

М. М. ТКАЧУК

ПРИНЦИП МІНІМУМУ ДОДАТКОВОЇ ЕНЕРГІЇ ДЛЯ КАБЕЛЬНИХ МЕРЕЖ ВІДНОСНО ВЕКТОРНОЇ ЗМІННОЇ СИЛИ

Запропоновано альтернативний підхід до варіаційної постановки задачі статичної рівноваги для кабельних мереж. Отримано спряжений принцип мінімуму стосовно силових змінних. Повний вектор сили в елементі кабеля обрано як спряжену змінну. На відміну від запропонованих раніше постановок задачі з використанням скалярної змінної осевої сили, пружна енергія зберігає найбільш загальний вигляд до останніх кроків. Вона лише має залишатися опуклою функцією вектора подовження. У результаті негладкий асиметричний відгук кабелю не проявляється у вигляді нерівності на самому початку. Замість цього він з'являється в остаточній формі функціоналу додаткової енергії, який виявляється недиференційованим для нульових сил. Таке формулювання забезпечує гнучкість і, таким чином, може бути потенційно поширене на такі явища як тертя між волокнами та адгезія.

Ключові слова: додаткова енергія, варіаційні принципи, кабельні мережі

Н. Н. ТКАЧУК

ПРИНЦИП МИНИМУМА ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ КАБЕЛЬНЫХ СЕТЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЕКТОРНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ СИЛЫ

Предложен альтернативный подход к вариационной постановке задачи статического равновесия для кабельных сетей. Получен сопряженный принцип минимума относительно силовых переменных. Полный вектор силы в элементе кабеля выбран как сопряженная переменная. В отличие от предложенных ранее постановок задачи с использованием скалярной переменной осевой силы упругая энергия сохраняет наиболее общий вид до последних шагов. Она лишь должна оставаться выпуклой функцией вектора удлинения. В результате негладкий асимметричный отклик кабеля не проявляется в виде неравенства в самом начале. Вместо этого он отражается в окончательной форме функционала дополнительной энергии, который оказывается недифференцируемым для нулевых сил. Такая формулировка обеспечивает гибкость и, таким образом, может быть потенциально распространена на такие явления как трение между волокнами и адгезией.

Ключевые слова: дополнительная энергия, вариационные принципы, кабельные сети

М. М. ТКАЧУК

COMPLEMENTARY ENERGY PRINCIPLE FOR CABLE NETWORKS IN TERMS OF FORCE VECTOR VARIABLE

An alternative approach to the variation formulation of static equilibrium problem for cable networks is proposed. The dual minimization principle is derived in terms of force variables. The full vector force in the cable member is chosen as the dual variable. Unlike the previously proposed treatments of the problem using the scalar axial force variable the elastic energy retains the most general form until the closing steps. It is only assumed to be a convex function of the member end-to-end vector. As a result the nonsmooth asymmetric response of the cable does not appear in the form of inequality in the very beginning. Instead it shows up in the final form of the complementary energy functional, which turn out to be non-differentiable for zero member forces. The kinematic relations between member elongations and nodal displacements convert into the force equilibrium conditions in terms of nodal reactions and member force vectors. The Dirichlet boundary conditions appear in the dual form as a linear term in the complementary energy functional. For the linear elastic cables this approach lead to a second-order cone optimization problem with two sets conical constraints. Such formulation provides flexibility and thus can be potentially extended to account for phenomena such as inter-fiber friction and adhesion.

Keywords: complementary energy, variational principles, cable networks

Вступ. Механічний відгук тонких кабелів відрізняється асиметрією: він є лінійним за розтягнення та є відсутнім за стиснення. Відповідно, осеова сила має злам за переходу із ненавантаженого вигнутого стану до прямолінійного натягу. У попередній оглядовій частині [1] роботи було проаналізовано підхід Канно, який подає задачу визначення статичної рівноваги мереж кабелів в межах теорії негладкого математичного програмування [2-6]. Першим кроком у цьому формулюванні недиференційованості мінімізованого функціоналу енергії деформування кабелів пропонується позбутися шляхом внесення в задачу обмежень у вигляді нерівностей. Ці нерівності пов'язують переміщення вузлів мережі зі скалярною змінною подовження окремих сегментів кабелів. Заразом ці обмеження містять кінематичні співвідношення між деформаціями на глобальному і локальному рівні вузлів та ланок мережі. Цей підхід дає змогу звести задачу статичної мереж кабелів до добре знаних форм задач конічного програмування другого порядку (SCOP: second-order cone optimization problem) для декількох практично значущих випадків.

Крім того запропоноване формулювання передбачає отримання зручних спряжених постановок відносно змінних типу сил замість переміщень. Ці задачі можуть бути розв'язано в прямій чи спряженій постановці за допомогою дієвих методів оптимізації, зокрема методами внутрішньої точки (interior-point method) [7].

В роботі пропонується альтернативний підхід до формулювання варіаційних принципів статичної рівноваги мереж кабелів, заснований на використанні векторної змінної подовження гнучких ланок. На відміну від раніш запропонованого виведення явна форма потенційної енергії розтягнутих волокон на початку залишається поза увагою. Єдина умова висувається лише щодо того, щоб вона була опуклою функцією вектора подовження. Остаточний вираз необхідно підставити лише на заключному кроці у формулюванні спряженої задачі мінімуму додаткової енергії.

В монографії [2] запропоновано одночасно прямі та спряжені постановки статичної мереж кабелів

© М. М. Ткачук, 2022

мереж. Конструкція варіаційних формулювань заснована на встановленні дуальності між еквівалентними до початкових задач конічного програмування. Тим самим вдається уникнути питань утворення дуального проміжку (duality gap) між прямими та спряженими постановками навіть у формулюваннях, де використовуються нелінійні міри деформації на кшталт деформацій Гріна-Лагранжа. Ця математична єдність простежується для усіх досліджених частинних випадків. В роботах [3, 4] формулювання поширене на явища контакту та тертя між кабелями. Роботи [5, 6] містять докладне математичне доведення коректності цих постановок до задач конічного програмування.

Водночас, природа кабельних мереж є доволі різноманітною, та існуючі моделі та методи не охоплюють повністю відмінності деформування, що зустрічаються на практиці. Зокрема, існує широкий клас нетканних матеріалів, утворених випадковим поєднанням тонких волокон [8]. Їхні механічні властивості істотно залежать від геометричної структури, відносного розташування волокон та місць їх поєднання [9]. Разом із тим адгезія та тертя між волокнами є ключовими механізмами, які визначають податливість та міцність цих матеріалів [10, 11]. Параметри, які впливають на непружну поведінку таких матеріалів, досліджувалися в роботах [12, 13]. Широке застосування нетканних матеріалів як елементів балістичного захисту [14] притягує увагу до шляхів підвищення механічних властивостей шляхом змін внутрішньої мікробудови матеріалів [15]. Для дослідження механізмів руйнування запропоновані різноманітні моделі, що базуються як на моделюванні репрезентативних комірок дво- та тривимірних мереж [16], так і на теоретичному осередненні у просторі орієнтації ланок волокон [17]. Істотним обмеженням для цих моделей є проблема експериментального визначення окремих мікромеханічних параметрів [18]. Якщо пружність та межу міцності окремого волокна визначити легко, то властивості з'єднання волокон виміряти набагато важче.

Принцип мінімуму додаткової енергії.

Розглянемо векторну змінну подовження ланки гнучкого волокна

$$\mathbf{r} = \mathbf{B} \mathbf{x}, \quad \mathbf{r}_a = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i, \quad (1)$$

де $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ є актуальними положеннями вузлів ланки, \mathbf{r}_a є вектором подовження, що поєднує обидва кінці ланки, а \mathbf{B} - лінійним різницеvim оператором, що перетворює вектор усіх вузлових координат \mathbf{x} у повний вектор \mathbf{r} подовжень усіх ланок системи. Ця змінна є лінійною мірою скінченних деформацій і відображає водночас і осьове подовження волокна, і його поворот. Натомість скалярна змінна у формулюванні Канно відтворює лише подовження відносно початкової довжини волокна. Слід зазначити, що визначення вектора подовження (1) не прив'язується до початкового стану або орієнтації ланки та є цілком незалежним від первинної конфігурації мережі.

Відгуком на деформацію окремої ланки є

осьова сила

$$\mathbf{q}_a = \mathbf{q}_a(\mathbf{r}_a) \in \partial \Pi_a(\mathbf{r}_a) \subset \mathbb{R}^{+\infty}, \quad (2)$$

яка є похідною потенціальної енергії Π_a до вектора подовження \mathbf{r}_a . Передбачається, що ця енергія є опуклою функцією у дво- або тривимірному просторі визначення свого аргументу. Вона також може набувати нескінченні додатні значення для неприпустимих деформацій.

Рівновага всієї волоконної мережі визначає принцип мінімуму повної потенційної енергії

$$\begin{cases} \mathbf{r}_a = \mathbf{B}_a \mathbf{x}; \\ \min_{\mathbf{r}, \mathbf{x}} \sum_{a=1}^m \Pi_a(\mathbf{r}_a); \\ \mathbf{x}_j = \bar{\mathbf{x}}_j, j \in \Gamma_D, \end{cases} \quad (3)$$

відносно невідомих вузлових переміщень та подовжень ланок за умов виконання кінематичних співвідношень (1) та крайових умов типу Діріхле для вузлів Γ_D , які є закріпленими у відомих положеннях.

Цільова функція цієї задачі математичного програмування є опуклою, а усі обмеження є лійними, отже, мінімум існує. Якщо потенціальна енергія деформації ланок мережі є нестрого опуклим функціоналом, то розв'язок може бути не єдиним. Проте екстремальне значення є однаковим для усіх розв'язків, тобто вони є рівнозначними станами рівноваги мережі.

Для отримання спряженої постановки до принципу мінімуму (3) скористаємося дуальністю Фенхеля. Для цього задачу необхідно подати в такій формі

$$\inf_{\xi} \{f(\xi) + q(\Lambda \xi), \xi \in V\}, \quad (4)$$

де $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ та $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ є опуклими функціями, а $\Lambda: V \rightarrow Y$ - лінійним перетворенням. В такому разі спряженою за Фенхелем задачею є

$$\sup_{\eta^*} \{-f^*(\Lambda^* \eta^*) - q^*(-\eta^*), \eta^* \in Y^*\} \quad (5)$$

відносно спряженої невідомої η^* та перетворення $\Lambda^*: Y^* \rightarrow V^*$. Екстремуми задач (4) та (5) пов'язані між собою диференціальними співвідношеннями

$$\begin{cases} \Lambda^* \eta^* \in \partial f(\xi); \\ -\eta^* \in \partial g(\Lambda \xi). \end{cases} \quad (6)$$

За змінну в задачі оберемо вектор, що складається з d ступенів свободи вузлових координат, та $3m$ компонент векторів подовжень ланок

$$\xi = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \in V = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{3m}. \quad (7)$$

Лінійне перетворення подамо таким чином

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ -\mathbf{B}\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = \Lambda \boldsymbol{\xi}. \quad (8)$$

Цей вибір змінних та лінійного перетворення дає змогу розділити цільову функцію та обмеження в задачі (3) між такими двома функціями

$$f(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{a=1}^m \Pi_a(\mathbf{r}_a) + \chi(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}_j, j \in \Gamma_D), \quad (9)$$

$$g(\boldsymbol{\eta}) = \chi(\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2 = \mathbf{0}), \quad (10)$$

де χ є характеристичними функціями. В першу з них увійшли умови Діріхле відносно вузлових переміщень, а у другу – виключно кінематичні співвідношення (1), адже вектор $\boldsymbol{\eta}$ згідно виразу (8) містить праву та ліву частини цієї тотожності. Спряжену до функції (9) визначаємо таким чином

$$\begin{aligned} f^*(\boldsymbol{\xi}^*) &= \sup_{\boldsymbol{\xi}} \left\{ \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}^* - f(\boldsymbol{\xi}) \right\} = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{r}} \left\{ \mathbf{x}^* \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^*) - \right. \\ &\quad \left. - \chi(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}_j, j \in \Gamma_D) \right\} = \\ &= \sum_{a=1}^m \Phi_a(\mathbf{r}_a^*) + \sum_{j \in \Gamma_D} (\mathbf{x}_j^* \cdot \bar{\mathbf{x}}_j) + \chi(\mathbf{x}_j^* = 0, j \in \Gamma_N), \end{aligned} \quad (11)$$

де Φ_a є додатковою енергією деформування ланки, спряженою до потенційної енергії Π_a :

$$\Phi_a = \sup_{\mathbf{r}_a} \left\{ \mathbf{r}_a \cdot \mathbf{r}_a^* - \Pi_a(\mathbf{r}_a) \right\}. \quad (12)$$

Відповідно, спряжена функція для другої складової (10) мінімізованого функціоналу є такою:

$$\begin{aligned} g^*(\boldsymbol{\eta}^*) &= \sup_{\boldsymbol{\eta}} \left\{ \boldsymbol{\eta}^* \cdot \boldsymbol{\eta} \right\} - g(\boldsymbol{\eta}) = \\ &= \sup_{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2} \left\{ (\boldsymbol{\eta}_1^* \cdot \boldsymbol{\eta}_1) + (\boldsymbol{\eta}_2^* \cdot \boldsymbol{\eta}_2) \mid \boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2 = \mathbf{0} \right\} = \\ &= \chi(\boldsymbol{\eta}_1^* - \boldsymbol{\eta}_2^* = \mathbf{0}) \end{aligned} \quad (13)$$

Отже, спряженою за Фенхелем до принципу мінімуму (3) є така задача

$$\begin{cases} \mathbf{x}_j^* = \mathbf{0}, j \in \Gamma_N; \\ \min_{\boldsymbol{\eta}_1^*, \boldsymbol{\eta}_2^*} \sum_{a=1}^m \Phi_a(\mathbf{r}_a^*) + \sum_{j \in \Gamma_D} \mathbf{x}_j^* \cdot \bar{\mathbf{x}}_j; \\ \boldsymbol{\eta}_1^* - \boldsymbol{\eta}_2^* = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (14)$$

Спряжені змінні пов'язані між собою таким співвідношенням

$$\boldsymbol{\xi}^* = \Lambda^* \boldsymbol{\eta}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ \mathbf{r}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{B}^T \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1^* \\ \boldsymbol{\eta}_2^* \end{bmatrix}, \quad (15)$$

відповідно до якого можемо ідентифікувати вузлові реакції або нев'язки

$$\mathbf{t} = \mathbf{x}^* = -\mathbf{B}^T \boldsymbol{\eta}_2^* \quad (16)$$

та осьові сили

$$\mathbf{q} = \mathbf{r}^* = \boldsymbol{\eta}_1^*. \quad (17)$$

Якщо в задачі (14) здійснити зміну до змінних (16) та (17), то принцип мінімуму додаткової роботи остаточно набуде такого виразу:

$$\begin{cases} \mathbf{t}_j = 0, j \in \Gamma_N; \\ \min_{\mathbf{t}, \mathbf{q}} \sum_{a=1}^m \Phi_a(\mathbf{q}_a) + \sum_{j \in \Gamma_D} \mathbf{t}_j \cdot \bar{\mathbf{x}}_j; \\ \mathbf{t} = -\mathbf{B}^T \mathbf{q}. \end{cases} \quad (18)$$

Варіаційний принцип (18) має чудову симетрію відносно початкового принципу мінімуму енергії (3). Його сформульовано відносно двох змінних, які мають природу сил або реакцій. Внутрішні зусилля \mathbf{q}_a є спряженими до векторних змінних подовження ланок \mathbf{r}_a , мають таку саму розмірність та кількість. Аналогічно, і зовнішні реакції \mathbf{t}_j , які є спряженими до актуальних вузлових координат \mathbf{x}_j , збігаються зі своїми спряженими відповідниками за розмірністю та кількістю. На цьому етапі скалярні змінні напруженого стану кабелів, які розглядаються в роботах [2–6], не залучені та не порушують симетрії. Відповідником до складових внутрішньої енергії Π_a є додаткові енергії деформування кабелів Φ_a , які є функціями вектора осьової сили.

Лінійний доданок цільової функції в задачі (18) є відповідно додатковою роботою сил реакції у вузлах із граничними умовами типу Діріхле і є добутком вузлових реакцій на задані переміщення. У вільних вузлах, для яких дотримуються статичні умови типу Неймана, у спряженій постановці виникають умови рівноваги вузлових реакцій. Вони є однорідними внаслідок того, що ми на початку виключили дію зовнішніх вузлових сил у початковій постановці.

Інакше у принципі (3) функціонал повної енергії містив би також доданок роботи цих сил на вузлових переміщеннях. Для прямої постановки умови рівноваги визначають екстремальну точку, а тут вони входять в обмеження. Кінематичні рівняння зв'язку (1) між вузловими переміщеннями, що виступають як обмеження у прямій постановці (2), перетворюються у інші за змістом обмеження, які тепер пов'язують вузлові реакції та внутрішні сили в ланках у спряженій постановці (18).

Мережі лінійно пружних кабелів. Відгук гнучкого кабеля за малих відносних подовжень визначає звичайний закон Гука. Попри те, що абсолютне значення сили розтягу згідно нього лінійно змінюється із відносним подовженням кабеля, повна залежність між вектором осьової сили та вектором подовження ланки є нелінійною:

$$\mathbf{q}_a(\mathbf{r}_a) = \begin{cases} k_a (\|\mathbf{r}_a\| - L_a) \mathbf{e}_a, & \|\mathbf{r}_a\| \geq L_a; \\ \mathbf{0}, & \|\mathbf{r}_a\| < L_a. \end{cases} \quad (19)$$

Напрямок дії осьової сили збігається із актуальною орієнтацією деформованої ланки, яку визначає одинарний вектор

$$\mathbf{e}_a = \mathbf{r}_a / \|\mathbf{r}_a\|.$$

Поздовжня жорсткість волокна за розтягу становить

$$k_a = EA/L_a,$$

де E – модуль пружності матеріалу волокон,

A – площа перерізу волокон, які можуть розрізнятися між ланками, однак для простоти можна вважати ідентичними для всієї мережі,

L_a – початкові довжини окремих ланок в недеформованому стані.

Водночас співвідношення (19) передбачає, що за скорочення гнучкий кабель вигинається та практично не створює жодного спротиву до деформації.

Потенціальна енергія в цьому випадку набуває такого виразу

$$P_a(\mathbf{r}_a) = \begin{cases} \frac{k_a (\|\mathbf{r}_a\| - L_a)^2}{2}, & \|\mathbf{r}_a\| \geq L_a; \\ 0, & \|\mathbf{r}_a\| < L_a. \end{cases} \quad (20)$$

Ця функція вектора подовження є нестрого опуклою, адже всередині області скорочення кабеля вона набуває постійного нульового значення. Спряжена до неї додаткова енергія, натомість, є строго опуклою функцією вектора осьової сили

$$\Phi_a(\mathbf{q}_a) = L_a \|\mathbf{q}_a\| + \frac{\|\mathbf{q}_a\|^2}{2k_a}. \quad (21)$$

На відміну від потенційної енергії (20) додаткова енергія не є гладкою функцією. Втім, диференціальне співвідношення (2) передбачає обернення

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_a(\mathbf{q}_a) \in \partial \Phi_a(\mathbf{r}_a), \quad (22)$$

що є однозначним за усіх ненульових сил у навантаженому стані гнучкої ланки.

Водночас, за нульової сили субдиференціал додаткової енергії є залежно від просторової розмірності мережі кругом або колом. Тож за нульової сили обернення не є однозначним та допускає довільні подовження $\|\mathbf{r}_a\| \leq L_a$. Разом із тим, цей функціонал є строго опуклим, а це означає, що розв'язок задачі мінімізації із обмеженнями у вигляді лінійних рівностей існує та є єдиним (18). Тоді як за навантаженими ланками зберігається відносна свобода руху внаслідок втрати жорсткості цієї частини мережі, значення сил завжди можна визначити однозначно незалежно від того, чи вони перебувають у скороченому чи розтягнутому стані.

З огляду на вираз додаткової енергії (21), задачі математичного програмування (18) можна надати форми SCOP. Для цього достатньо подібно до [2] ввести дві допоміжні скалярні змінні, для яких додаткова енергія є екстремальним значенням задачі з кінчними обмеженнями

$$\Phi_a(\mathbf{q}_a) = \begin{cases} \min_{y_a, v_a} y_a + v_a; \\ (k_a y_a / 2) + 1 \geq \left\| \begin{matrix} (k_a y_a / 2) - 1 \\ v_a \end{matrix} \right\|; \\ v_a \geq L_a \|\mathbf{q}_a\|. \end{cases} \quad (23)$$

Чисельне розв'язання. Перевагою варіаційних постановок задач статики кабельних мереж є можливість застосування чисельних методів опуклого математичного програмування. Система моделювання CVX [19] у середовищі математичних обчислень Matlab надає зручний доступ до алгоритмів і методів оптимізації. Її відрізняє простий синтаксис, споріднений до мови програмування Matlab. Цільові функції та обмеження можуть бути легко поданими в аналітичному вигляді. При цьому система визначає самостійно стандартні види задач математичного програмування включно із лінійним та квадратичним програмуванням, негладкі функції, обмеження типу конусів другого порядку тощо.

Послідовність команд, що визначає розв'язання прямої задачі мінімізації потенційної енергії кабельної мережі згідно формулювання (4.42) в роботі [2], є такою. Змінними задачі мінімізації є вузлові переміщення \mathbf{x}_j та відносні подовження $c_a = \|\mathbf{r}_a\| - L_a$. Цільова функція є квадратичною. У задачі задано два типи обмежень. Для кожної із ланок визначено кінематичне обмеження ніж невід'ємним відносним подовженням та вузловими переміщеннями у вигляді конуса другого порядку. Граничні умови Діріхле є звичайними лінійними рівняннями:

```
cvx_begin
variable xj(2*d)
variable ca(m) nonnegative
minimize(sum(1/2*ka.*(ca.^2)));
subject to
for a=1:m
ca(a) >= norm(B([2*a-
-1, 2*a], :)*xj) - La(a);
end
xj(jD) == xjbar;
cvx_end.
```

Розв'язок спряженої задачі мінімізації (18) для лінійно пружних кабелів із додатковою енергією деформування, яку подано у вигляді (23), у середовищі CVX здійснюється за допомогою такого коду. На додачу до основних векторних змінних вузлових реакцій \mathbf{t}_j та осьових сил \mathbf{q}_a в цій постановці присутні дві додаткові технічні змінні u_a та v_a . Ці змінні дають змогу позбутися недиференційованого та квадратичного доданків із виразу (21) для додаткової енергії лінійно пружних кабелів та отримати у постановці лінійну цільову функцію, як видно в реалізації коду. Натомість для кожної з ланок мережі виникають додаткові обмеження типу конусів другого порядку. Умови рівноваги у вільних вузлах та зв'язку між осьовими силами і вузловими реакціями подаються лінійними рівняннями:

```

cvx_begin
variable tj(2*d)
variable qa(2*m)
variable ya(m)
variable va(m)
minimize( sum( ya+va ) +
           dot( tj, xjbar ) );
subject to
for a=1:m
(ka(a)*ya(a)/2+1) >=...
norm( [ (ka(a)*ya(a)/2-
1);va(a)/La(a) ] );
va(a) >= La(a)*norm(qa([2*a-
-1,2*a]));
end
tj(jN) == 0;
tj+B'*qa == 0;
cvx_end.

```

Для перевірки обох підходів до визначення статичної рівноваги кабельних мереж розглянемо модельну кабельну мережу. Вона складається із трьох ланок, поєднаних у подібні до латинської літери Y, як зображено на рис. 1.

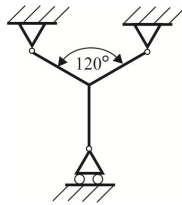


Рисунок 1 – До визначення статичної рівноваги кабельних мереж

Усі ланки мають однакову довжину L та розташовані одне до одного під кутом 120° . Верхня пара вузлів є закріпленою, а нижній вузол зазнає горизонтального зсуву. Початкова та деформована конфігурація мережі, отримана за вузловими переміщеннями із прямої постановки, разом із траєкторією переміщення центрального вільного

вузла за максимального зсуву $\sqrt{3}L$ наведені на рис. 2, чисельні значення розв'язків, отриманих за прямою та спряженою постановками, – у табл. 1.

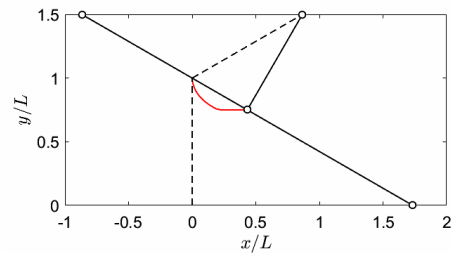


Рисунок 2 – Деформована конфігурація Y-подібної мережі та траєкторія переміщення центральної вузлової точки

Добре видно, що значення відносних подовжень c_a ланок мережі, отриманих із задачі мінімізації потенціальної енергії, збігаються із абсолютними значеннями осьових сил, отриманих мінімізацією додаткової енергії. При цьому значення потенціальної та додаткової енергії є однаковими за величиною та мають протилежний знак. Цим підтверджено еквівалентність обох постановок та коректність їх реалізації у середовищі моделювання. Ці розв'язки також демонструють особливості негладкого відгуку гнучких кабелів із різним відгуком до розтягу та скорочення. Видно, що спочатку усі три ланки є навантаженими, зусилля від нижнього волокна розподіляється між двома верхніми. Однак, за певного зсуву ліва та нижня ланки утворюють пряму лінію, а права ланка розвантажується та далі зазнає лише скорочення. Нульові значення подовження та осьової сили для цієї ланки виділені жирним шрифтом у табл. 1. Цій поведінці відповідає прямолінійна горизонтальна ділянка траєкторії руху середнього вузла на рис. 2, вертикальна координата якого приймає сталі значення 0.75 посередині висоти мережі, як видно з табл. 1.

Таблиця 1 – Чисельні розв'язки модельної задачі статки Y-подібної мережі

$u/\sqrt{3}L$	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,800	0,900	1,000
x_2	0,001	0,005	0,017	0,041	0,078	0,125	0,182	0,260	0,346	0,433
y_2	0,990	0,963	0,923	0,879	0,836	0,797	0,762	0,750	0,750	0,750
c_1	0,005	0,021	0,051	0,094	0,149	0,212	0,281	0,353	0,426	0,500
c_2	0,005	0,023	0,055	0,099	0,154	0,215	0,282	0,353	0,426	0,500
c_3	0,004	0,015	0,026	0,032	0,031	0,022	0,006	0,000	0,000	0,000
q_1	0,005	0,021	0,051	0,094	0,149	0,212	0,281	0,353	0,426	0,500
q_2	0,005	0,023	0,055	0,099	0,154	0,215	0,282	0,353	0,426	0,500
q_3	0,004	0,015	0,026	0,032	0,031	0,022	0,006	0,000	0,000	0,000
П	0,000	0,001	0,003	0,010	0,023	0,046	0,079	0,124	0,181	0,250
Ф	0,000	-0,001	-0,003	-0,010	-0,023	-0,046	-0,079	-0,124	-0,181	-0,250

Висновки. Запропоновано альтернативний підхід до формулювання принципу мінімуму додаткової енергії для статичного відгуку мереж із гнучких кабелів. Його відрізняє те, що за основні змінні деформування обрано вектори подовжень ланок, а не їхні скалярні значення, і форма відгуку гнучких ланок залишається довільною. Безпосередньо конкретний

вигляд опуклого функціоналу розкривається на заключному кроці під час визначення виразу додаткової енергії відносно векторів осьових сил. Цей підхід є справедливим за умов, що додаткова енергія є опуклою функцією свого аргумента у дво- або тривимірному просторі. Форма спряженого варіаційного принципу відрізняється симетрією

відносно початкового принципу мінімуму потенціальної енергії. Спряжені змінні легко ідентифікуються як вузлові реакції і вектори осьових сил. Така гнучкість дає змогу спростити отримання нових формувань та поширити їх на більш широкий клас явищ, включно із тертям та пластичними деформаціями волоконних мереж.

Для випадку лінійно пружних кабелів варіаційний принцип набуває виразу, ідентичного формулюванню, раніше отриманому в [2] для випадку скінченних деформацій. Остаточно, отриману задачу можна звести до форми математичного програмування на конусах другого порядку. Це дає змогу застосовувати до її розв'язання добре знані чисельні методи, зокрема методи внутрішньої точки.

Список літератури

1. Ткачук М. М. Розроблення статистично осереднених моделей деформування матеріалів із випадковою мережевою будовою різноорієнтованих волокон. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Машинознавство та САПР*. Харків: НТУ «ХПІ», 2021. № 2. С. 94–128
2. Kanno, Y. (2011). *Nonsmooth Mechanics and Convex Optimization*. CRC Press. 445 p.
3. Kanno, Y., & Ohsaki, M. (2006). Contact analysis of cable networks by using second-order cone programming. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(6), 2032–2052.
4. Kanno, Y., Ohsaki, M., Ito, J. (2002). Large-deformation and friction analysis of non-linear elastic cable networks by second-order cone programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55(9), 1079–1114.
5. Kanno, Y., Ohsaki, M. (2003). Minimum principle of complementary energy of cable networks by using second-order cone programming. *International Journal of Solids and Structures*, 40(17), 4437–4460.
6. Kanno, Y., Ohsaki, M. (2005). Minimum principle of complementary energy for nonlinear elastic cable networks with geometrical nonlinearities. *Journal of optimization theory and applications*, 126(3), 617–641.
7. Boyd, S., Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge university press. 727 p.
8. Picu, C. R. Constitutive models for random fiber network materials: a review of current status and challenges. *Mechanics Research Communications*. 2020. 103605.
9. Islam M. R. Picu R. C. Effect of network architecture on the mechanical behavior of random fiber networks. *Journal of Applied Mechanics*. 2018. 85(8): 081011 (8 pages)
10. Negi V., Picu R. C. Mechanical behavior of cross-linked random fiber networks with inter-fiber adhesion. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2019. 122. P. 418–434.
11. Negi V., Picu C. Mechanical behavior of nonwoven non-crosslinked fibrous mats with adhesion and friction. *Soft Matter*. 2019. Vol. 15, iss. 29, 5951–5964.
12. Deogekar S., Islam M. R., & Picu R. C. Parameters controlling the strength of stochastic fibrous materials. *International journal of solids and structures*. 2019. 168. P. 194–202.
13. Deogekar S., & Picu R. C. Strength of stochastic fibrous materials under multiaxial loading. *Soft Matter*. 2021. 17(3). P. 704–714.
14. Martínez-Hergueta F., Ridruejo A., González C., LLorca J. Ballistic performance of hybrid nonwoven/woven polyethylene fabric shields. *International Journal of Impact Engineering*. 2018, vol. 111, pp. 55–65.
15. Deogekar S., Yan Z., Picu R. C. Random Fiber Networks With Superior Properties Through Network Topology Control. *Journal of Applied Mechanics*. (2019). 86(8). P. 081010.
16. Deogekar S., Picu R. C. On the strength of random fiber networks. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2018. 116. P. 1–16.
17. Chen, N., Silberstein, M. N. A micromechanics-based damage model for non-woven fiber networks. *International Journal of Solids and Structures*. 2019. no.160, pp. 18–31.
18. Chen, N. *Experimental and computational study of non-woven damage mechanics* (Doctoral dissertation, Cornell University). 2018.
19. Grant, M., Boyd, S. (2014). CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.1.

References (transliterated)

1. Tkachuk M. M. Rozroblennya statistichno oserednених modelej deformuvannya materialiv iz vipadkovoyu merezhevoyu budovoyu ri nori yentovanikh volokon. *Visnik Naczi onal' nogo tekhnichnogo universitetu «KhPI»*. Seriya: Mashinoznavstvo ta SAPR. Kharkiv: NTU «KhPI», 2021, no. 2, pp. 94–128
2. Kanno, Y. (2011). *Nonsmooth Mechanics and Convex Optimization*. CRC Press. 445 p.
3. Kanno, Y., & Ohsaki, M. (2006). Contact analysis of cable networks by using second-order cone programming. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(6), 2032–2052.
4. Kanno, Y., Ohsaki, M., & Ito, J. (2002). Large-deformation and friction analysis of non-linear elastic cable networks by second-order cone programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55(9), 1079–1114.
5. Kanno, Y., & Ohsaki, M. (2003). Minimum principle of complementary energy of cable networks by using second-order cone programming. *International Journal of Solids and Structures*, 40(17), 4437–4460.
6. Kanno, Y., & Ohsaki, M. (2005). Minimum principle of complementary energy for nonlinear elastic cable networks with geometrical nonlinearities. *Journal of optimization theory and applications*, 126(3), 617–641.
7. Boyd, S., Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge university press. 727 p.
8. Picu, C. R. Constitutive models for random fiber network materials: a review of current status and challenges. *Mechanics Research Communications*. 2020. 103605.
9. Islam M. R. & Picu R. C. Effect of network architecture on the mechanical behavior of random fiber networks. *Journal of Applied Mechanics*. 2018. 85(8): 081011 (8 pages)
10. Negi V., & Picu R. C. Mechanical behavior of cross-linked random fiber networks with inter-fiber adhesion. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2019. 122. P. 418–434.
11. Negi V., Picu C. Mechanical behavior of nonwoven non-crosslinked fibrous mats with adhesion and friction. *Soft Matter*. 2019, vol. 15, iss. 29, pp. 5951–5964.
12. Deogekar S., Islam M. R., & Picu R. C. Parameters controlling the strength of stochastic fibrous materials. *International journal of solids and structures*. 2019. 168. P. 194–202.
13. Deogekar S., & Picu R. C. Strength of stochastic fibrous materials under multiaxial loading. *Soft Matter*. 2021. 17(3). P. 704–714.
14. Martínez-Hergueta F., Ridruejo A., González C., LLorca J. Ballistic performance of hybrid nonwoven/woven polyethylene fabric shields. *International Journal of Impact Engineering*. 2018, vol. 111, pp. 55–65.
15. Deogekar S., Yan Z., Picu R. C. Random Fiber Networks With Superior Properties Through Network Topology Control. *Journal of Applied Mechanics*. (2019). 86(8). P. 081010.
16. Deogekar S., Picu R. C. On the strength of random fiber networks. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2018. 116. P. 1–16.
17. Chen, N., Silberstein, M. N. A micromechanics-based damage model for non-woven fiber networks. *International Journal of Solids and Structures*. 2019, no.160, pp. 18–31.
18. Chen, N. *Experimental and computational study of non-woven damage mechanics* (Doctoral dissertation, Cornell University). 2018.
19. Grant, M., Boyd, S. (2014). CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.1.

Надійшла (received) 23.01.2022

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ткачук Микола Миколайович (Ткачук Николай Николаевич, Tkachuk Mykola M.) – доктор технічних наук, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», провідний науковий співробітник кафедри «Інформаційні технології і системи колісних та гусеничних машин ім. О. О. Морозова», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4753-4267>, тел.: (057)7076902, e-mail: m.tkachuk@tmm-sapr.org