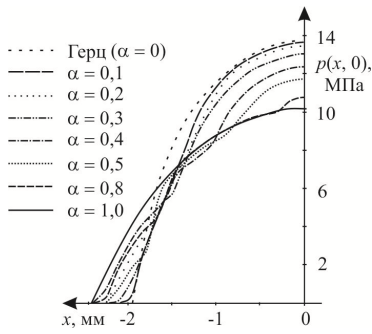


Рисунок 23 – Зміна картини розподілу контактної тиску в осьовому перерізі при варіюванні параметра  $\alpha_a$  (див. рис. 17, а)

На рис. 25, 26 наведені картини розподілу контактної тиску при реалізації «кореневої» залежності  $w(p)$  (див. рис. 17, б). Відстежується коефіцієнт  $\alpha_\sigma = p_{\max}^{\sqrt{\cdot}} / p_{\max}^\lambda$ , де  $p_{\max}^{\sqrt{\cdot}}$  – максимальний контактний тиск при «кореновому» розподілі  $w(p)$ ,  $p_{\max}^\lambda$  – те ж, але для лінійного вінклерового шару. Видно, що «коренева» модель породжує більш плавний розподіл контактної тиску, особливо в зоні периферії, в якій рівень тиску різко знижується.

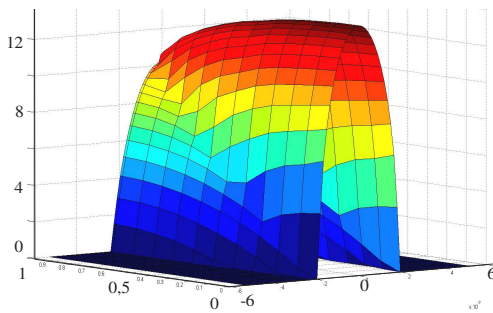


Рисунок 24 – Зміна картини розподілу контактної тиску в осьовому перерізі при варіюванні параметра  $\alpha_a$  (див. рис. 17, а) (в ізометрії)

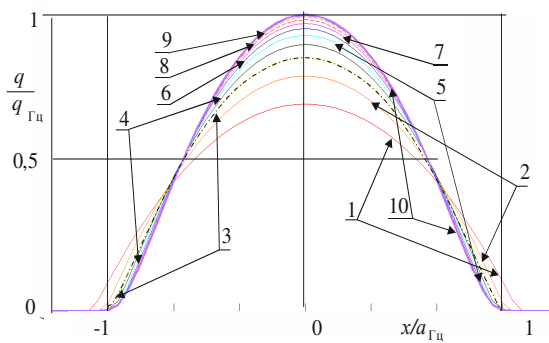


Рисунок 25 – Зміна картини розподілу контактної тиску при «кореневої» залежності  $w(p)$  (див. рис. 17, б) залежно від номера  $k$  ітераційного процесу

На рис. 18 також представлені розподіли контактної тиску при варіюванні коефіцієнта  $\alpha_\sigma = \arctg(\lambda_2/\lambda_1)$  (див. рис. 17, в). Як впливає з аналізу отриманих розподілів, при наближенні  $\alpha_\sigma$  до нуля розподіл контактної тиску прагне до такого ж для пружно-жорсткої моделі (див. рис. 17, а). При наближенні до  $\pi/2$  отримуються

розподіли контактної тиску, що мають більш низький рівень в середній частині, а, відповідно, ширші площадки контакту. Тут же (див. рис. 18) наведені розподіли контактної тиску, отримані не тільки методом додаткових зазорів, а й методом змінних параметрів податливості.

Видно, що отримані різними методами результати в цілому збігаються. Таким чином, як видно з отриманих результатів, коефіцієнти  $\alpha_a, \alpha_\sigma, \alpha_\sigma$  досить сильно впливають і на характер розподілу контактної тиску, і на їх рівень. З цього випливає, що, варіюючи ці коефіцієнти, можна відчутно впливати на напружено-деформований стан контактуючих тіл.

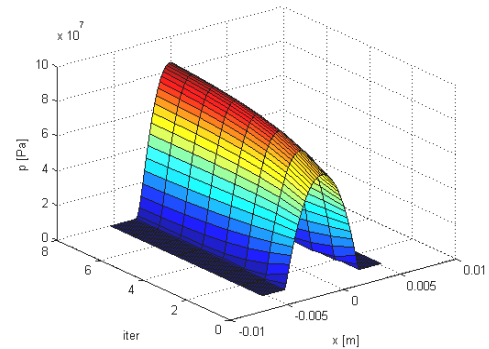


Рисунок 26 – Зміна картини розподілу контактної тиску при «кореневої» залежності  $w(p)$  (див. рис. 17, б) залежно від номера  $k$  ітераційного процесу (в ізометрії)

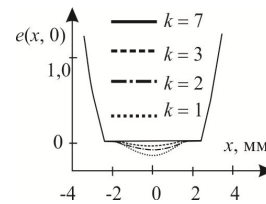


Рисунок 27 – Розподіл нев'язки рівнянь сумісності переміщень (центральна частина – область контакту, периферія – поза контактом) за ітераціями (iter = 1÷7)

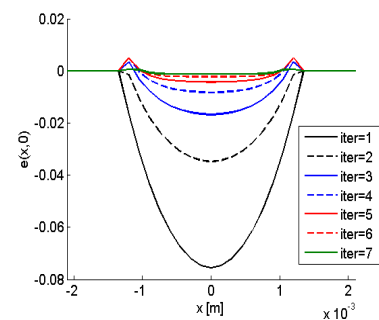


Рисунок 28 – Розподіл нев'язки рівнянь сумісності переміщень в області контакту за ітераціями (iter = 1÷7)

Також необхідно відзначити, що при розв'язанні тестових задач в досліджених випадках не можна звернутися ні до відомих аналітичних розв'язків, ні до розв'язків, отриманих чисельно (наприклад, за допомогою МСЕ). Важко здійснювати порівняння з експериментальними даними в силу того, що залежності  $w(p)$  для того чи іншого шару можуть бути отримані зі значною похибкою. У зв'язку з цим пропонується оцінювати точність розв'язку за рівнем нев'язки рівнянь.



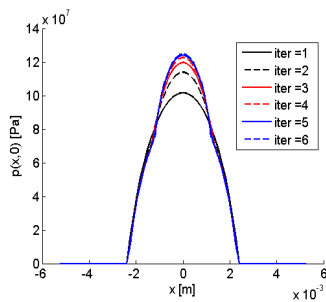


Рисунок 29 – Розподіл контактної тиску при ітераційному уточненні розв'язку, номер ітерації  $iter = 1+6$

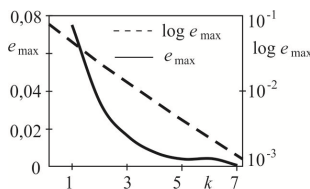


Рисунок 30 – Зміна максимальної нев'язки розв'язку контактної задачі в зоні контакту та нев'язки в центральній точці контакту в процесі ітераційного уточнення розв'язку (в напівлогарифмічному масштабі)

Для цього обчислюється повузлова нев'язка для розв'язуваної системи співвідношень, а потім оцінюється їх відносний рівень. Наприклад, для рівнянь  $\sum C_{nm} p_m + w(p_n) - \delta + h_n = 0$  рівень нев'язки –  $\bar{\Delta}_n = [\sum C_{nm} p_m + w(p_n) - \delta + h_n] / \delta$ , де  $\delta$  – зближення тіл. Так, на рис. 27, 28 наведені розподіли нев'язки  $\Delta_n$  для випадку моделі (див. рис. 17, а) при  $\alpha_a = 0,5$  (отримано МДЗ). Видно, що досягається досить точний розв'язок (рівень нев'язки – до 0,1% після сьомої ітерації). На рис. 29 – зміна характеру розподілу контактної тиску при ітераційному уточненні розв'язку. Очевидне різке уточнення отриманих результатів відразу після 3-4 ітерацій. На рис. 30 наведений характер зміни нев'язки – максимуму і в центральній точці контакту. Видно, що спостерігається лінійна збіжність розв'язку до точного,

що прийнятно для багатьох прикладних задач із помірною за розмірами гранично-елементною сіткою.

Таким чином, можна зробити висновок, що розроблені методи розв'язання розв'язувальної системи співвідношень продемонстрували досить високу точність. Це дає можливість переходити до розв'язання інших тестових та прикладних задач із застосуванням методів додаткових зазорів та змінних параметрів податливості, а також інших запропонованих методів.

**5. Вплив різних чинників на контактну взаємодію складнопрофільних тіл.** Розроблені та описані вище підходи, методи та моделі дають можливість здійснювати розв'язання низки тестових та прикладних задач про контактну взаємодію складнопрофільних тіл із урахуванням структурної та фізичної нелінійності, а також обґрунтування форми поверхонь контактуючих тіл. Нижче у параграфі описані розв'язання цих задач.

**5.1 Вплив форми профілю поверхонь контактуючих складнопрофільних тіл на розподіл контактної тиску між ними.** Для прикладу розглядається задача про осесиметричний контакт СПТ, зазор між якими записується у вигляді:

$$h = G_1 \cdot [(x^2 + y^2)^{K/2} / a^K] + G_2 \cdot (x^2 + y^2)^{L/2} / a^L. \quad (94)$$

Тут  $K = 2$ ,  $L = 4$ ;  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  – радіус-вектор поточної точки в площині  $xu$  (дотична до контактуючих поверхонь), а  $G_1, G_2$  – варіювані параметри ( $G_1 + G_2 = 1$ ) (у табл. 1 наведені варіанти поєднань параметрів  $G_1, G_2$ , за яких здійснювалися чисельні дослідження). Надалі визначався  $p_H$  – максимальний контактний тиск, що отриманий при розв'язанні задачі Герца ( $K=2$ ,  $\lambda=0$ ); а також  $a_H$  – розмір контактної плями (отримано при розв'язанні задачі Герца ( $K=2$ ,  $\lambda=0$ )). Відповідно, у розгляд введено безрозмірні величини  $x_a = x/a_H$ ,  $q = p/p_{Hmax}$ . На рис. 31–33 наведені деякі характерні розподіли, отримані у ході досліджень.

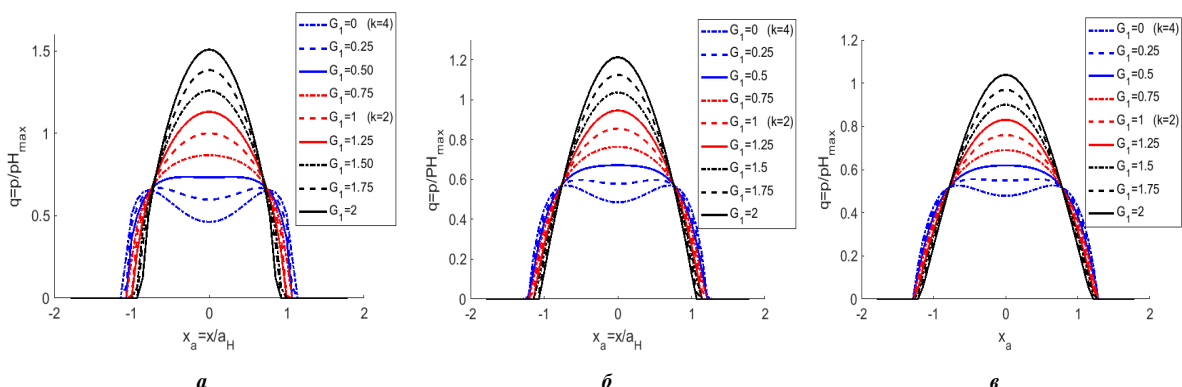


Рисунок 31 – Розподіли контактної тиску у осевих перерізах для різних значень параметра  $\lambda$ : а –  $\lambda = 0$ ; б –  $\lambda = 5$ ; в –  $\lambda = 10$

Таблиця 1 – Поєднання параметрів  $G_1, G_2$

$N$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$G_1$	2	1,75	1,5	1,25	1,1	1	0,75	0,5	0,25	0
$G_2$	-1	-0,75	-0,5	-0,25	-0,1	0	0,25	0,5	0,75	1

Як видно із аналізу отриманих результатів, залежно від співвідношення  $\gamma_1$  та  $\gamma_2$  розподіл контактної тиску або подібний до «герцівського» при  $\gamma_1 = 0$  (тобто розподіл із одним максимумом у центрі), або тяжіє до розподілу із локальним мінімумом у центрі та максимумом на деякій віддалі від центра (характер-

ний, наприклад, для розподілів тиску при розв'язанні задачі Штаєрмана при степеневому законі розподілу із показником степеня 4 та більше).

Отже, варіюванням параметрів  $\gamma_1$  та  $\gamma_2$  можливо впливати і на розміри контактної плями, і на розподіл контактної тиску, і на його максимальне значення.

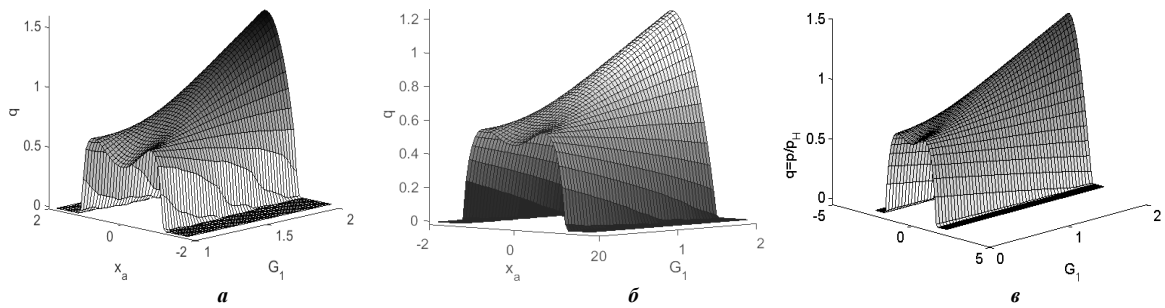


Рисунок 32 – Зміна характеру розподілу контактної тиску залежно від параметра  $G_1$  для різних значень параметра  $\lambda$ :  
 $a - \lambda = 0$ ;  $b - \lambda = 5$ ;  $v - \lambda = 10$

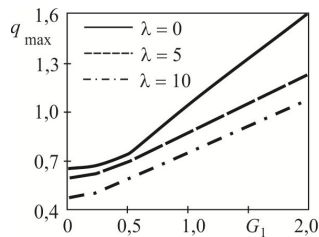


Рисунок 33 – Зміна максимального значення контактної тиску залежно від параметра  $G_1$  для різних значень параметра  $\lambda$ :  $a - \lambda = 0$ ;  $b - \lambda = 5$ ;  $v - \lambda = 10$

5.2. Визначення впливу форми профілю та податливості проміжного шару на характеристики контактної взаємодії. На тестовому прикладі розв'язується задача визначення впливу форми профілю та податливості проміжного шару на характеристики контактної взаємо-

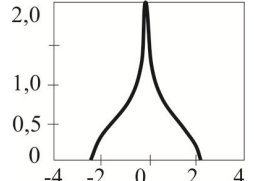
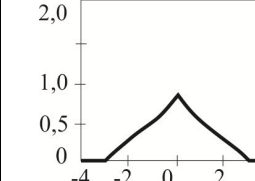
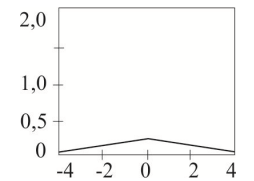
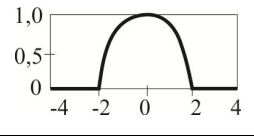
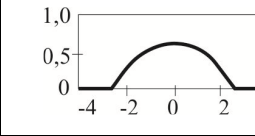
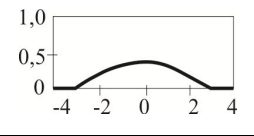
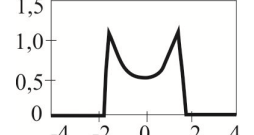
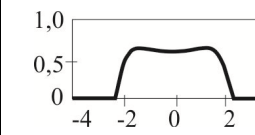
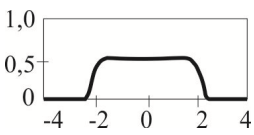
дії  $Cp + \lambda p = \delta - h$ , якщо  $h = A(r/A_0)^K$ . Розв'язується задача визначення  $p(r, K, \lambda)$ ,  $p_{max}(r, K, \lambda)$ . Вихідним є розв'язок задачі Герца  $p^H(K=2, \lambda=0)$ , а базовим – розв'язок при  $K=2, \lambda^*=5$  (відповідає шліфовці). Вводяться два види параметрів: «априорні»  $h = A(r/A_0)^K$ ,  $S_2 = \arctg(\lambda/\lambda^*)$ ,  $p = p(S_1, S_2)$  та «апостеріорні», що впливають із співвідношення  $p = p(\Theta, \varphi)$ :  $\varphi = \arctg[(\sum c_p)/\delta]$ ;  $\theta = \arccos[(\sum h)/\delta]$

У табл. 2, 3 наведені отримані картини розподілів переміщень, викликаних «локальними» та «глобальними» податливостями контактуючих тіл, а також розподіли контактної тиску.

Таблиця 2 – Глобальні (штрих) і локальні (штрих-пунктир) переміщення при різних значеннях  $K$  та  $S_1$

Значення параметрів		Глобальні і локальні переміщення	Значення параметрів	Глобальні і локальні переміщення	Значення параметрів	Глобальні і локальні переміщення
		$\lambda=0$			$\lambda=50$	$\lambda=100$
$K=1.1/S_1=0.503$	$S_2=0,$ $\Theta=0.889,$ $\varphi=1.57$		$S_2=1.531,$ $\Theta=0.735,$ $\varphi=0.816$		$S_2=1.551,$ $\Theta=0.739,$ $\varphi=0.674$	
	$S_2=0,$ $\Theta=0.969,$ $\varphi=1.57$		$S_2=1.531,$ $\Theta=0.804,$ $\varphi=0.774$		$S_2=1.551,$ $\Theta=0.775,$ $\varphi=0.645$	
	$S_2=0,$ $\Theta=1.048,$ $\varphi=1.57$		$S_2=1.531,$ $\Theta=0.865,$ $\varphi=0.742$		$S_2=1.551,$ $\Theta=0.840,$ $\varphi=0.609$	
	$S_2=0.785,$ $\Theta=1.250,$ $\varphi=1.139$		$S_2=1.531,$ $\Theta=1.165,$ $\varphi=0.641$		$S_2=1.551,$ $\Theta=1.143,$ $\varphi=0.499$	

Таблиця 3 – Залежності відносного контактної тиску  $q$  при різних значеннях  $K$  та  $S_1$ 

Значення параметрів	Залежність відносного контактної тиску	Значення параметрів	Залежність відносного контактної тиску	Значення параметрів	Залежність відносного контактної тиску
<b><math>K = 1.1 / S_1 = 0.503</math></b>					
$\lambda=0$ $S_2=0,$ $\Theta=0.889,$ $\varphi=1.57$		$\lambda=10 /$ $S_2=1.07; \Theta=0.804,$ $\varphi=1.110$		$\lambda=100 /$ $S_2=1.551;$ $\Theta=0.739,$ $\varphi=0.674$	
<b><math>K = 2 / S_1 = 0.785</math></b>					
$\lambda=0 /$ $S_2=0, \Theta=1.048$ $\varphi=1.57$ <i>Модель Герца</i>		$\lambda=20 /$ $S_2=1.471,$ $\Theta=0.912$ $\varphi=0.924$		$\lambda=50 / S_2=1.531,$ $\Theta=0.865$ $\varphi=0.742$	
<b><math>K = 8 / S_1 = 1.326</math></b>					
$\lambda=0 / S_2=0,$ $\Theta=1.332$ $\varphi=1.57$		$\lambda=50 /$ $S_2=1.531,$ $\Theta=1.165$ $\varphi=0.641$		$\lambda=100 /$ $S_2=1.551,$ $\Theta=1.143$ $\varphi=0.499$	

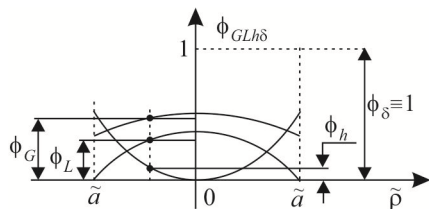
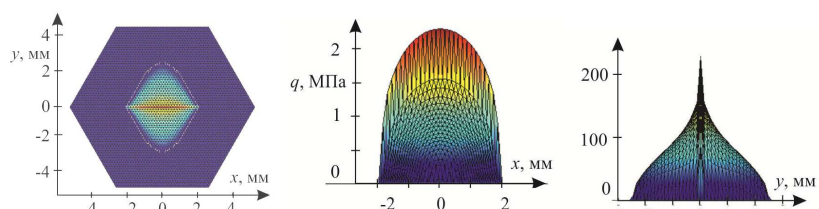


Рисунок 34 – До балансу нормальних переміщень у контакті СПТ із проміжним шаром

Рисунок 35 – Розподіл контактної тиску у сполученні складнопрофільних тіл ( $K=2; L=1.1$ )

Аналіз наведених розподілів свідчить про сильний вплив форми розподілу зазору та фізико-механічних властивостей проміжних шарів на баланс вкладу «локальної» та «глобальної» податливості контактуючих тіл сумісно із зазором у загальне зближення контактуючих тіл, а також на характер розподілу та рівень контактної тиску. Таким чином, шляхом варіювання цими величинами можна впливати на властивості розподілу контактних зусиль, а, відповідно, і на НДС контактуючих складнопрофільних тіл.

Подавши баланс відносних до  $\delta$  переміщень у контакті у вигляді  $\phi_G + \phi_L + \phi_h = \phi_\delta$ , графічно цей відносний баланс внеску окремих  $\phi_*$  можна ілюструвати картиною на рис. 34. Тут  $\tilde{r} = r/a_H$  – поточна відносна радіальна координата, де  $a_H$  – радіус області контакту для випадку контакту гладких тіл (задача Герца). Для конкретного набору властивостей проміжного шару відносний радіус цієї області контакту  $\tilde{a}(\lambda) = a(\lambda)/a_H = a(\lambda)/a(0) \geq 1$ .

**5.3 Вплив різного розподілу зазору у різних напрямках на контактний тиск у сполученні складнопрофільних тіл.** Розглядається задача визначення контактної тиску між складнопрофільними тілами, зазор між якими має вигляд  $h = U(x/a)^K + V(y/b)^L$ . Тут  $K$  і  $L$  – ступені розподілів зазорів у перерізах  $y=0$  та  $x=0$ .

На рис. 35, 36 наведені характерні розподіли контактної тиску. Вони свідчать про різкий вплив

параметрів  $K$  та  $L$  на характер розподілу контактної тиску. Це дає підстави стверджувати, що варіюванням цих параметрів можна управляти розподілом контактної тиску, а, відповідно, – і напружено-деформованим станом контактуючих складнопрофільних тіл.

**5.4. Вплив збурення форми зазору в окружному напрямку на розподіл контактної тиску у сполученні складнопрофільних тіл.** Як свідчать результати попередніх досліджень, описаних вище, на розподіл контактної тиску чинять сильний вплив різні величини. Зокрема, це стосується розподілу зазору між контактуючими тілами. Як один із частинних випадків у цьому підрозділі розглядається закон зміни крутизни зазору в коловому напрямку:

$$h = U(r/a)^S, \quad S = 2 + \varepsilon \cdot \sin(n\varphi). \quad (95)$$

Тут  $\varphi$  – кут між віссю  $x$  та радіус-вектором поточної точки;  $n=2$ ;  $\varepsilon$  – варійований параметр.

На рис. 37 наведені картини розподілу контактної тиску при різних параметрах  $\varepsilon$ . Спостерігається суттєва зміна форми розподілу контактної тиску залежно від  $\varepsilon$ . Зміна розподілу контактної тиску при варіюванні притискного зусилля  $P$  ( $\varepsilon=1$ ) проілюстрована на рис. 38. На рис. 39 наведені зміни контактної тиску та плями контакту при варіюванні  $\varepsilon$  порівняно із задачею Герца ( $\varepsilon=0$ ), а на рис. 40 – розподіли контактної тиску при різних значеннях  $n$  у (95).

Наведені результати підтверджують сильний вплив на розподіл контактної тиску форми зазору між контактуючими тілами.

Крім проведених досліджень, додатково було досліджено вплив властивостей пружного шару ( $\lambda$ ) та модуля пружності контактуючих тіл ( $E$ ) на розподіл контактної тиску між складнопрофільними тілами при зафіксованій області контакту. Розглядалися випадки заданого зближення  $\Delta$  (Delta) та притискового зусилля  $p$ .

Аналіз розподілу контактної тиску та його збурення при варіюванні  $\lambda$  та  $E$  наведені на рис. 41–44.

Таким чином, отримані якісні та кількісні характеристики зміни контактної тиску при варіюванні певних параметрів.

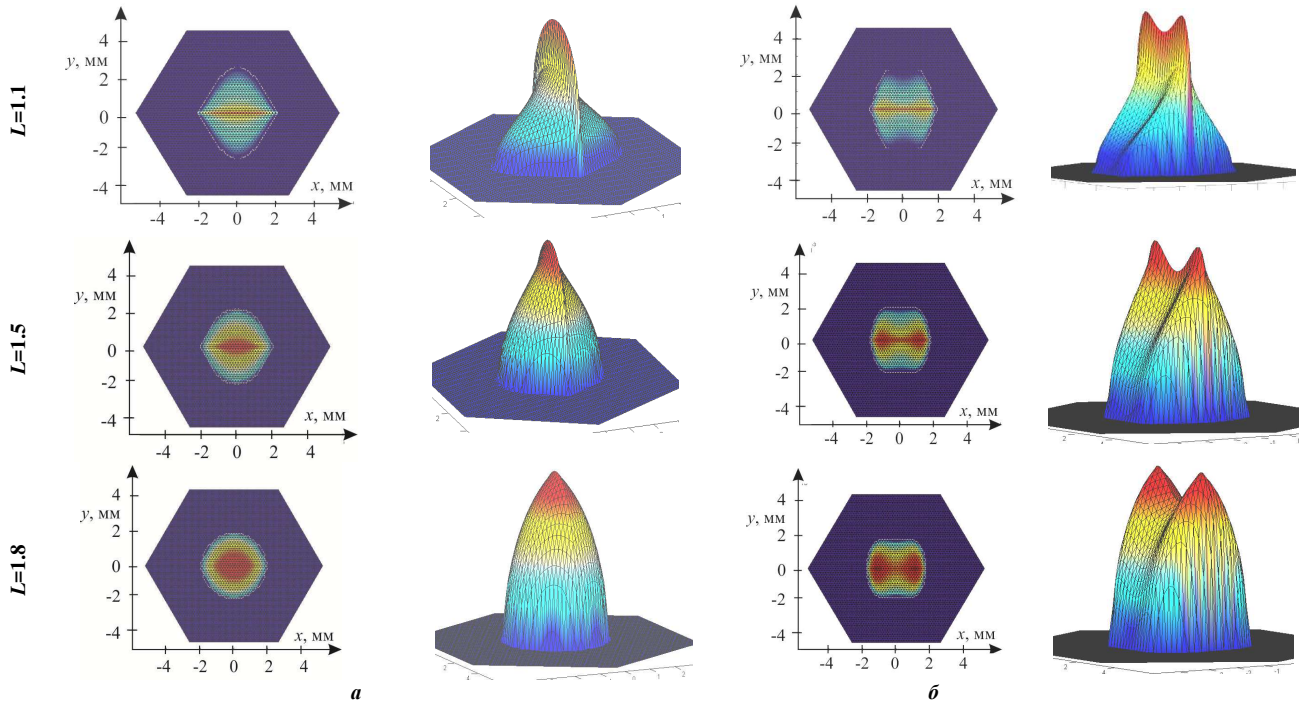


Рисунок 36 – Розподіл контактної тиску у сполученні складнопрофільних тіл для різних значень  $K$  та  $L$ :  
 а –  $K = 2$ ; б –  $K = 4$

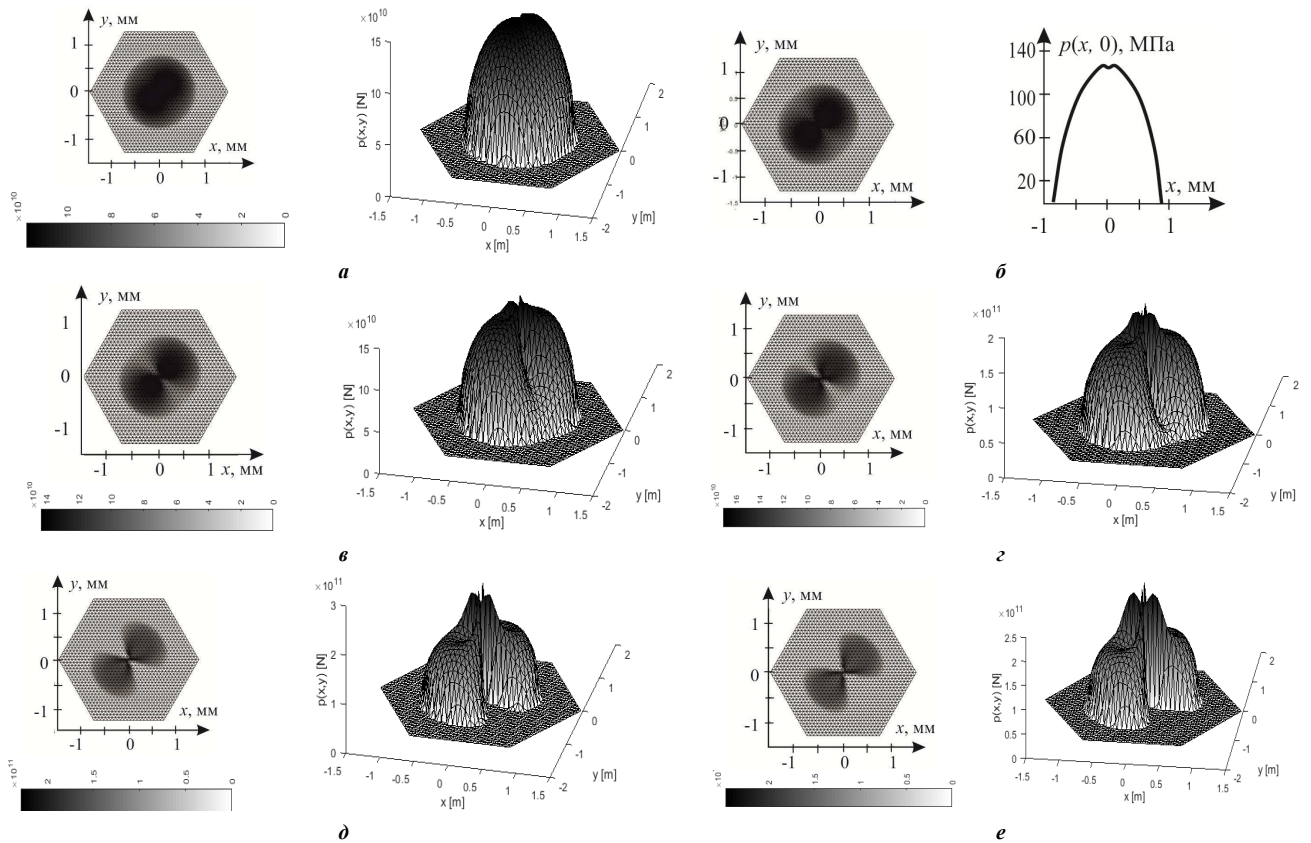


Рисунок 37 – Розподіл контактної тиску при варіюванні  $\epsilon$ :  
 а –  $\epsilon = 0.25$ ; б –  $\epsilon = 0.5$ ; в –  $0.75$ ; г –  $1.0$ ; д –  $1.5$ ; е –  $2.0$

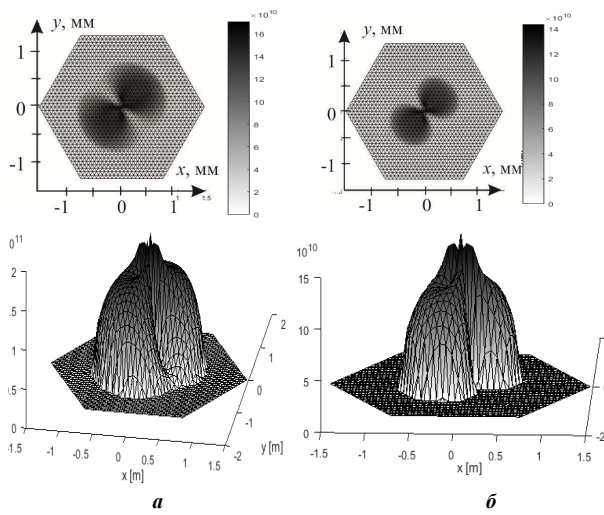


Рисунок 38 – Зміна розподілу контактного тиску при варіюванні притискового зусилля  $P$  при  $\epsilon = 1$ :  $a$  – для випадку  $P$ ;  $b$  – для випадку  $0.5P$

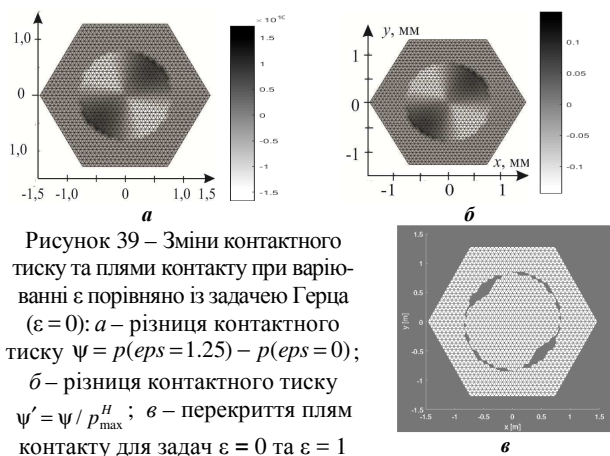


Рисунок 39 – Зміни контактного тиску та плями контакту при варіюванні  $\epsilon$  порівняно із задачею Герца ( $\epsilon = 0$ ):  $a$  – різниця контактного тиску  $\psi = p(\epsilon = 1.25) - p(\epsilon = 0)$ ;  $b$  – різниця контактного тиску  $\psi' = \psi / p_{max}^H$ ;  $c$  – перекриття плям контакту для задач  $\epsilon = 0$  та  $\epsilon = 1$

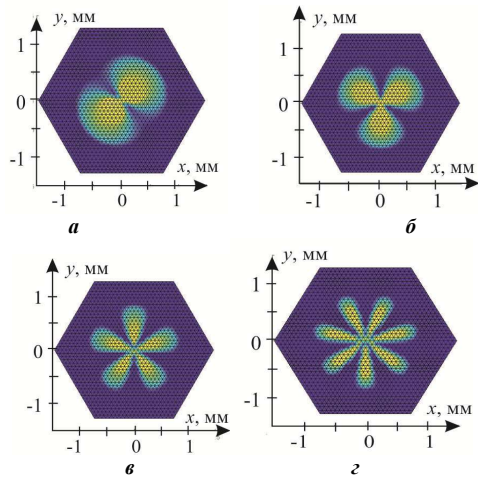


Рисунок 40 – Розподіл контактного тиску при різних кількостях пелюсток у окружному розподілі зазору:  $a - n = 2$ ;  $b - n = 3$ ;  $c - n = 5$ ;  $d - n = 7$

5.5. Особливості визначених закономірностей впливу різних факторів на контактну взаємодію складнопрофільних тіл. Основною задачею проектних досліджень машинобудівних конструкцій є обґрунтування оптимальних технічних рішень за рівнем технічних і тактико-технічних характеристик машин, у т.ч. за навантажувальною здатністю, міцністю, довговічністю тощо. У цьому наборі задач особливого значення

набуває задача пошуку сприятливої геометричної форми поверхонь контактуючих тіл близької форми за наявності нелінійно пружного шару між ними. Вони зводяться до різного роду обернених задач відновлення геометричної форми за різноманітними критеріями.

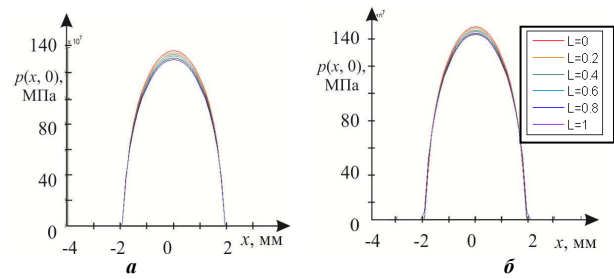


Рисунок 41 – Картини розподілу контактного тиску при варіюванні  $\lambda(L)$ :  $a - P - \text{const}$ ;  $b - \Delta - \text{const}$

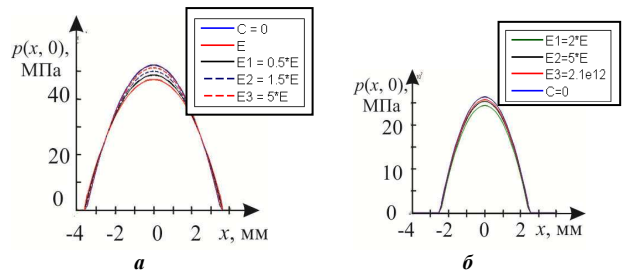


Рисунок 42 – Картини розподілу контактного тиску при варіюванні  $E$ :  $a - P - \text{const}$ ;  $b - \Delta - \text{const}$

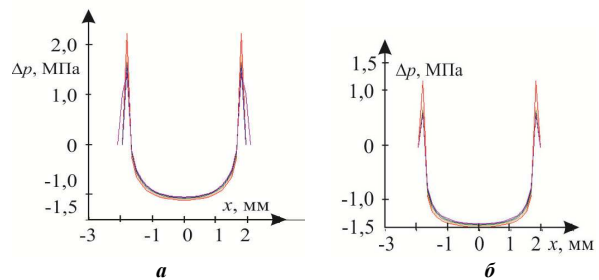


Рисунок 43 – Картини розподілу збурення контактного тиску при варіюванні  $\lambda(L)$ :  $a - P - \text{const}$ ;  $b - \Delta - \text{const}$

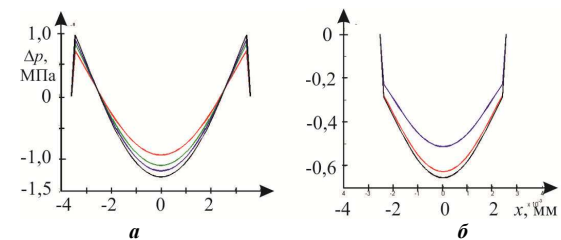


Рисунок 44 – Картини розподілу збурення контактного тиску при варіюванні  $E$ :  $a - P - \text{const}$ ;  $b - \Delta - \text{const}$

У параграфі 5 деякі аспекти виникаючих задач були розглянуті та запропоновані нові постановки і методи розв'язання виникаючих задач на окремих прикладах.

При цьому отримані наступні результати, що дають можливість зробити низку висновків.

1. Прагнення забезпечити різні задані види руху у сполученнях деталей машин формує кінематичні вимоги, які служать вихідними при розв'язанні задач відновлення форми і формоутворення контактуючих поверхонь. Ця задача поставлена у загальному вигляді

у зв'язці із задачею визначення контактної тиску і контактних площадок у сполученні контактуючих тіл.

2. Для формування зв'язаної задачі аналізу контактної взаємодії та синтезу геометричної форми поверхонь контактуючих тіл у роботі запропоновано використовувати єдину систему розв'язувальних рівнянь і нерівностей на основі варіаційних постановок. Ця система співвідношень містить усі види відомостей: про фізико-механічні властивості контактуючих тіл і нелінійних шарів між ними, про навантаження, про зближення, про контактний тиск і притискні зусилля тіл. При цьому, приймаючи як задані та шукані різні набори змінних, удається на єдиній базі співвідношень будувати розв'язки і прямої, і оберненої задачі, що є перевагою постановки. Недоліком же є не цілком гладкі одержувані розв'язки обернених задач синтезу геометричної форми.

3. При розв'язанні задач про контактну взаємодію СПТ чутливість розподілу контактної тиску на варіювання певних параметрів визначено, що реакція системи може бути подана у вигляді двох процесів: деформування контактної плями (за формою та розмірами) та зміна куполу розподілу.

4. У ході розв'язання низки тестових задач установлені особливості зміни областей контактування складнопрофільних тіл і закону розподілу контактної тиску від варіювання форми зазору між СПТ та властивостей матеріалу проміжного шару між ними.

Таким чином, запропоновані нові постановки, моделі та методи розв'язання задач обґрунтування геометричної форми контактуючих СПТ близької форми, а також форми і властивостей матеріалів проміжних шарів між ними за критеріями міцності.

**Висновки.** У статті міститься вирішення актуальної наукової проблеми механіки деформівного твердого тіла, яка полягає у створенні теоретичних основ механіки контактної взаємодії пружних тіл із урахуванням мікромеханічних моделей шорсткості та інших проміжних або поверхневих шарів.

Аналіз розроблених підходів, моделей, методів та установлених за їх допомогою закономірностей дає можливість зробити такі висновки.

1. Натепер відсутні універсальні методи та моделі контактної взаємодії складнопрофільних тіл із адекватним урахуванням чинників, які набули нагального впливу на їх напружено-деформований стан, зокрема, – фізично нелінійні властивості шорсткості та проміжних шарів між контактуючими поверхнями цих тіл. Разом із тим широке розповсюдження СПТ, що на практиці знаходяться у контактній у складі машинобудівних конструкцій, потребує таких розробок. Для вирішення протиріччя, що склалося, необхідне створення теоретичних основ та засобів моделювання аналізу контактної взаємодії та НДС елементів машинобудівних конструкцій із урахуванням фізично нелінійних проміжних або поверхневих шарів. Означені проблемні напрямки склали мету та зміст роботи.

2. Для вирішення сформульованих проблем розроблено загальний підхід, який базується на поєднанні мікро-макромасштабних моделей НДС контактуючих елементів машинобудівних конструкцій із шорсткою поверхнею та проміжним шаром на поверхні. У математичному плані розроблені варіаційні формулювання

поставлених задач, які зводяться до проблеми пошуку екстремумів нелінійних функціоналів.

3. Розроблені методи і моделі для дослідження контактної взаємодії СПТ із урахуванням мікромеханічних властивостей поверхневих і проміжних шарів, які визначають їхню локальну контактну нелінійну жорсткість. У результаті одержано структурно-фізично нелінійні співвідношення. Для них розроблена слабка постановка, що зводиться до пошуку екстремуму модифікованого функціоналу додаткової енергії, визначеного на розподілах контактної тиску. Із застосуванням методу граничних елементів отримано дискретну форму розв'язувальних рівнянь та нерівностей. Для їх задоволення розроблено методи додаткових зазорів та змінних параметрів податливості. Вони зводять структурно-фізично нелінійну задачу до послідовності структурно нелінійних, проте фізично лінійних задач, а для розв'язання таких задач можна застосувати уже розроблені раніше методи. Також розроблено метод поетапного розширення множини чинників, які можуть бути ураховані при розв'язанні контактних задач шляхом почергового додавання відповідних додаткових чинників у нелінійний функціонал додаткової енергії. У кінцевому підсумку розроблений комплекс підходів, методів та моделей дає можливість, на відміну від традиційних, більш ефективно, адекватно і точно моделювати контактну взаємодію СПТ. При цьому установлені якісно нові закономірності впливу на розподіл контактної тиску профілю контактуючих тіл та властивостей проміжного шару. Зокрема, для нелінійно пружно-жорсткого шару спостерігається комбінація еліпсоїдальної та параболоїдальної розподілів із перехідною поверхнею між ними. Також проміжний шар згладжує розподіл контактної тиску та розширює область контакту. У ході розв'язання низки тестових задач продемонстровано точність та збіжність розроблених методів досліджень типу методів додаткових зазорів та змінних параметрів податливості.

4. Розроблено єдину систему розв'язувальних співвідношень для аналізу, з одного боку, НДС та контактної тиску у спряженні складнопрофільних тіл, а з іншого – для обґрунтування геометричної форми їх поверхонь та властивостей проміжних шарів. Це дає можливість розв'язувати обернені задачі синтезу геометричної форми СПТ із умов реалізації заданого розподілу контактної тиску.

5. Визначені особливості розподілу контактної тиску у спряженні контактуючих СПТ. Установлені закономірності впливу різних чинників на контактний тиск і контактні області. Обґрунтовані узагальнені рекомендації щодо технічних рішень для елементів машинобудівних конструкцій, що забезпечують їх міцність.

У подальшому пропонується поширити розроблений підхід, моделі та методи досліджень на широкий клас прикладних задач.

#### Список літератури

1. Johnson, K. L. *Contact Mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1987. 464 p.
2. Ткачук М. М. *Мікромеханічні моделі та методи осереднення властивостей матеріалів мережевої структури та проміжних шарів контактуючих тіл*. Дис... на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, 2019. 445 С
3. Ткачук М. М., Грабовський А. В., Скрипченко Н. Б., Ткачук М. А.,

- Кротенко Г.А., Саверська М. С. Контактна взаємодія складнопрофільних тіл за наявності між ними проміжних шарів із нелінійними властивостями. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: *Машинознавство та САПР*. 2019. № 7(1332). С. 116–133
4. Popov, Valentin L.; Heß, Markus; Willert, Emanuel (2019). *Handbook of Contact Mechanics: Exact Solutions of Axisymmetric Contact Problems*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. 347 p.
  5. Vollebregt E.A.H. 100-fold speed-up of the normal contact problem and other recent developments in «CONTACT». *Proceedings of the 9th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems*. China. 2012, vol. 96, pp. 201–209.
  6. Li J., E.J. Berger A semi-analytical approach to tree-dimensional normal contact problems with friction. *Computational Mechanics*. 2003, vol.30, pp. 310–322.
  7. Kalker J.J. Variational principles of contact elastostatics. *J. Inst. Math. and Appl.* 1977, vol. 20, pp. 199–221.
  8. Решетов Д.Н., Портман В.Т. *Точность металлорежущих станков*. Москва: Машиностроение, 1986. 336 с.
  9. Ciavarella M., C. Murolo, G. Demelio On the elastic contact of rough surfaces: Numerical experiments and comparisons with recent theories. *Wear*. 2006, vol. 261, pp. 1102–1113.
  10. Maute K., Tkachuk A., Wu J., Qi H. J., Ding Z., Dunn M. L. Level set topology optimization of printed active composites. *Journal of Mechanical Design*. 2015, vol. 137(11), pp. 111402.
  11. Makhija D., K. Maute Numerical instabilities in level set topology optimization with the extended finite element method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2014, vol. 49(2), pp. 185–197.
  12. Wang Y., Z. Luo, N. Zhang, Z. Kang Topological shape optimization of microstructural metamaterials using a level set method. *Computational Materials Science*. 2014, vol. 87, pp. 178–186
  13. Allaire G., C. Dapogny, P. Frey Shape optimization with a level set based mesh evolution method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2014. Vol. 282. P. 22–53.
  14. Myśliński A. Piecewise constant level set method for topology optimization of unilateral contact problems. *Advances in Engineering Software*. 2015. Vol. 80. P. 25–32
  15. Rao J.S. Optimization. *In History of rotating machinery dynamics*. Springer, Dordrecht, 2011. P. 341–351.
  16. Lazarov B.S., F. Wang Maximum length scale in density based topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2017, vol. 318, pp. 826–844.
  17. Lambé A.B., A. Czekanski Topology optimization using a continuous density field and adaptive mesh refinement. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2017. Vol 113. Iss. 3. P 357–373.
  18. Коротков В. А. *Износостойкость машин*. Москва: DirectMEDIA, 2014. 67 с.
  19. Ciavarella M., JA Greenwood, M. Paggi Inclusion of «interaction» in the greenwood and williamson contact theory. *Wear*. 2008. vol. 265(5), pp. 729–734.
  20. Paggi M., M. Ciavarella The coefficient of proportionality  $\kappa$  between real contact area and load, with new asperity models. *Wear*. 2010. vol. 268(7), pp. 1020–1029.
  21. Yang C., BNJ Persson Contact mechanics: contact area and interfacial separation from small contact to full contact. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2008, Vol. 20(21), pp. 215214.
  22. Ragnar Holm. *Electric contacts: theory and application*. Springer Science & Business Media, 2013.
  23. Nayak P.R. Random Process Model of Rough Surfaces. *Journal of Lubrication Technology*. 1971, vol. 93(3), pp.398–407
  24. Paggi M., JR Barber Contact conductance of rough surfaces composed of modified rnd patches. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2011, vol. 54(21), pp. 4664–4672.
  25. Zavarise G., M. Borri-Brunetto, M.Paggi On the resolution dependence of micromechanical contact models. *Wear*. 2007, vol. 262(1), pp. 42–54.
  26. Barber JR. Bounds on the electrical resistance between contacting elastic rough bodies. *In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society, 2003, vol. 459, pp. 53–66.
  27. Persson BNJ. Elastoplastic contact between randomly rough surfaces. *Physical Review Letters*. 2001, vol. 87(11), pp. 116101.
  28. Martyniak RM, Prokopyshyn IA, Prokopyshyn II Contact of elastic bodies with nonlinear Winkler surface layers, *Journal of Mathematical Sciences*. Springer US. 2015. T. 205, vol. 4, pp. 535–553
  29. Panagiotopoulos, P.D. (2001), *Variational inequalities, Encyclopedia of Mathematics, EMS Press*
  30. Archard JF. Elastic deformation and the laws of friction. *In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society 1957. vol. 243, pp. 190–205.
  31. Greenwood JA, JB PI Williamson Contact of nominally flat surfaces. *In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society. 1966, vol. 295, pp. 300–319.
  32. Greenwood JA. A simplified elliptic model of rough surface contact. *Wear*. 2006, vol. 261(2), pp. 191–200.
  33. McCool John I. Non-gaussian effects in microcontact. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*. 1992, vol. 32(1–2), pp. 115–123.
  34. Ciavarella M., G Demelio, JR Barber, Yong Hoon Jang Linear elastic contact of the weierstrass profile. *In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society, 2000, vol. 456, pp. 387–405
  35. Persson BNJ Theory of rubber friction and contact mechanics. *The Journal of Chemical Physics*. 2001, vol. 115(8), pp. 3840–3861.
  36. Persson BNJ, F. Bucher, Bernardino Chiaia Elastic contact between randomly rough surfaces: comparison of theory with numerical results. *Physical Review B*. 2002, vol. 65(18), pp. 184106.
  37. Ciavarella M., G. Murolo, G. Demelio, JR Barber Elastic contact stiffness and contact resistance for the weierstrass profile. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2004., vol.52(6), pp. 1247–1265.
  38. Ciavarella M., S. Dibello, G. Demelio Conductance of rough random profiles. *International Journal of Solids and Structures*. 2008, vol. 45(3), pp. 879–893.
  39. Pohrt R., V. L. Popov Contact mechanics of rough spheres: Crossover from fractal to hertzian behavior. *Hindawi Publishing Corporation Advances in Tribology*. 2013, vol. 2013, Article ID 974178, 4 p.
  40. Pastewka L., M. O Robbins, Bo NJ Persson Finite-size scaling in the interfacial stiffness of rough elastic contacts. *Physical Review E Staff*. 2013, vol. 87(6), pp. 062809.
  41. Pastewka L., N. Prodanov, B. Lorenz, M. H Müser, M. O Robbins, BNJ Persson Finite-size scaling in the interfacial stiffness of rough elastic contacts. *Physical Review E*. 2013. VOL.87(6). P. 062809
  42. Pohrt R., V. L. Popov Contact stiffness of randomly rough surfaces. *Scientific reports*, 2013, vol. 3, 6 p.
  43. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. *Основы расчета на трение и износ*. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
  44. Barber J.R. *Contact Mechanics. Том 250: Solid Mechanics and Its Applications*. Springer International Publishing, 2019. 585 p.
  45. Аргатов И.И., Дмитриев Н.Н. *Основы теории упругого дискретного контакта*. Санкт-Петербург: Политехника, 2003. 233 с.
  46. Vakis A.I., V.A. Yastrebov, J. Scheibert, L. Nicola, D. Dini, C. Minfray [and others]. Modeling and simulation in tribology across scales: An overview, *Tribology International*, 2018, vol. 125, pp. 169–199.
  47. Li, Q., Pohrt, R., Lyashenko, I. A., Popov, V. L. (2018). Boundary element method for nonadhesive and adhesive contacts of a coated elastic half-space. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 1350650119854250.
  48. Joe, J., Thouless, M. D., Barber, J. R. (2018). Effect of roughness on the adhesive tractions between contacting bodies. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 118, 365–373.
  49. Li, Q., Popov, V. L. (2019). Adhesive contact between a rigid body of arbitrary shape and a thin elastic coating. *Acta Mechanica*, 1–7.
  50. Ciavarella, M., Joe, J., Papangelo, A., Barber, J. R. (2019). The role of adhesion in contact mechanics. *Journal of the Royal Society Interface*, 16(151), 20180738.
  51. Greenwood, J. A. (2017). Reflections on and extensions of the Fuller and Tabor theory of rough surface adhesion. *Tribology Letters*, 65(4), 159.
  52. Papangelo, A., Scheibert, J., Sahl, R., Pallares, G., Ciavarella, M. (2019). Shear-induced contact area anisotropy explained by a fracture mechanics model. *Physical Review E*, 99(5), 053005.
  53. Liu, J., Ke, L., & Zhang, C. (2021). Axisymmetric thermoelastic contact of an FGM-coated half-space under a rotating punch. *Acta Mechanica*, 232(6), 2361–2378.
  54. Liu, T. J., Yang, F., Yu, H., & Aizikovich, S. M. (2021). Axisymmetric adhesive contact problem for functionally graded materials coating based on the linear multi-layered model. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 49(1), 41–58.
  55. Çómez, İ., & Omurtag, M. H. (2021). Contact problem between a rigid punch and a functionally graded orthotropic layer resting on a Pasternak foundation. *Archive of Applied Mechanics*, 91(9), 3937–3958.
  56. Argatov, I., & Papangelo, A. (2021). Axisymmetric JKR-type adhesive contact under equibiaxial stretching. *The journal of adhesion*, 97(2), 140–154.
  57. Argatov, I. I. (2021). Controlling the adhesive pull-off force via the change of contact geometry. *Philosophical Transactions of the Royal*

- Society A*, 379(2203), 20200392.
58. Ciavarella, M., & Papangelo, A. (2021). On the interaction of viscoelasticity and waviness in enhancing the pull-off force in sphere/flat contacts. *Tribology Letters*, 69(4), 1–11.
  59. Papangelo, A., & Ciavarella, M. (2022). Viscoelastic dissipation in repeated normal indentation of an Hertzian profile. *International Journal of Solids and Structures*, 236, 111362.
  60. Müser, M. H., & Persson, B. N. (2022). Crack and pull-off dynamics of adhesive, viscoelastic solids. *Europhysics Letters*, 137(3), 36004.
  61. Streliaiev, Y., Martynyak, R., & Chumak, K. (2021). Thermomechanical Slip in Elastic Contact Between Identical Materials. *Acta mechanica et automatica*, 15(4), 187–192.
  62. Васидзу К. *Вариационные методы в теории упругости и пластичности*. Москва: Мир, 1987. 542с.
- References (transliterated)**
1. Johnson, K. L. (1987). *Contact Mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 464 p.
  2. Tkachuk M. M. (2019). Micromechanical models and methods for averaging the power of materials in the mesh structure and intermediate balls of contacting bodies. Dissertation... at the scientific level of the doctor of technical sciences for the specialty 01.02.04 – mechanics of a deformable solid body. Institute of Problems of Machine Building named after A.M. Pidgorny National Academy of Sciences of Ukraine, [Mikromekhanichni modeli ta metody oserednennia vlastyvoستي materialiv mrezhevoi struktury ta promizhnykh shariv kontaktuiuchykh til]. Kharkiv, 445 p.
  3. Tkachuk M. M., Hrabovskiy A. V., Skripchenko N. B., Tkachuk M. A., Krotenko H.A., Saverska M. S. (2019). Contact for the interplay of folding profile bodies for the presence of intermediary balls between them from non-linear powers. [Kontaktna vzaiemodiia skladnoprofilnykh til za naiavnosti mizh nymy promizhnykh shariv iz neliniinymy vlastyvostiamy]. *Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Seriya: Mashynoznavstvo ta SAPR*, vol. 7(1332), pp. 116-134.
  4. Popov, Valentin L.; Heß, Markus; Willert, Emanuel (2019). *Handbook of Contact Mechanics: Exact Solutions of Axisymmetric Contact Problems*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. 347 p.
  5. Vollebregt E.A.H. (2012). 100-fold speed-up of the normal contact problem and other recent developments in «CONTACT». *Proceedings of the 9th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems*. China, vol. 96, pp. 201–209.
  6. Li J., E.J. Berger (2003). A semi-analytical approach to tree-dimensional normal contact problems with friction. *Computational Mechanics*, vol. 30, pp. 310–322.
  7. Kalker J.J. (1977). Variational principles of contact elastostatics. *J. Inst. Math. and Appl.*, vol. 20, pp. 199–221.
  8. Reshetov D.N., Portman V.T. (1986). *Precision of metal cutting machines [Tochnost' metallorezhushchikh stankov]*, Moscow, Mashinostroenie, 336 p.
  9. Ciavarella M., Murolo C., Demelio G. (2006). On the elastic contact of rough surfaces: Numerical experiments and comparisons with recent theories. *Wear*, vol. 261, pp. 1102–1113.
  10. Maute K., Tkachuk A., Wu J., Qi H. J., Ding Z., Dunn M. L. (2015). Level set topology optimization of printed active composites. *Journal of Mechanical Design*, vol. 137(11), pp. 111402.
  11. Makhija D., Maute K. (2014). Numerical instabilities in level set topology optimization with the extended finite element method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 49(2), pp. 185–197.
  12. Wang Y., Z. Luo, N. Zhang, Z. Kang (2014). Topological shape optimization of microstructural metamaterials using a level set method. *Computational Materials Science*, vol. 87, pp. 178–186
  13. Allaire G., Dapogny C., Frey P. (2014). Shape optimization with a level set based mesh evolution method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 282, pp. 22–53.
  14. Myśliński A. (2015). Piecewise constant level set method for topology optimization of unilateral contact problems. *Advances in Engineering Software*, vol. 80, pp. 25–32
  15. Rao J.S. (2011). Optimization. In *History of rotating machinery dynamics*. Springer, Dordrecht, pp. 341-351.
  16. Lazarov B.S., Wang F. (2017). Maximum length scale in density based topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 318, pp. 826–844.
  17. Lambe A.B., Czekanski A. (2017). Topology optimization using a continuous density field and adaptive mesh refinement. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 113, iss. 3, pp. 357–373.
  18. Korotkov V. A. (2014). *Wear resistance of machines [Yznosostoikost mashyn]*, Moscow, DirectMEDIA, 67 p.
  19. Ciavarella M., Greenwood JA, Paggi M. (2008). Inclusion of «interaction» in the greenwood and williamson contact theory. *Wear*, vol. 265(5), pp. 729–734.
  20. Paggi M., Ciavarella M. (2010). The coefficient of proportionality  $\kappa$  between real contact area and load, with new asperity models. *Wear*, vol. 268(7), pp. 1020–1029.
  21. Yang C., BNJ Persson (2008). Contact mechanics: contact area and interfacial separation from small contact to full contact. *Journal of Physics: Condensed Matter*, vol. 20(21), pp. 215214.
  22. Ragnar Holm. *Electric contacts: theory and application*. Springer Science & Business Media, 2013.
  23. Nayak P.R. (1971). Random Process Model of Rough Surfaces. *Journal of Lubrication Technology*, vol. 93(3), pp.398–407
  24. Paggi M., Barber JR (2011). Contact conductance of rough surfaces composed of modified rnd patches. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 54(21), pp. 4664–4672.
  25. Zavarise G., Borri-Brunetto M., Paggi M. (2007). On the resolution dependence of micromechanical contact models. *Wear*, vol. 262(1), pp. 42–54.
  26. Barber JR. (2003). Bounds on the electrical resistance between contacting elastic rough bodies. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society, vol. 459, pp. 53–66.
  27. Persson BNJ. (2001). Elastoplastic contact between randomly rough surfaces. *Physical Review Letters*, vol. 87(11), pp. 116101.
  28. Martynyak RM, Prokopyshyn IA, Prokopyshyn II (2015). Contact of elastic bodies with nonlinear Winkler surface layers. *Journal of Mathematical Sciences*. Springer US, T. 205, vol. 4, pp. 535-553
  29. Panagiotopoulos, P.D. (2001) [1994], *Variational inequalities, Encyclopedia of Mathematics, EMS Press*
  30. Archard JF. (1957). Elastic deformation and the laws of friction. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society, vol. 243, pp. 190–205.
  31. Greenwood JA, JB PI Williamson (1966). Contact of nominally flat surfaces. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society, vol. 295, pp. 300–319.
  32. Greenwood JA. (2006). A simplified elliptic model of rough surface contact. *Wear*, vol. 261(2), pp. 191–200.
  33. McCool John I. (1992). Non-gaussian effects in microcontact. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, vol. 32(1–2), pp. 115–123.
  34. Ciavarella M., G Demelio, JR Barber, Yong Hoon Jang (2000). Linear elastic contact of the weierstrass profile. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society, vol. 456, pp. 387–405
  35. Persson BNJ (2001). Theory of rubber friction and contact mechanics. *The Journal of Chemical Physics*, vol. 115(8), pp. 3840–3861.
  36. Persson BNJ, F. Bucher, Bernardino Chiaia (2002). Elastic contact between randomly rough surfaces: comparison of theory with numerical results. *Physical Review B*, vol. 65(18), pp. 184106.
  37. Ciavarella M., G. Murolo, G. Demelio, JR Barber (2004). Elastic contact stiffness and contact resistance for the weierstrass profile. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 52(6), pp. 1247–1265.
  38. Ciavarella M., S. Dibello, Demelio G. (2008). Conductance of rough random profiles. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45(3), pp. 879–893.
  39. Pohrt R., Popov V. L. (2013). Contact mechanics of rough spheres: Crossover from fractal to hertzian behavior. *Hindawi Publishing Corporation Advances in Tribology*, vol. 2013, Article ID 974178, 4 p.
  40. Pastewka L., M. O Robbins, Bo NJ Persson (2013). Finite-size scaling in the interfacial stiffness of rough elastic contacts. *Physical Review E Staff*, vol. 87(6), pp. 062809.
  41. Pastewka L., N. Prodanov, B. Lorenz, M. H Müser, M. O Robbins, BNJ Persson (2013). Finite-size scaling in the interfacial stiffness of rough elastic contacts. *Physical Review E*, vol. 87(6), pp. 062809
  42. Pohrt R., V. L. Popov (2013). Contact stiffness of randomly rough surfaces. *Scientific reports*, vol. 3, 6 p.
  43. Krahelsky Y.V., Dobychny M.N., Kombalov V.S. (1977). *Fundamentals of calculation for friction and wear [Osnovy rascheta na trenye y yznos]*. M. : Mashinostroeniye, 526 p.
  44. Barber J.R. (2019). *Contact Mechanics. Tom 250: Solid Mechanics and Its Applications*. Springer International Publishing, 585 p.
  45. Arhatov Y.Y., Dmytryev N.N. (2003). *Fundamentals of the theory of oprihoho discrete contact [Osnovy teoryi upruhoiho dyskretnoho kontakta]*, Sankt-Peterburh, Polytekhnika, 233 p.
  46. Vakis A.I., V.A. Yastrebov, J. Scheibert, L. Nicola, D. Dini, C. Minfray [and others] (2018). Modeling and simulation in tribology across scales:



- An overview, *Tribology International*, vol. 125, pp. 169–199.
47. Li, Q., Pohrt, R., Lyashenko, I. A., Popov, V. L. (2018). Boundary element method for nonadhesive and adhesive contacts of a coated elastic half-space. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 1350650119854250.
  48. Joe, J., Thouless, M. D., Barber, J. R. (2018). Effect of roughness on the adhesive tractions between contacting bodies. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 118, 365–373.
  49. Li, Q., Popov, V. L. (2019). Adhesive contact between a rigid body of arbitrary shape and a thin elastic coating. *Acta Mechanica*, 1–7.
  50. Ciavarella, M., Joe, J., Papangelo, A., Barber, J. R. (2019). The role of adhesion in contact mechanics. *Journal of the Royal Society Interface*, 16(151), 20180738.
  51. Greenwood, J. A. (2017). Reflections on and extensions of the Fuller and Tabor theory of rough surface adhesion. *Tribology Letters*, 65(4), 159.
  52. Papangelo, A., Scheibert, J., Sahli, R., Pallares, G., Ciavarella, M. (2019). Shear-induced contact area anisotropy explained by a fracture mechanics model. *Physical Review E*, 99(5), 053005.
  53. Liu, J., Ke, L., & Zhang, C. (2021). Axisymmetric thermoelastic contact of an FGM-coated half-space under a rotating punch. *Acta Mechanica*, 232(6), 2361–2378.
  54. Liu, T. J., Yang, F., Yu, H., & Aizikovitch, S. M. (2021). Axisymmetric adhesive contact problem for functionally graded materials coating based on the linear multi-layered model. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 49(1), 41–58.
  55. Çomez, İ., & Omurtag, M. H. (2021). Contact problem between a rigid punch and a functionally graded orthotropic layer resting on a Pasternak foundation. *Archive of Applied Mechanics*, 91(9), 3937–3958.
  56. Argatov, I., & Papangelo, A. (2021). Axisymmetric JKR-type adhesive contact under equibiaxial stretching. *The journal of adhesion*, 97(2), 140–154.
  57. Argatov, I. I. (2021). Controlling the adhesive pull-off force via the change of contact geometry. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 379(2203), 20200392.
  58. Ciavarella, M., & Papangelo, A. (2021). On the interaction of viscoelasticity and waviness in enhancing the pull-off force in sphere/flat contacts. *Tribology Letters*, 69(4), 1–11.
  59. Papangelo, A., & Ciavarella, M. (2022). Viscoelastic dissipation in repeated normal indentation of a Hertzian profile. *International Journal of Solids and Structures*, 236, 111362.
  60. Müser, M. H., & Persson, B. N. (2022). Crack and pull-off dynamics of adhesive, viscoelastic solids. *Europhysics Letters*, 137(3), 36004.
  61. Streliaiev, Y., Martynyak, R., & Chumak, K. (2021). Thermomechanical Slip in Elastic Contact Between Identical Materials. *Acta mechanica et automatica*, 15(4), 187–192.
  62. Vasyduz K. (1987). *Variational methods in the theory of elasticity and plasticity [Varyatsyonnye metody v teoryu upruhosty y plastychnosti]*, Moscow, Myr, 542 p.

Надійшла (received). 12.06.2021

#### Відомості про авторів / About the Authors

**Ткачук Микола Миколайович / Tkachuk Mykola M.** – доктор технічних наук, старший дослідник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», провідний науковий співробітник кафедри «Інформаційні технології та системи колісних і гусеничних машин ім. О. О. Морозова», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4753-4267>; тел.: (057)7076902; e-mail: [m.tkachuk@tmm-sapr.org](mailto:m.tkachuk@tmm-sapr.org)

**Пінчук Наталія Володимирівна / Pinchuk Nataliya** – кандидат фізико-математичних наук, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», старший науковий співробітник кафедри «Матеріалознавство», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0954-2266>; тел.: (057) 707-64-35; e-mail: [spiritnata@gmail.com](mailto:spiritnata@gmail.com)

**Ткачук Ганна Володимирівна / Tkachuk Ganna** – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», старший науковий співробітник кафедри «Інформаційні технології та системи колісних і гусеничних машин ім. О. О. Морозова», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0435-1847>, e-mail: [TkachuckAV@tmm-sapr.org](mailto:TkachuckAV@tmm-sapr.org).

**Клочков Ілля Євгенович / Klochkov Illia** – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», молодший науковий співробітник кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; e-mail: [s008@tmm-sapr.org](mailto:s008@tmm-sapr.org)

**Ткачук Микола Анатолійович / Tkachuk Mykola A.** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідувач кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4174-8213>; e-mail: [tma@tmm-sapr.org](mailto:tma@tmm-sapr.org)

**Грабовський Андрій Володимирович / Grabovskiy Andrey** – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», провідний науковий співробітник кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6116-0572>; e-mail: [andrej8383@gmail.com](mailto:andrej8383@gmail.com)

**Сериков Володимир Іванович / Sierykov Volodymyr** – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), доцент, старший науковий співробітник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», докторант кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-64-78; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5295-3925>; e-mail: [SerikovVI@tmm-sapr.org](mailto:SerikovVI@tmm-sapr.org).

**Гречка Ірина Павлівна / Hrechka Iryna** – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4907-9170>; тел.: (057)7076534; e-mail: [girinar7@gmail.com](mailto:girinar7@gmail.com).

**Куценко Сергій Володимирович / Kutsenko Serhii** – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин»; м. Харків, Україна; e-mail: [skutsenko@tmm-sapr.org](mailto:skutsenko@tmm-sapr.org)

**Цимбал Ганна Іванівна / Symbal Ganna** – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», провідний інженер кафедри «Інформаційні технології та системи колісних і гусеничних машин ім. О. О. Морозова», м. Харків, Україна; e-mail: [m.tkachuk@tmm-sapr.org](mailto:m.tkachuk@tmm-sapr.org)

**Коба Андрій Миколайович / Andrii Koba** – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; e-mail: [a.skoba89@gmail.com](mailto:a.skoba89@gmail.com)