

*М.М. ТКАЧУК***РОЗРОБЛЕННЯ СТАТИСТИЧНО ОСЕРЕДНЕНИХ МОДЕЛЕЙ ДЕФОРМУВАННЯ МАТЕРІАЛІВ ІЗ ВИПАДКОВОЮ МЕРЕЖЕВОЮ БУДОВОЮ РІЗНООРИЄНТОВАНИХ ВОЛОКОН**

У роботі описано розроблені статистично осереднені моделі деформування матеріалів із випадковою мережевою будовою різноорієнтованих волокон. Створені нові методи аналізу напружено-деформованого стану та мікромеханічні моделі деформування матеріалу в об'ємі тіл із матеріалу з мережевою структурою із урахуванням структурних і фізичних нелінійностей. Ці моделі побудовані на основі мікромеханіки мережеских структур на рівні статистичних наборів їх ланцюжків. Новизна підходів, моделей, методів та отриманих результатів полягає у створенні теоретичних основ аналізу деформування нетрадиційних мережеских матеріалів. Пропонуються нелінійні математичні моделі деформування матеріалів у вигляді хаотичної мережевої структури одновимірних фрагментів, які побудовані із залученням принципово нових підходів до опису фізико-механічних властивостей на мікрорівні статистичних наборів волоконних ланцюжків і просторової гомогенізації їх макровластивостей. Порівняно із традиційними моделями вони більш адекватно моделюють особливості деформування матеріалів у вигляді просторових хаотичних та упорядкованих мережеских структур, оскільки не залучають низки додаткових нефізичних гіпотез. Це створює принципово нові можливості не тільки для аналізу властивостей таких матеріалів, але й при створенні нових із заданими властивостями. Із застосуванням створених методів, моделей та засобів досліджень створено основу для розв'язання низки модельних та прикладних задач. Визначено характер деформування нетрадиційних матеріалів із мережевою структурою одновимірних елементів. Установлено макровластивості цих матеріалів на основі розроблених мікромеханічних моделей, варіаційних постановок та методів осереднення.

Ключові слова: напружено-деформований стан, мережескі структури, контактна взаємодія, метод скінчених елементів, контактний тиск, деталі машин, варіаційна постановка

*Н. Н. ТКАЧУК***РАЗРАБОТКА СТАТИСТИЧЕСКИ УСРЕДНЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛА СО СЛУЧАЙНЫМ СЕТЕВЫМ СТРОЕНИЕМ РАЗЛИЧНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ ВОЛОКОН**

В работе описаны разработанные статистически усредненные модели деформирования материалов со случайным сетевым строением различно ориентированных волокон. Созданы новые методы анализа напряженно-деформированного состояния и микромеханические модели деформирования материала в объеме тел из материала с сетевой структурой с учетом структурных и физических нелинейностей. Эти модели построены на основе микромеханики сетевых структур на уровне статистических наборов их цепочек. Новизна подходов, моделей, методов и полученных результатов заключается в создании теоретических основ анализа деформирования нетрадиционных сетевых материалов. Предлагаются нелинейные математические модели деформирования материалов в виде хаотической сетевой структуры одномерных фрагментов, которые построены с привлечением принципиально новых подходов к описанию физико-механических свойств на микроуровне статистических наборов волоконных цепочек и пространственной гомогенизации их макросвойств. По сравнению с традиционными моделями они более адекватно моделируют особенности деформирования материалов в виде пространственных хаотических и упорядоченных сетевых структур, поскольку не привлекают ряда дополнительных нефизических гипотез. Это создает принципиально новые возможности не только для анализа свойств таких материалов, но и при создании новых с заданными свойствами. С применением созданных методов, моделей и средств исследований создана основа для решения ряда модельных и прикладных задач. Определен характер деформирования нетрадиционных материалов с сетевой структурой одномерных элементов. Установлены макросвойства этих материалов на основе разработанных микромеханических моделей, вариационных постановок и методов усреднения.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, сетевые структуры, контактное взаимодействие, метод конечных элементов, контактное давление, детали машин, вариационная постановка

*М.М. ТКАЧУК***DEVELOPMENT OF STATISTICALLY AVERAGED MODELS OF DEFORMATION OF MATERIALS WITH RANDOM NETWORK STRUCTURE OF DIFFERENTLY ORIENTED FIBERS**

The paper describes the developed statistically averaged models of deformation of materials with a random network structure of differently oriented fibers. New methods of stress-strain analysis and micromechanical models of material deformation in the volume of bodies made of material with a network structure taking into account structural and physical nonlinearities have been created. These models are based on the micromechanics of network structures at the level of statistical sets of their chains. The novelty of approaches, models, methods and results is the creation of theoretical foundations for the analysis of the deformation of non-traditional network materials. Nonlinear mathematical models of material deformation in the form of a chaotic network structure of one-dimensional fragments are proposed, which are constructed involving fundamentally new approaches to the description of physical and mechanical properties at the micro level of statistical sets of fiber chains and spatial homogenization of their macroproperties. Compared to traditional models, they more adequately model the features of material deformation in the form of spatial chaotic and ordered network structures, as they do not involve a number of additional non-physical hypotheses. This creates fundamentally new opportunities not only for analyzing the properties of such materials, but also when creating new ones with specified properties. Using the created methods, models and research tools, the basis for solving a number of model and applied problems has been created. The nature of deformation of non-traditional materials with a network structure of one-dimensional elements is determined. The macro-properties of these materials are established on the basis of the developed micromechanical models, variational formulations and averaging methods.

Keywords: stress-strain state, network structures, contact interaction, finite element method, contact pressure, machine parts, variational formulation

Вступ. Як зазначається у роботах [1, 2], нате-пер у практиці створення та виготовлення машинобудівних конструкцій усе більш широке застосування знаходять нові нетрадиційні мережескі матеріали. Структурно ці матеріали мають низку суттєвих відмінностей у своїй поведінці під навантаженням. Це зумовлено декількома обставинами. Це, зокрема, їх дискретно-континуальна структура, яка, на відміну від традиційного суцільного середовища, складається із великої кількості одновимірних волокон, що розміщені у тривимірній області та вза-

модіють одне з одним. На відміну від традиційних композитних матеріалів, ці волокна занурені не у матрицю із іншого матеріалу, що сумісно із ними деформується, а у простір, що не чинить опір деформуванню цих волокон.

Відповідно, підходи, моделі та методи досліджень, які підходять до аналізу напружено-деформованого стану (НДС) тіл із традиційних гомогенних чи композитних матеріалів, у цьому випадку

© М.М. Ткачук, 2021

непридатні. Це висуває на передній край актуальну і важливу проблему розроблення статистично осереднених моделей деформування матеріалів із випадковою мережевою будовою різноорієнтованих волокон.

Таким чином, сформована актуальна наукова і важлива для промисловості проблема дослідження деформування нових мережевих матеріалів, яка вирішується на основі розробки нових моделей і методів аналізу нелінійної їх поведінки в умовах контактної взаємодії із урахуванням мікромеханіки взаємодії волоконних ланцюжків.

Аналіз існуючих підходів, моделей та методів досліджень деформування тіл із матеріалів мережевої структури. Як відзначається у роботах [1, 2], забезпечення конструкційної міцності елементів машин часто вимагає розробки нових моделей деформування матеріалу твердих тіл мережевої структури задля більш адекватного і точного розрахунку напружено-деформованого стану та обґрунтування прогресивних технічних рішень щодо виробів із високими технічними і тактико-технічними характеристиками (ТХ і ТТХ), що проєктуються та виготовляються на підприємствах різних галузей. При цьому важливою обставиною є широке використання і прогресуюча розробка сучасних нетрадиційних матеріалів, в т.ч. – мережевої (волоконної) структури. Традиційні моделі не придатні для опису їх поведінки. Крім того, традиційний феноменологічний підхід у цьому випадку є недостатнім, тому що дає інформацію тільки для конкретного типу матеріалу в заданих умовах роботи і у скінченному діапазоні навантажень. У той же час перед механікою деформівного твердого тіла стоять у цьому розрізі більш широкі завдання: визначення тенденцій зміни фізико-механічних характеристик залежно, наприклад, від складу і будови ланцюжків волоконних фрагментів; створення композиційних матеріалів із заданими властивостями; пояснення часто неочевидних тенденцій у зміні фізико-механічних властивостей матеріалів при варіюванні хімічного складу, температури, технології виготовлення тощо.

Усі ці обставини висувають на перший план мікромеханічні підходи, які надають можливості розрахунку макрохарактеристик на основі розгляду поведінки мікроструктури матеріалу аж до моделей статистичної механіки волоконних ланцюжків. Однак розроблені до теперішнього часу підходи дають результати, що не повною мірою відповідають експериментальним даним і даним практичної експлуатації. Це пов'язано зі складнощами математичного моделювання поведінки статистично представницьких наборів волоконних ланцюжків, макромолекул або ниток матеріалу у взаємодії одне з одним (наприклад, так званих нетканих матеріалів). Таким чином, розробка нових підходів та формування на їх основі нових нелінійних математичних моделей для більш адекватного опису фізико-механічних властивостей нетрадиційних матеріалів із мережевою структурою шляхом аналізу їх поведінки на рівні статистичної механіки наборів волоконних ланцюжків є актуальною науково-технічною проблемою.

На вирішення зазначених проблемних питань зорієнтовані роботи багатьох шкіл та вчених, аналіз розробок яких наведено далі [1–113].

Для визначення сучасного стану теоретичних розробок із заявленої проблематики був здійснений аналіз існуючих підходів, методів та моделей. Охвачені напрямки, які стосуються мікромеханіки волоконних мереж.

Мережеві мікроструктури властиві багатьом матеріалам штучного, а також природного походження [3–25]. Завдяки своїй будові вони можуть набувати унікальних властивостей, здатності розтягуватися зі збереженням міцності. Коли ці м'які матеріали піддаються макроскопічній деформації, відповідним чином деформується і мікроструктура. Сили, що створюються деформованими нитками (а також їх взаємодія всередині нерегулярної тривимірної мережі), складають макроскопічний відгук матеріалу, що в свою чергу визначається механічними напруженнями. Відповідно, знання про мікромеханіку випадкових мереж є вкрай важливим для розуміння таких механічних властивостей, як еластичність, що демонструються вищевказаними м'якими матеріалами. Ці мережі, по суті, є дискретними механічними системами, де окремі волокна є основними структурними одиницями.

Визначення механічних властивостей подібних матеріалів за їхньою будовою з урахуванням дійсних механізмів деформування вимагає спеціальних методів осереднення. Вони є принципово відмінними від апарату добре розвинутого для гомогенізації матеріалів із суцільною мікроструктурою, в тому числі композитних матеріалів, зміцнених волокнами різної природи [19, 20].

Існуючі теорії та моделі випадкових мереж у літературі можна класифікувати за деякими ознаками. Так, дискретні моделі [23–25] оперують із стохастичною дискретною сіткою волокон. Осереднені мережеві моделі враховують або статистичний розподіл геометричних параметрів волокон у мережі [26–28], або вісім волокон, розташованих на діагоналях паралелепіпеда [29], або повний ізотропний розподіл волокон за їх початковими орієнтаціями [30].

Моделювання мікронережі забезпечує глибоке розуміння мікроскопічних механізмів, які відповідають за загальну макроскопічну поведінку цих м'яких матеріалів. Тим не менш, вони часто вимагають великих обчислювальних витрат, а їх результатам властива статистична похибка, яка відрізняється від однієї випадково генерованої мережі до іншої.

Альтернативний клас моделей заснований на підході осереднення для опису випадкових мереж [23–28]. Вони зазвичай використовуються для обчислення поведінки матеріалу у скінченно-елементному моделюванні суцільних тіл. Ці теорії розглядають великі мікроскопічні мережі у термінах осереднених розподілів замість їх детальної дискретної будови. Зокрема, розглядаються розподіли величин, які описують мікрореформації мережі. Їх зв'язок із макроскопічною деформацією, яка є основним зовнішнім впливом на матеріал, є ключовим питанням, яке вирішується у цих осереднених моделях по-різному [26].

Завдяки простоті афінних співвідношень у бага-

тьох випадках можливо обчислити осереднені напруження як функцію макроскопічних деформацій у аналітичній формі.

Навколо афінної кінематики мікродеформацій волокон побудовано багато чисельних моделей, переважно об'єднаних загальним підходом. Він полягає в тому, що сукупність волокон у сітчастій мікроструктурі асоціюється із простором їх орієнтацій у деформованій конфігурації, так званій мікросфері [27].

Такий підхід дає змогу визначати осереднений відгук матеріалу на деформації шляхом інтегрування на мікросфері енергії подовження волокон. Обчислення осереднених величин відбувається із використанням спеціальних квадратурних формул на одиничній сфері [28]. Квадратурні точки утворюють у просторі орієнтацій дискретну структуру, яка наближає розподілену у всіх можливих напрямках систему волокон до оригінальної мікроструктури. Кожний окремих дискретний напрямок можна подати як сконцентрований пучок волокон, який представляє певну частку сітки і має відповідну вагу у загальній структурі.

Незважаючи на всі переваги простоти такого підходу, є досить очевидним, що обмеження афінними деформаціями є занадто жорсткими для неупорядкованих мереж з безліччю ступенів свободи. Про недосконалість використовуваних припущень свідчать також і експериментальні дані [29], а також результати дискретного моделювання випадкових мереж [24].

Існує декілька підходів до урахування неафінних деформацій мікроволокон. Найпростіші з них штучно подають матеріал у точці еквівалентною тривимірною структурою [29, 30]. Проте, такі штучні конструкції, які подають деформації мереж, істотно обмежують коло властивостей, які можна за їх допомогою змоделювати. Набагато більш універсальною виявилася відома неафінна модель мікросфери, яка була запропонована Міє і співавторами у роботах [30, 31]. Ця модель розглядає повний простір орієнтацій волокон, однак, на відміну від раніше запропонованих підходів, при цьому відмовляються від прямих співвідношень між макроскопічною деформацією і мікроскопічними деформаціями волокон. Запропоноване кінематичне співвідношення засноване на феноменологічних міркуваннях без відповідного фізичного обґрунтування та містить штучний додатковий параметр.

Для визначення невідомих мікродеформацій у рамках цього підходу застосовується принцип мінімуму, а саме за дійсні подовження волокон приймаються такі, які мінімізують осереднену енергію деформації сітки за умови виконання вищевикладеного кінематичного обмеження. Внаслідок цього розв'язком, крім мінімуму осередненої енергії, також визначаються і осереднені механічні напруження, а також пружний модуль матеріалу за скінченними деформаціями. Всі ці величини обчислюються за відомими квадратурними формулами [32–34].

Узагальнене формулювання моделі мікросфери, засноване на загальних засадах механіки стандартних дисипативних систем, запропоновано в

роботі [36]. Зокрема, представлено урахування релаксаційних процесів в межах неафінної кінематики деформування мережі, що врешті описують в'язкопружну поведінку еластомерів.

Окремих випадок становлять неткані полотна незчеплених волокон та подібні матеріали [48–97]. Вони тримаються до купи за рахунок виключно адгезії випадково розташованих у його площині волокон та сил тертя у місцях їхнього перетину. Жодним іншим чином ці полотна не з'єднуються. У роботі [49] досліджуються дискретні моделі таких нетканних матеріалів. Розглядаються волокна різного початкового вигину, довжини, також варійованими є товщина повсті, міцність адгезії тощо. Особливістю такої внутрішньої будови є те, що матеріал деформується майже виключно незворотно. Лише невелика частка роботи зберігається у пружних деформаціях волокон, решта ж розсіюється за рахунок відносного ковзання із тертям. Відповідно, за розтягу реакція матеріалу має дуже короткий пружний відтинок на початку. За ним слідує чітко визначений режим ковзання, що супроводжується поступовим зміцненням. У нетканних полотнах із нескінченних чи дуже довгих волокон цей процес за достатньо великих деформацій призводить до повного випрямлення волокон та утворення прямих шляхів розповсюдження сили, орієнтованих у напрямку навантаження. У такому стані полотно деформується виключно пружно та набуває високої жорсткості. Якщо ж довжина волокон скінченна, то полотно врешті втрачає міцність внаслідок руйнування контакту між волокнами через істотне відносне ковзання та значне зменшення щільності мережі.

У роботах [50–58] описані різні моделі подібних матеріалів.

Крім того, розроблені раніше підходи, моделі та методи знайшли свій розвиток у роботах [1, 2, 59–100]. Разом із тим усі проблемні аспекти у цих роботах повного вирішення не знайшли.

Так, у [64] відзначається, що значна низка матеріалів має стохастичну волоконну мережу як основний структурний компонент. У деяких випадках мережа вбудовується у матрицю, а у деяких інших випадках матеріали виготовляються виключно з волокон. Область гомогенізації та моделювання властивостей волокнистих композитів із твердою матрицею натеper добре розвинена. Однак ситуації, за яких волокна утворюють зшиту мережу (з матрицею або без неї), вивчалися недостатньо ретельно. У цій статті зазначені проблеми, які ще належить вирішити у пошуках надійних та репрезентативних базових моделей для цього типу матеріалів. Обговорення зосереджено на волокнистих мережах без матриці, оскільки це є граничний випадок мережевої механіки. Наданий короткий огляд доступних конститутивних моделей, заснованих на мікроструктурі [64]. Також окреслені фізичні аспекти, які важливі для механіки таких матеріалів та мають бути відображені у нових моделях.

У статтях [65, 67] описані випадкові чарункові та волоконні мережі, які формують деякі матеріали. Установлено, що волокнисті мережі демонструють при розтягуванні знижену жорсткість при деформації, знижене вирівнювання волокон і знижене скорочення Пуассона при одноосьовому розтягуванні [65].

Подібні питання для випадкових волоконних мереж із міжволоконною адгезією розглядаються у роботі [66].

У роботі [68] досліджується міцність стохастичних мереж без раніше існуючих пошкоджень, які виходять з ладу через розрив зшивання. Атермальні мережі у діапазоні від приблизно афінних до сильно неафінних піддаються багатовісному навантаженню, а міцність оцінюється за допомогою чисельних моделей. Помічено, що після нормалізації напруження на міцність, виміряну при одноосьовому розтягуванні, поверхня руйнування стає приблизно незалежною від параметрів мережі. Це розширює зв'язок між міцністю і параметрами мережі, раніше встановлену у [63] на багатовісний випадок. Поверхня руйнування залежить від обох перших двох інваріантів напруження. Сильно неафінні мережі поведуться дещо інакше, ніж афінні мережі при навантаженні, близьких до режимів гідростатичного і чисто зсувного навантаження, у той час як різниця зникає у першому квадранті простору головних напружень. Результати порівнюються з експериментальними даними з літератури [68].

У роботі [69] описано вплив розміру на лінійний і нелінійний механічний відгук тривимірних стохастичних волоконних мереж. Ефект розміру більш виражений у неафінних мережах, ніж у афінних, і повільно зменшується при збільшенні розміру моделі. Щоб усунути цей ефект, необхідно враховувати моделі, більші, ніж ті, які можуть бути ефективно розв'язані за допомогою сучасних комп'ютерів [68]. Запропонований метод, який дає можливість використовувати відносно невеликі моделі, при цьому точно прогнозуючи поведінку мережі за малих і великих деформацій. Метод заснований на узагальнених граничних умовах, які адаптуються до вимог, що пред'являються до волоконних матеріалів [68].

Питанням визначення пружного відгуку випадкових волоконних мереж на основі моделей континууму градієнта деформації присвячена робота [70]. Метою цієї роботи є розробка моделей лінійного пружного континууму з анізотропним градієнтом деформації для двовимірних випадкових волоконних мереж. Складові модулі еквівалентного континууму градієнта деформації оцінюються на основі відгуку явного подання мережі у так званих вікнах аналізу, у яких кожне волокно моделюється як пучок, а волокна з'єднуються у точках перетину за допомогою зварних з'єднань. Принцип еквівалентності енергії деформації, заснований на розширенні до градієнту деформації умови макрооднорідності Хілла – Мандела, використовується для ідентифікації класичних модулів і модулів градієнту деформації на основі застосування послідовного набору поліноміальних зсувів у вікнах аналізу різних розмірів [70].

У роботі [71] досліджена механіка у випадкових тривимірних волоконно-оптичних мережах. Хоча відомо, що волоконні матеріали деформуються в основному за рахунок обертання і вигину волокон, наслідки обертання та вигину для механіки мережі не зовсім ясні [71]. Зауважено, що класи-

чні моделі, які враховують тільки напруження та деформацію, не можуть повністю урахувати обертання і вигин волокна. У цій же роботі механіка волоконних матеріалів інтерпретується через мікрополярну еластичність, так звану еластичність Коссерія, яка відрізняється від класичної еластичності тим, що враховує локальні моменти, викликані обертанням точок всередині матеріалу. Результуючі рівняння можуть бути записані у термінах характерних довжин, які викликають залежність напруження як від деформації, так і від масштабу матеріалу.

Визначено, що сильний вплив масштабу довжини на жорсткість мереж при вигині з більш м'яким ефектом досягається при крученні. Залежність жорсткості від масштабу за довжиною узгоджується з мікрополярною еластичністю і може бути описана у термінах характерних довжин матеріалу. Фактори, що впливають на характеристичну довжину, були досліджені шляхом зміни густини волокна, вирівнювання і жорсткості на вигин. Хоча було виявлено, що густина не впливає на характеристичну довжину, підвищене вирівнювання волокон призвело до зменшення характеристичної довжини, а підвищена жорсткість волокна на вигин – до збільшення характеристичної довжини. Ці дані свідчать про те, що характерна довжина збільшується за рахунок факторів, які збільшують вигинаючий момент, що підтримується волокнами. Отже, встановлено, що механіка волоконних матеріалів залежить від масштабу довжини.

У роботі [72] здійснено чисельні оцінки пружних властивостей односпрямованих матеріалів, армованих волокнами. Вплив мікроструктури армованих вирівняними волокнами композитів, які не перекриваються, на макроскопічні пружні властивості кількісно оцінювався за допомогою чисельної гомогенізації при моделюванні методом скінченних елементів. Були встановлені нові обмеження, що визначають модулі об'єму і зсуву будь-якої рівноважної системи. Було виявлено, що відповідні мікроструктури для нижньої і верхньої меж є відповідно розподілами волокон Перкуса-Йевіка і певними конфігураціями заповнених волокон [72].

У роботах [73–85, 88, 89] розглянуті питання моделювання властивостей матеріалів мережевої структури. Так, у [74] відзначено, що волоконні матеріали, такі як папір, неткані матеріали, текстиль, біоматеріали на основі наноцелюлози, полімерні сітки і композити, є широко використовуваними універсальними інженерними матеріалами. Деформації у масштабі волоконної мережі безпосередньо впливають на їх ефективну механічну поведінку. Однак обчислювальний опис деформацій є складною задачею через їх стохастичні характеристики. Беручи до уваги цю проблему, поточне дослідження подає структуру обчислювальної гомогенізації у масштабі волоконної мережі, щоб дослідити, як властивості волокна впливають на механічні властивості у масштабі матеріалу. Методологія заснована на (I) геометричному, просторовому і механічному моделюванні волокон і взаємодій між волокнами, (II) формуванні області розв'язку волоконної мережі, граничні вузли у області розв'язку і керуючі вузли області, яка обмежує область розв'язку. Потім крайова задача визначається у

масштабі волоконно-оптичної мережі і розв'язується за допомогою запропонованої структури із використанням евклідова двостороннього узгодження, яке зв'язує граничні вузли та керуючі вузли, подані у вигляді кутових, крайових і поверхневих вузлів. Розрахункові результати показують, що структура підходить для захоплення характеристик волокнистого матеріалу у різних масштабах і може бути застосована до областей розв'язків, створених за допомогою методів стохастичного моделювання, або реконструкції зображень, що призводить до неконформних сіток із незбіжними розподілами граничних вузлів. Потім крайова задача визначається у масштабі волоконно-оптичної мережі і розв'язується за допомогою запропонованої структури із використанням евклідова двостороннього узгодження, яке зв'язує граничні вузли та керуючі вузли, подані у вигляді кутових, крайових та поверхневих вузлів [74].

Огляди стосовно моделювання властивостей волоконних матеріалів описані у [79, 86, 87]. Зокрема, у статті [79] розглядаються основні стратегії, що використовуються для моделювання механічної поведінки нетканних матеріалів, яка визначається структурою їх волокнистих сіток і механічною поведінкою складових їх волокон або ниток. У першій частині обговорюються основні параметри, що впливають на мережеву структуру нетканних матеріалів. У другій частині розглядаються дві основні стратегії, які використовуються при аналізі механічної поведінки нетканних матеріалів із використанням скінченно-елементних моделей, заснованих на безперервних і переривчастих методах.

Із напрямку моделювання властивостей паперу можна виокремити роботи [90–92]. Зокрема, у [91] відзначено, що випробування на розтягнення окремих волокон і листів із біленої крафт-целюлози із м'якої деревини і мікромеханічне моделювання мережі волокон дають можливість припустити, що при подовженні листа використовується тільки частина потенціалу подовження окремих волокон. Криві напруження-деформація двох реальних окремих волокон целюлози і одного штучного волокна були застосовані для мікромеханічного моделювання випадкових волоконних мереж. Як експериментальні результати, так і мікромеханічне моделювання показали, що з'єднання волокон відіграє важливу роль не тільки у визначенні міцності, а й стосовно подовження волоконних мереж. Крім того, результати показують, що форма кривої "напруження-деформація" окремих волокон целюлози може мати значний вплив на форму кривої "напруження-деформація" паперового листа. Значне збільшення подовження і міцності паперу може бути досягнуто тільки за рахунок посилення зв'язку волокон з волокном, як продемонстрували експерименти і мікромеханічне моделювання. Ключовий висновок, пов'язаний із цим дослідженням, полягає у тому, що змодельована однорідна міцність міжволоконного з'єднання не впливає на форму кривої напруження-деформації волоконної мережі до тих пір, поки з'єднання не розірвуться, у той час як кількість зв'язків впливає на активацію волоконної

мережі і на форму кривої розтягування.

Низка робіт, зокрема [93–98], описує дослідження стосовно зв'язку структури та руйнування матеріалів мережевої структури. Так, у [93] описана створена тривимірною чисельною моделлю для характеристики волокнистих сітчастих матеріалів, а поведінка руйнування досліджується за допомогою аналізу методом скінченних елементів. Чисельні результати показують, що волокнистий сітчастий матеріал нечутливий до тріщин, коли довжина тріщини менше критичного значення, яке у три рази більше середньої довжини сегментів волокна у волокнистій мережі. Крім того, механізм зміцнення волокнистого сітчастого матеріалу виявлено на основі моделювання методом скінченних елементів. Через накопичення ушкоджень зв'язків поблизу вершини тріщини волокна навколо неї переорієнтуються і стають перпендикулярними траєкторії тріщини, що може додатково перешкоджати її поширенню, і режим деформації змінюється з деформації із переважанням вигину на деформацію із переважанням розтягування. Результати у цій статті показують, що волокнисті сітчасті матеріали демонструють стійкість до пошкоджень невеликих тріщин за критичної довжини тріщини, а волокниста сітка, утворена крихкими волокнами, може проявляти пластичність за умов контролю мікроструктури і відносної густини, що корисно для проектування і оптимізації волокнистих мережевих матеріалів [93].

У роботі [99] описані дослідження адсорбента на основі двошарового композитного гідрогелю на основі нетканого матеріалу для ефективного видалення Pb (II) і Ni (II) з водного розчину [99].

Дослідженню багатомасштабного закону когезії для мереж з вуглецевого волокна присвячено роботу [100]. Розроблена модель для швидкого інженерного аналізу меж руйнування вуглецевого аблятора, просоченого фенолом – провідним матеріалом теплозахисного екрану, структурним компонентом якого є сітка із вуглецевого волокна [100]. Висунуто гіпотезу про механізми руйнування при непружній деформації та моделюється їх поведінка за допомогою моделювання молекулярної динаміки для розрахунку енергії зв'язку. Потім здійснено масштабування енергії зв'язку до макрорівня, використовуючи аргумент перенормування. Цей підхід забезпечує досить точні прогнози на макрорівні, які вигідно відрізняються від експериментів [100].

Крім того, розроблені раніше підходи, моделі та методи знайшли свій розвиток у роботах [1, 2, 59–63, 101–137]. Разом із тим усі проблемні аспекти у цих роботах повного вирішення не знайшли.

Так, у [101] відзначається, що значна низка матеріалів має стохастичну волоконну мережу як основний структурний компонент. У деяких випадках мережа вбудовується у матрицю, а у деяких інших випадках матеріали виготовляються виключно з волокон. Область гомогенізації та моделювання властивостей волокнистих композитів із твердою матрицею натеper добре розвинена. Однак ситуації, за яких волокна утворюють зшиту мережу (з матрицею або без неї), вивчалися недостатньо ретельно. У цій статті зазначені проблеми, які ще належить вирішити у пошуках надійних та репрезентативних базових моделей для цього типу матеріалів. Обговорення зосере-

джено на волокнистих мережах без матриці, оскільки це є граничний випадок мережевої механіки. Наданий короткий огляд доступних конститутивних моделей, заснованих на мікроструктурі [1, 2, 101]. Також окреслені фізичні аспекти, які важливі для механіки таких матеріалів та мають бути відображені у нових моделях.

У статтях [104, 106] описані випадкові чарункові та волоконні мережі, які формують деякі матеріали. Установлено, що волокнисті мережі демонструють при розтягуванні знижену жорсткість при деформації, знижене вирівнювання волокон і знижене скорочення Пуассона при одноосьовому розтягуванні [104].

Подібні питання для випадкових волоконних мереж із міжволоконною адгезією розглядаються у роботі [105].

У роботі [107] досліджується міцність стохастичних мереж без раніше існуючих пошкоджень, які виходять з ладу через розрив зшивання. Атермальні мережі у діапазоні від приблизно афінних до сильно неафінних піддаються багатовісному навантаженню, а міцність оцінюється за допомогою чисельних моделей. Помічено, що після нормалізації напруження на міцність, виміряну при одноосьовому розтягуванні, поверхня руйнування стає приблизно незалежною від параметрів мережі. Це розширює зв'язок між міцністю і параметрами мережі, раніше встановлену у [63] на багатовісний випадок. Поверхня руйнування залежить від обох перших двох інваріантів напруження. Сильно неафінні мережі поведуться дещо інакше, ніж афінні мережі при навантаженні, близьких до режимів гідростатичного і чисто зсувного навантаження, у той час як різниця зникає у першому квадранті простору головних напружень. Результати порівнюються з експериментальними даними з літератури [105].

У роботі [106] описано вплив розміру на лінійний і нелінійний механічний відгук тривимірних стохастичних волоконних мереж. Ефект розміру більш виражений у неафінних мережах, ніж у афінних, і повільно зменшується при збільшенні розміру моделі. Щоб усунути цей ефект, необхідно враховувати моделі, більші, ніж ті, які можуть бути ефективно розв'язані за допомогою сучасних комп'ютерів [105]. Запропонований метод, який дає можливість використовувати відносно невеликі моделі, при цьому точно прогнозуючи поведінку мережі за малих і великих деформацій. Метод заснований на узагальнених граничних умовах, які адаптуються до вимог, що пред'являються до волокнистих матеріалів [105].

Питанням визначення пружного відгуку випадкових волоконних мереж на основі моделей континууму градієнта деформації присвячена робота [107]. Метою цієї роботи є розробка моделей лінійного пружного континууму з анізотропним градієнтом деформації для двовимірних випадкових волоконних мереж. Складові модулі еквівалентного континууму градієнта деформації оцінюються на основі відгуку явного подання мережі у так званих вікнах аналізу, у яких кожне волокно моделюється як пучок, а волокна з'єднуються у точках перетину

за допомогою зварних з'єднань. Принцип еквівалентності енергії деформації, заснований на розширенні до градієнту деформації умови макрооднорідності Хілла – Мандела, використовується для ідентифікації класичних модулів і модулів градієнту деформації на основі застосування послідовного набору поліноміальних зсувів у вікнах аналізу різних розмірів [107].

У роботі [108] досліджена механіка у випадкових тривимірних волоконно-оптичних мережах. Хоча відомо, що волокнисті матеріали деформуються в основному за рахунок обертання і вигину волокон, наслідки обертання та вигину для механіки мережі не зовсім ясні [108]. Зауважено, що класичні моделі, які враховують тільки напруження та деформацію, не можуть повністю урахувати обертання і вигин волокна. У цій же роботі механіка волокнистих матеріалів інтерпретується через мікрополярну еластичність, так звану еластичність Коссерія, яка відрізняється від класичної еластичності тим, що враховує локальні моменти, викликані обертанням точок всередині матеріалу. Результуючі рівняння можуть бути записані у термінах характерних довжин, які викликають залежність напруження як від деформації, так і від масштабу матеріалу.

Визначено, що сильний вплив масштабу довжини на жорсткість мереж при вигині з більш м'яким ефектом досягається при крученні. Залежність жорсткості від масштабу за довжиною узгоджується з мікрополярною еластичністю і може бути описана у термінах характерних довжин матеріалу. Фактори, що впливають на характеристичну довжину, були досліджені шляхом зміни густини волокна, вирівнювання і жорсткості на вигин. Хоча було виявлено, що густина не впливає на характеристичну довжину, підвищене вирівнювання волокон призвело до зменшення характеристичної довжини, а підвищена жорсткість волокна на вигин – до збільшення характеристичної довжини. Ці дані свідчать про те, що характерна довжина збільшується за рахунок факторів, які збільшують вигинаючий момент, що підтримується волокнами. Отже, встановлено, що механіка волокнистих матеріалів залежить від масштабу довжини.

У роботі [109] здійснено чисельні оцінки пружних властивостей односпрямованих матеріалів, армованих волокнами. Вплив мікроструктури армованих вирівняними волокнами композитів, які не перекриваються, на макроскопічні пружні властивості кількісно оцінювався за допомогою чисельної гомогенізації при моделюванні методом скінченних елементів. Були встановлені нові обмеження, що визначають модулі об'єму і зсуву будь-якої рівноважної системи. Було виявлено, що відповідні мікроструктури для нижньої і верхньої меж є відповідно розподілами волокон Перкуса-Йєвіка і певними конфігураціями заповнених волокон [109].

У роботах [110–126] розглянуті питання моделювання властивостей матеріалів мережевої структури у різних аспектах. Так, у [111] відзначено, що волокнисті матеріали, такі як папір, неткані матеріали, текстиль, біоматеріали на основі наноцелюлози, полімерні сітки і композити, є широко використовуваними універсальними інженерними матеріалами. Деформації у масштабі волоконної мережі безпосеред-

ньо впливають на їх ефективну механічну поведінку. Однак обчислювальний опис деформацій є складною задачею через їх стохастичні характеристики. Беручи до уваги цю проблему, поточне дослідження подає структуру обчислювальної гомогенізації у масштабі волоконної мережі, щоб дослідити, як властивості волокон впливають на механічні властивості у масштабі матеріалу. Методологія заснована на (I) геометричному, просторовому і механічному моделюванні волокон і взаємодій між волокнами, (II) формуванні області розв'язку волоконної мережі, граничні вузли у області розв'язку і керуючі вузли області, яка обмежує область розв'язку. Потім крайова задача визначається у масштабі волоконно-оптичної мережі і розв'язується за допомогою запропонованої структури із використанням евклідова двостороннього узгодження, яке зв'язує граничні вузли та керуючі вузли, подані у вигляді кутових, крайових і поверхневих вузлів. Розрахункові результати показують, що структура підходить для захоплення характеристик волокнистого матеріалу у різних масштабах і може бути застосована до областей розв'язків, створених за допомогою методів стохастичного моделювання або реконструкції зображень, що призводить до неконформних сіток із незбіжними розподілами граничних вузлів. Потім крайова задача визначається у масштабі волоконно-оптичної мережі і розв'язується за допомогою запропонованої структури із використанням евклідова двостороннього узгодження, яке зв'язує граничні вузли та керуючі вузли, подані у вигляді кутових, крайових та поверхневих вузлів [111].

Огляди стосовно моделювання властивостей волоконних матеріалів описані у [116, 123, 124]. Зокрема, у статті [116] розглядаються основні стратегії, що використовуються для моделювання механічної поведінки нетканих матеріалів, яка визначається структурою їх волокнистих сіток і механічною поведінкою складових їх волокон або ниток. У першій частині обговорюються основні параметри, що впливають на мережеву структуру нетканих матеріалів. У другій частині розглядаються дві основні стратегії, які використовуються при аналізі механічної поведінки нетканих матеріалів із використанням скінченно-елементних моделей, заснованих на безперервних і переривчастих методах.

Із напрямку моделювання властивостей паперу можна виокремити роботи [127–129]. Зокрема, у [128] відзначено, що випробування на розтягнення окремих волокон і листів із біленої крафт-целюлози із м'якої деревини і мікромеханічне моделювання мережі волокон дають можливість припустити, що при подовженні листа використовується тільки частина потенціалу подовження окремих волокон. Криві напруження-деформація двох реальних окремих волокон целюлози і одного штучного волокна були застосовані для мікромеханічного моделювання випадкових волоконних мереж. Як експериментальні результати, так і мікромеханічне моделювання показали, що з'єднання волокон відіграє важливу роль не тільки у визначенні міцності, а й стосовно подовження волоконних мереж. Крім того, результати показують, що форма кривої "напру-

ження-деформація" окремих волокон целюлози може мати значний вплив на форму кривої "напруження-деформація" паперового листа. Значне збільшення подовження і міцності паперу може бути досягнуто тільки за рахунок посилення зв'язку волокна з волокном, як продемонстрували експерименти і мікромеханічне моделювання. Ключовий висновок, пов'язаний із цим дослідженням, полягає у тому, що змодельована однорідна міцність міжволоконного з'єднання не впливає на форму кривої напруження-деформації волоконної мережі до тих пір, поки з'єднання не розірвуться, у той час як кількість зв'язків впливає на активацію волоконної мережі і на форму кривої розтягування.

Низка робіт, зокрема [130–135], описує дослідження стосовно зв'язку структури та руйнування матеріалів мережевої структури. Так, у [130] описана створена тривимірна чисельна модель для характеристики волокнистих сітчастих матеріалів, а поведінка руйнування досліджується за допомогою аналізу МСЕ. Чисельні результати показують, що волокнистий сітчастий матеріал нечутливий до тріщин, коли довжина тріщини менше критичного значення, яке у три рази більше середньої довжини сегментів волокна у волокнистій мережі. Крім того, механізм зміцнення волокнистого сітчастого матеріалу виявлено на основі моделювання методом скінченних елементів. Через накопичення ушкоджень зв'язків поблизу вершини тріщини волокна навколо неї переорієнтуються і стають перпендикулярними траєкторії тріщини, що може додатково перешкоджати її поширенню, і режим деформації змінюється з деформації із переважанням вигину на деформацію із переважанням розтягування. Результати у цій статті показують, що волокнисті сітчасті матеріали демонструють стійкість до пошкоджень невеликих тріщин за критичної довжини тріщини, а волокниста сітка, утворена крихкими волокнами, може проявляти пластичність за умов контролю мікроструктури і відносної густини, що корисно для проектування і оптимізації волокнистих мережевих матеріалів [130].

У роботі [136] описані дослідження адсорбента на основі двошарового композитного гідрогелю на основі нетканого матеріалу для ефективного видалення Pb (II) і Ni (II) з водного розчину.

Дослідженню багатомасштабного закону когезії для мереж з вуглецевого волокна присвячено роботу [137]. Розроблена модель для швидкого інженерного аналізу меж руйнування вуглецевого аблятора, просоченого фенолом – провідним матеріалом теплозахисного екрану, структурним компонентом якого є сітка із вуглецевого волокна. Висунуто гіпотезу про механізми руйнування при непружній деформації та моделюється їх поведінка за допомогою моделювання молекулярної динаміки для розрахунку енергії зв'язку. Потім здійснено масштабування енергії зв'язку до макрорівня, використовуючи аргумент перенормування. Цей підхід забезпечує досить точні прогнози на макрорівні, які вигідно відрізняються від експериментів [137].

Усі здійснені розробки нових моделей, методів та підходів до дослідження властивостей матеріалів мережевої структури свідчать про те, що на тепер від-

сутні усталені методології моделювання поведінки матеріалів під навантаженням. Таким чином, необхідне створення методологічних основ досліджень для аналізу деформування матеріалів мережевої структури, які позбавлені багатьох недоліків існуючих розробок.

Загальний висновок полягає в тому, що у літературі натеper не існує єдиного підходу у моделюванні матеріалів із мережевою мікроструктурою. Це призводить до необхідності розвитку нових підходів. Наприклад, як варіант у цій роботі пропонується подалше вдосконалення запропонованого варіаційного підходу до гомогенізації матеріалів з сітчастою будовою, пов'язаного з уточненням кінематичних мікро- і макроспіввідношень.

Нижче запропоновані підходи, розвинені моделі та розроблені методи знайшли своє розгорнуте відображення.

Метою роботи є розроблення нових методів розрахунку напружено-деформованого стану шляхом створення і застосування у практиці розрахунків нелінійних моделей деформування матеріалу елементів конструкцій в об'ємі на основі мікроемеханіки суцільного середовища.

Розвиток базових підходів, моделей та методів досліджень напружено-деформованого стану тіл із матеріалів мережевої структури. Розглянемо, слідуєчи [1, 2, 59–63], базові підходи до дослідження сучасних матеріалів на прикладі просторових волоконних структур. Для розв'язання поставлених у роботі задач потрібне залучення широкого арсеналу методів і моделей механіки деформівного твердого тіла, теорії пружності і механіки контактної взаємодії, а також їх розвиток і створення нових методів та моделей.

Вихідними співвідношеннями, від яких необхідно відштовхуватися при дослідженні НДС, контактних навантажень і міцності волоконних та зернистих структур, плівок, композитів, а також конструкцій, елементи котрих знаходяться у контактній механічній взаємодії, є [138, 139]: геометричні співвідношення, що визначають лінійні деформації внаслідок переміщення $\varphi(X, t): X \rightarrow x^*(x = X + u)$ точок $X \in V$ суцільного тіла V через градієнт деформацій

$$F = \nabla_X \varphi(X, t) \quad (1)$$

та інші міри деформації; рівняння рівноваги або закон збереження лінійного моменту, які застосовуються до розподілу внутрішніх зусиль у вигляді напружень, зокрема, першого тензора Піоли-Кірхгофа P , та зовнішньої об'ємної сили Q всередині тіла V

$$\operatorname{div}_X P(X) + Q = 0; \quad (2)$$

а також фізичні співвідношення, що пов'язують між собою напруження та деформації; на відміну від рівнянь кінематики та рівноваги, що є універсальними для будь-яких тіл у межах локальної теорії суцільного деформівного середовища, закон меха-

нічного відгуку на навантаження є специфічним для кожного матеріалу; загальними є лише термодинамічні співвідношення, якими напруження визначаються як спряжені до деформацій величини

$$P = \partial_F \psi(F, I) \quad (3)$$

відносно внутрішньої механічної енергії. Слід зауважити, що для незворотних процесів деформування функція щільності енергії залежатиме також від історії навантаження I . Додатково визначаються крайові умови типу:

Діріхле

$$\varphi = \bar{\varphi}(X, t), X \in \partial B_u, \quad (4)$$

Неймана

$$P \cdot N = \bar{T}(F, I), X \in \partial B_\sigma \quad (5)$$

відповідно до поділу поверхні тіла на частини $\partial B_u \cup \partial B_\sigma = \partial B$, де задані, відповідно, переміщення $\bar{\varphi}$ та зусилля \bar{T} до зовнішньої нормалі N .

Крім того, на частині поверхні можливого контакту реалізуються крайові умови, які відображають умови непроникнення тіл одне в одного:

$$u_i^{(1)} \cdot v_i^{(1)} + u_i^{(2)} \cdot v_i^{(2)} \leq \delta^{(12)}. \quad (6)$$

У цих співвідношеннях справедливі позначення: $v_i^{(k)}$ – компоненти нормалі до тіла (k) , а $\delta^{(ks)}$ – зазор у спряженні тіл k і S . Нерівності (6) справедливі на частині поверхні можливого контакту S_c .

Співвідношення (1)–(6) є натеper достатньо відпрацьованими з точки зору методів розв'язання задач визначення НДС. У той же час вимоги техніки, можливості технології і матеріалознавства призводять до того стану, коли вихідні базові гіпотези і моделі виходять на границі області свого застосування. Зокрема, це відноситься до багатьох важливих аспектів. Так, на сьогодні у різних галузях промисловості знаходять своє широке застосування різноманітні волоконні матеріали, зокрема, так звані неткані [31, 140]. Для дослідження поведінки таких матеріалів під навантаженням неприйнятні традиційні підходи на основі подання матеріалу у вигляді суцільного середовища. Справа у тому, що вже на мікрорівні (рис. 1) навіть елементарний фрагмент матеріалу не можна гомогенізувати із застосуванням традиційного підходу механіки суцільного середовища. У цьому випадку втрачається традиційний сенс поняття напруження. Це викликано тим, що на мікрорівні геометрична форма фрагмента Θ матеріалу, що піддається дії навантаження F , визначається початковою конфігурацією положення вузлів взаємодії окремих волокон i, j, k, \dots , а також початкових відстаней l_{ij} між окремими вузлами. Іншим важливим моментом є те, що у процесі навантаження і положення вузлів у просторі і міжвузлові довжини є змінними. У цьому випадку через зникаюче малу згинну жорсткість волокон до-

сліджуваного матеріалу при малому їхньому діаметрі єдиним силовим фактором є невід'ємне зусилля розтягування N (див. рис. 1), що зумовлене осьовим напруженням σ , яке розподілене рівномірно у перетині волокна.

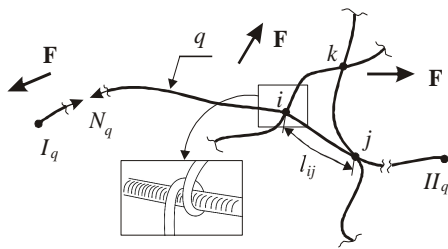


Рисунок 1 – Мережева структура волокнистого нетканого матеріалу [2, 61]

Природно, що при цьому

$$l_{ij} = \Delta r_{ij} \Leftrightarrow N_q > 0, \sigma_q > 0 \forall q, \quad (7)$$

а внаслідок – гіпотеза про вільний ненапружений стан ділянки волокна при дотриманні умови

$$N_{q_i} = 0 \Leftrightarrow l_{ij} \geq \Delta r_{ij}, \quad (8)$$

де $N_{q_i}, l_{ij}, \Delta r_{ij}$ – внутрішні зусилля на ділянці між вузлами i, j , довжина ділянки волокна і відстань між вузлами в актуальному стані відповідно.

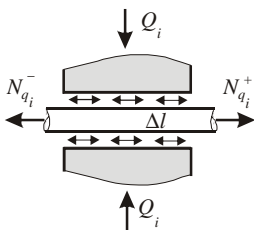


Рисунок 2 – Модель взаємодії волокон у вузлі: i, j, k – вузли взаємодії окремих ниток фрагменту Φ ;

I_q, II_q – початкові та кінцеві краї волокна з номером q довжиною L_q і діаметром d_q [2]

У самому вузлі з'єднання (рис. 2) відбувається або збереження відносного спокою внаслідок значної величини зусилля тертя спокою:

$$\Delta l_i = 0; N_{mp_i} = Q_i k_{mp} \geq N_{q_i}^+ - N_{q_i}^-, \quad (9)$$

або відбувається відносний рух на величину ковзання Δl_i до задоволення умов рівноваги

$$\Delta l_i > 0; N_{q_i}^+ - N_{q_i}^- = N_{mp_i}. \quad (10)$$

Оскільки у цій системі присутні умови типу нерівностей (7)–(10), то процес необхідно розглядати у прирошеннях навантажень ΔF і конфігурацій $\Delta \Theta$. Цим самим отримує математичну формалізацію та відмінна фізична особливість, що механізм деформування такого матеріалу принципово відрізняється від механізму деформування традиційного

композиційного матеріалу, зануреного у матрицю.

Зазначені вище особливості не дають змоги переходити до локального формулювання розв'язувальних рівнянь, що описують поведінку досліджуваного матеріалу на основі граничних підходів при аналізі станів малих ґраток матеріалу. Крім того, вимагає нової інтерпретації поняття компонент НДС.

Традиційними моделями для розв'язання зазначених проблемних ситуацій є застосування методів механіки для великих вибірок вузлів, які складають представницький фрагмент Θ досліджуваного матеріалу, а також моделей гомогенізації властивостей, що ставлять множині властивостей і характеристик напружено-деформованого стану волокон на мікрорівні, з одного боку, зведені характеристики НДС матеріалу на макрорівні, – з іншого. Ці питання частково відображені у роботах [138], однак запропоновані моделі не дають повного вирішення проблеми. Більш того, у низці експериментів зафіксовані результати, які не можуть бути узгоджені та пояснені ніякими із загальноприйнятих моделей. Таким чином, для створення більш загальних моделей, придатних для опису поведінки матеріалів такого типу, необхідно: по-перше, розробити модель для коректного опису ансамблю волокон, що знаходяться у взаємодії між собою, на основі підходів мікромеханіки; по-друге, потрібне створення підмоделі гомогенізації властивостей при переході від мікро- до макромасштабу; по-третє, необхідно розробити модель, що поєднує перші дві підмоделі.

Розглянемо загальні підходи до розв'язання цих задач. Задача статистичного опису ансамблю взаємодіючих волокон може формулюватися як у локальній, так і у глобальній постановках. Для локальної постановки властиво виділити деяку множину вузлів, що складають представницький фрагмент Θ , а потім записати для кожного вузла і волокна умови рівноваги для вузлів і подовжень для ділянок волокон, базуючись на рівняннях типу (7)–(10).

Варіаційне формулювання може бути записане або у формі мінімізації прирощень повної внутрішньої енергії виділеного фрагмента Θ (тобто у проковзуваннях Δl і координатах Δr), або у формі мінімізації додаткової енергії (тобто у навантаженнях ΔN). У першому випадку отримуємо недиференційований функціонал (типу представленого на рис. 3, б), у другому – функціонал з областю невизначеності екстремуму (див. рис. 3, а). І у першому, і у другому випадку отримуємо проблеми пошуку однозначного розв'язку.

Проаналізувавши представлені варіанти, можна запропонувати наступні етапи досліджень:

- на основі локальної постановки досліджується фрагмент Θ , що містить одиниці волокон і вузлів їх з'єднання;
- на основі варіаційної постановки у переміщеннях досліджується представницький фрагмент Θ із кількістю вузлів кілька десятків і сотень із точки зору поведінки системи під навантаженням при збереженні початкової множини вузлів з'єднання волокон у поточному актуальному стані;

• на основі варіаційної постановки у навантаженнях досліджується представницький фрагмент Θ^{\sim} з кількістю вузлів кілька сотень і тисяч при можливій зміні множини вузлів з'єднання волокон у поточному актуальному стані порівняно із початковим.

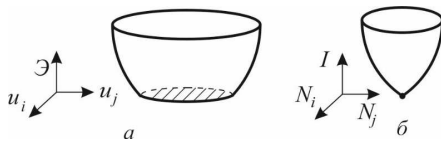


Рисунок 3 – Вид вигляду функціоналів:

a – повна внутрішня енергія; b – додаткова енергія [2, 61]

Описані постановки, кожна окремо, а тим більше – в їх послідовному поєднанні, відрізняються від традиційних постановок: по-перше, вони орієнтовані не на регулярні повторювані структури, а на деякий стохастичний розподіл волокон і вузлів; по-друге, у вузлах взаємодії волокон передбачена не тільки можливість злиття (нерухомого з'єднання), а й проковзування волокон одне відносно іншого; по-третє, враховується тертя у сполученні волокон, а, отже, враховується історія навантаження, що змушує здійснювати розв'язання задачі у прирощеннях.

Для розв'язання задачі гомогенізації властивостей волокнистих нетканних матеріалів залучаються моделі осереднення за множиною напрямків. При цьому в модель гомогенізації привносяться операції інтегрування на замкненій поверхні, що оточує деяку точку всередині представницького об'єму Θ^{\sim} , з ваговою функцією, яка певним чином розподілена на цій поверхні:

$$\langle \xi \rangle = \int \xi \rho_0(S) dS,$$

де ξ – осереднена величина стану, $\rho_0(S)$ – вихідна щільність розподілу волокон, а S – статистично представницька поверхня.

Модель гомогенізації властивостей волокнистих нетканних матеріалів, яка розроблена і запропонована до використання у роботі, відрізняється від відомих саме процедурою осереднення із залученням інтегрування із вагою на замкненій поверхні навколо точки осереднення.

Крім розв'язання виникаючих описаних двох задач, потрібне також їх спільне розв'язання для аналізу реакції елементів конструкцій із волокнистих матеріалів на дію навантаження F . Для цього пропонується об'єднати всі параметри, які беруть участь у розв'язанні цих задач, а потім визначити характеристики, що описують функціональні властивості елементів конструкцій із цих матеріалів. Це – окреме завдання, тому що традиційні характеристики міцності безпосередньо до досліджуваного об'єкта не можуть бути застосовні. Дійсно, у деяких вузлах з'єднання волокон навіть при малих рівнях зовнішнього навантаження F можливе значне зміщення за рахунок взаємних трансляцій волокон без їхнього розриву. Більш того, ці волокна можуть виходити із механічного контакту. У традиційних

підходах це можна трактувати або як ознаку початку руйнування, або як процес руйнування. Однак стосовно досліджуваних матеріалів коректніше було б визначити це як процес природного функціонування складної системи із протіканням структурних змін і частковою втратою інтенсивності внутрішніх силових та кінематичних зв'язків між компонентами системи. Цей процес має такі особливості: він починається з мінімального рівня навантаження F , розосереджений у просторі і в певний момент може набути різко прискореного характеру; у цій частині він подібний до континуального накопичення пошкоджувальності, проте з тією принциповою різницею, що фізичні механізми, які їх породжують, – різні, а також різні механізми накопичення (у разі континуальної механіки пошкоджуваності має місце зростання характеристики в точці, і його швидкість залежить від напруженого стану в ній, а в разі волокнистих нетканних матеріалів прояв такої тенденції – не локальний, а загальний для представницького фрагмента або елемента конструкції); для нього характерна незворотність за параметром навантаження, як, наприклад, у механізмі пластичного деформування, проте така аналогія властива тільки окремо взятим парам у вузлі волокон; у багатьох випадках визначити граничний стан елемента конструкції з волокнистого матеріалу неможливо, ґрунтуючись лише на аналізі стану системи, що навантажується – важливий також і спосіб прикладання навантаження, і вид функціональної вимоги, що ставиться до цього елемента.

Отже, у загальному випадку не вдається виокремити моделі, що пов'язують попарно, з одного боку, навантаження і напружено-деформований стан об'єкта, з іншого – НДС і міцнісні характеристики, а далі – міцнісні характеристики і функціональні властивості. Усі ці процеси, співвідношення та властивості потрібно розглядати у загальній їх сукупності, спираючись на локальні або варіаційні постановки і підходи статистичної механіки, а також орієнтуючись на фізичні процеси, що описують навантаження об'єкта і втрату його функціональних властивостей. Виходячи з цього, в цьому випадку маємо справу з механічною конструкцією, що описується системою рівнянь і нерівностей в прирощеннях, що залежить від початкового стану та історії навантаження: $I \in \partial_t \Phi(Z, I, I)$. Тут I – внутрішня змінна, Z – змінна стану, а Φ – потенціал дисипації.

Розроблені загальні підходи до дослідження такого типу конструкцій описані нижче.

Розроблення методів і моделей для дослідження макромеханічних властивостей волокнистих матеріалів на основі мікромеханічних підходів та варіаційних формулювань. На розвиток методів і моделей, описаних у роботах [1, 2], розвинені методи та моделі для дослідження макромеханічних властивостей волокнистих матеріалів на основі мікромеханічних підходів та варіаційних формулювань.

Мікромеханіка волокнистих структур. Осереднення випадкових волокнистих структур. Досліджуються матеріали, що мають на мікроскопічному рівні мережеву структуру і є порівняно новими з точки зору створення та використання на практиці. Такі

структури утворені великою кількістю волокон, пов'язаних між собою в точках з'єднання. Оскільки один з розмірів волокон домінує над іншими, вони по суті є одновимірними об'єктами, зануреними у тривимірний простір, як показано на рис. 4. У цьому полягає їх істотна відмінність від інших неоднорідних структур, в яких присутні тривимірні компоненти (такі як включення, шари або пори, що займають певні області простору) або ж безрозмірні об'єкти (частки або окремі атоми, для яких істотна не форма, а лише положення у щільно упакованій структурі матеріалу).

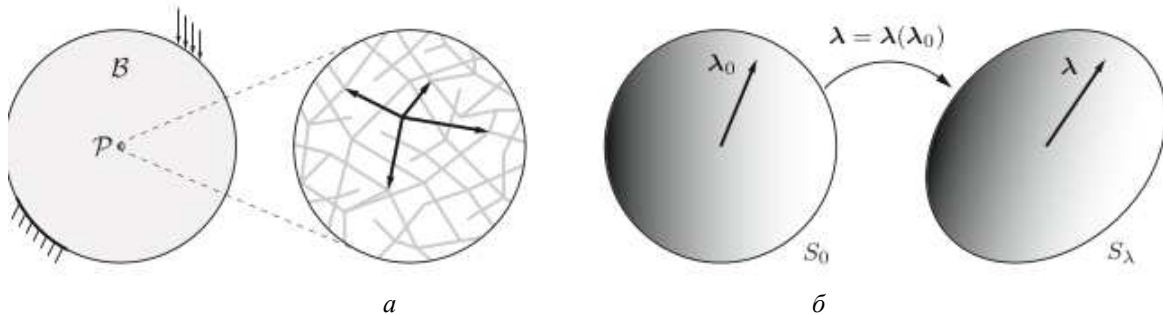


Рисунок 4 – Модель матеріалу з волоконною мікроструктурою [60]:

a – випадкова сіткова мікроструктура безперервного твердого тіла V у матеріальній точці P , утворена довгими волокнами (прямі лінії), стрілками відзначені волокна, що йдуть від однієї з точок з'єднання в мережі;

б – статистичний опис випадкової сітки як набору волокон з ізотропним розподілом початкових орієнтацій λ_0 на одиничній сфері S_0 , а також її деформації, яка визначається векторною функцією мікророзтягнення $\lambda(\lambda_0)$:

$$\lambda_0 \in S_0 \rightarrow \lambda \in S_\lambda \subset \mathbb{R}^3$$

Волоконні мережі можуть мати складну нерегулярну просторову геометрію. Для аналізу їх поведінки під навантаженням потрібне створення нових підходів, моделей і методів, адаптованих для дослідження таких матеріалів. Вони викладені у цьому розділі. Для опису структури і поведінки волоконних мереж пропонується статистичний підхід. У рамках цього підходу волокна не розглядаються окремо, а об'єднані у статистичний набір, у якому вони розрізняються за певними ключовими атрибутами. Зокрема, статистичний опис, запропонований тут, розділяє волокна мережі за їх первинною орієнтацією у недеформованому стані за аналогією з роботами [141, 142]. Відповідно, деформація сітки задається розподілом величин деформації волокон за заданим статистичним простором. Сумарні значення пружної енергії та інших величин природним чином отримуються осередненням отримуваних розподілів енергії деформації окремих волокон із набору. Цей формалізм по суті забезпечує гомогенізацію випадкових мережевих мікроструктур.

Пропонований статистичний опис ґрунтується на наступних припущеннях про мережеву структуру, її геометрію та деформації: точки з'єднання не здійснюють теплового руху, отже, вони займають цілком певні положення у просторі; усі волокна мережі однотипні і мають однорідні властивості (рівну молекулярну вагу, вихідну довжину, жорсткість тощо); у початковій конфігурації сітки волокна мають однакову відстань між кінцями R_0 і орієнтовані ізотропно в усіх напрямках; деформації волокон з однаковою початковою орієнтацією строго співпадають. За цих припущень ототожнення випадкової сітки з набором волокон, що відрізняються тільки за їх вихідною орієнтацією, є виправданим.

Без втрати загальності можна вважати, що у початковій конфігурації усі волокна мають одиничне розтя-

гнення $|\lambda_0| = 1$, де початковий вектор розтягнення $\lambda_0 = \mathbf{R}_0/R_0$ є вектором \mathbf{R}_0 , що з'єднує кінці волокна, віднесений до його абсолютної довжини R_0 . Безрозмірний вектор розтягнення зручний для опису мікродоформації волокон за умови, що всі вони однакові і, зокрема, мають однакову довжину \mathbf{R}_0 . Таким чином, одиничним вектором λ_0 визначається початкова орієнтація волокон, за якою їх і пропонується розрізняти у вихідній структурі мережі. Оскільки кінці усіх одиничних векторів лежать на одиничній сфері S_0 , можна, у свою чергу, асоціювати кожен точку на сфері із множиною всіх волокон із певною орієнтацією λ_0 , як показано на рис. 4. У літературі за S_0 устоялася назва мікросфери. Виходячи з припущення про рівномірний початковий розподіл орієнтації волокон у сітці, можна ввести однорідну одиничну щільність орієнтацій $1/|S_0| = 1/4\pi$, скальовану на множник $p_0(\lambda_0) = 1$. Ця функція визначає частку волокон у мережі з початковою орієнтацією у нескінченно малому околі $d\lambda_0$ точки λ_0 як

$$\frac{1}{|S_0|} p_0(\lambda_0) |d\lambda_0| = \frac{1}{|S_0|} |d\lambda_0|. \quad (11)$$

Осереднення на мережі довільної величин $\zeta = \zeta(\lambda_0)$, асоційованої з волокнами певної орієнтації λ_0 , виконується шляхом інтегрування на одиничній сфері

$$\langle \zeta \rangle = \frac{1}{|S_0|} \int_{S_0} \zeta(\lambda_0) |d\lambda_0| \quad (12)$$

Деформація сітки у рамках запропонованого формалізму описується векторною функцією $\lambda(\lambda_0)$. Її значенням є вектор мікророзтягнення, який визначається як $\lambda = \mathbf{R}/R_0$, де \mathbf{R} є вектором, що з'єднує кінці деформованих волокон із початковою орієнтацією λ_0 . Ця функція

відображає мікросферу S_0 в IR^3 , або, конкретніше, за умови, що функція $\lambda(\lambda_0)$ неперервна, – на поверхні розтягнення S_λ , як показано на рис. 4, відповідно до виразу

$$\lambda(\lambda_0) : \lambda_0 \in S_0 \rightarrow \lambda \in S_\lambda \subset IR^3. \quad (13)$$

У деформованому стані осереднення величин, що прямо залежать від мікророзтягнення волокон $\zeta = \zeta(\lambda)$, здійснюється за аналогією з (12) як

$$\langle \zeta \rangle = \frac{1}{|S_0|} \int_{S_0} \zeta(\lambda(\lambda_0)) |d\lambda_0|. \quad (14)$$

Пропонований статистичний опис містить найбільш важливу інформацію про мережу та її деформації, яка визначається векторною величиною розтягнення волокон. Інші сіткові моделі, які розглядають орієнтацію волокон, працюють зі скалярними полями, такими як абсолютна величина розтягнення [31], функція щільності орієнтації [143, 144] або щільність розподілу вектора подовження [28, 145], які є менш інформативними. Винятком є заснована на мікросфері модель, яка містить змінне векторне поле, відмінне, проте, від розглянутого у цій роботі. Воно служить не для подання фактичного розтягування волокон, а для опису зміни початкової орієнтації волокон, пов'язаної з ремоделюванням м'якої тканини.

У цій роботі зміна вектора розтягування мікроволокон містить у собі два основних механізми деформації в мережі: осьове подовження волокон та їх поворот. Реакція волокон на осьове розтягнення у кінцевому рахунку і складає загальний механічний відгук матеріалу на макроскопічну деформацію. Однак статистична міра мікродеформацій наразі введена як невідома змінна. Їх потрібно пов'язати з макроскопічною деформацією, що здійснюється за допомогою спеціального кінематичного співвідношення.

Рівняння кінематичного зв'язку для мікродеформацій. У роботі для складання кінематичних рівнянь зв'язку мікродеформацій волокон із макроскопічними деформаціями суцільного тіла розглядаються мережеві шляхи, що вводяться за аналогією із теорією графів. Ці шляхи складені з волокон, послідовно з'єднаних одне з одним у місцях сполучення. Якщо з'єднання між волокнами не руйнуються, то ці шляхи залишаються безперервними у ході деформування мікроструктури. Такий шлях, що складається з великого числа волокон, може з'єднувати точки на відстані, що значно перевищує розміри окремих волокон, і, відповідно, розростатися до масштабів макроскопічного тіла. В околі матеріальної точки суцільного тіла деформації макроскопічних об'єктів характеризуються тензором градієнта деформацій F . Виходячи з того, що деформації такого шляху як сукупності мікроскопічних волокон сітки, з одного боку, і лінійного елемента в околі матеріальної точки, з іншого боку, тотожні, видається можливим установити зв'язок між кінематичними величинами на мікро- та макрорівнях.

Для того, щоб шлях у сітці досягав необхідної

довжини, він, крім іншого, повинен бути якомога більш прямим. Виходячи з цього, пропонується розглянути спеціальні шляхи, які у кожній точці з'єднання продовжуються уздовж волокна з максимальним просуванням у певному напрямку, названі *шляхами максимального просування*. Ці шляхи визначаються у початковому недеформованому стані сітки, в якому всі волокна мають одиничне розтягнення і рівномірно орієнтовані у всіх напрямках. Розглянемо довільний напрямок шляху, який визначається одиничним вектором I_0 з $|I_0|=1$, тоді просування у цьому напрямку уздовж волокна з орієнтацією λ_0

$$\xi = \lambda_0 \cdot I_0. \quad (15)$$

Функція розподілу цієї випадкової величини виражається у такий спосіб:

$$F_\xi(x) = P(\xi = \lambda_0 \cdot I_0 \leq x) = \frac{1}{|S_{0,x}|} \int_{S_{0,x}} |d\lambda_0|, \quad (16)$$

де $S_{0,x} = \{\lambda_0 \in S_0; \lambda_0 \cdot I_0 \leq x\}$ підмножина напрямків, у яких просування у напрямку I_0 не перевищує x . Відповідна функція щільності ймовірності обчислюється як

$$p_\xi(x) = \frac{d}{dx}(F_\xi(x)) = \frac{1}{2}. \quad (17)$$

Розглянемо тепер вузол сітки, що належить шляху максимального просування, схематично зображений на рис. 5, а. У цьому вузлі з'єднано f волокон із початковими орієнтаціями $(\lambda_0^i)_{i=1}^f$, де f становить функціональність сітки. За умови, що шлях прийшов до цього з'єднання уздовж одного з волокон λ_0^f , залишається $(f-1)$ волокно, уздовж яких його можна продовжити далі. Ці волокна мають вектори орієнтації $(\lambda_0^i)_{i=1}^{f-1}$, які покладаються випадковими некорелюючими величинами, кожна з яких має рівномірний розподіл на мікросфері S_0 , як і в цілому на сітці.

Просування у напрямку I_0 уздовж цих волокон визначається $(f-1)$ випадковими величинами $\xi^i = \lambda_0^i \cdot I_0$, кожна з яких має розподіл (16).

Максимальне просування від цього вузла в напрямку I_0 у підсумку становить

$$\xi^m = \max \left\{ \xi^i \right\}_{i=1}^{f-1}, \quad (18)$$

що, у свою чергу, також є випадковою величиною з функцією розподілу

$$\begin{aligned} F_{\xi^m}(x) &= P\left(\xi^m = \max \left\{ \xi^i \right\}_{i=1}^{f-1} \leq x\right) = \\ &= \prod_{i=1}^{f-1} P(\xi^i \leq x) = [0,5(x+1)]^{f-1} \end{aligned} \quad (19)$$

і відповідною їй щільністю розподілу

$$P_{\xi^m} = 0,5(f-1) \cdot [0,5(x+1)]^{f-2} \quad (20)$$

У той час як середнє просування в мережі $\langle \xi \rangle = 0$, середнє максимальнє просування

$$\langle \xi^m \rangle = \int_{-1}^1 x d(F_{\xi^m}(x)) = \frac{f-2}{f}, \quad (21)$$

уже відміннє від нуля. Крім значення максимального просування ξ^m , важливо також те, уздовж якого волокна воно досягається. Припустимо, що

$$\lambda_0^m = \mathbf{arg\,max} \left\{ \lambda_0 \cdot I_0, \lambda_0 \in \left\{ \lambda_0^i \right\}_{i=1}^{f-1} \right\}$$

є волоком із максимальним просуванням у напрямку I_0 на шляху. Тоді його випадкова орієнтація має розподіл

$$p^m(\lambda_0, I_0) = (f-1) \cdot [(\lambda_0 \cdot I_0 + 1)/2]^{f-2} \quad (22)$$

на одиничній сфері орієнтацій S_0 , радіально симетричній щодо осі I_0 . Цей розподіл визначає собою випадкове сімейство волокон з початковою орієнтацією

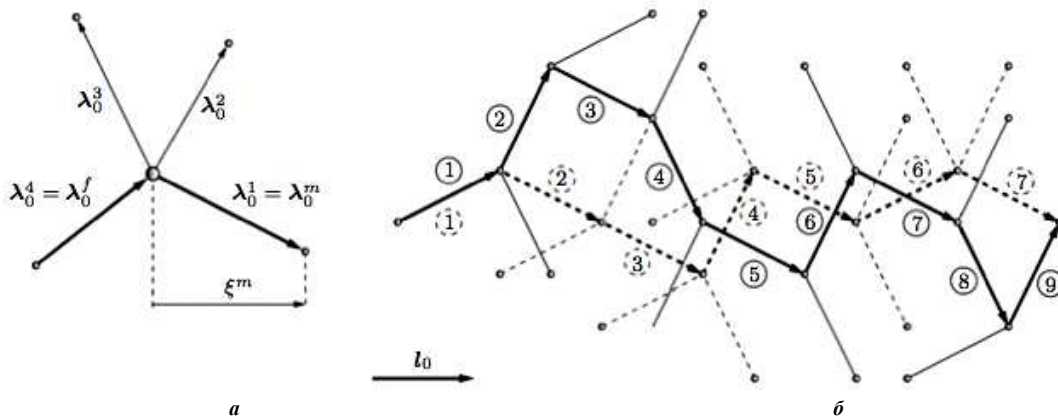


Рисунок 5 – Шлях максимального просування в мережі [60]:

- a* – точка з'єднання на шляху і волокно з максимальним просуванням ξ^m у напрямку I_0 ;
б – вплив функціональності f на прямизну шляху на прикладі двох мереж із $f = 3$ (суцільні лінії) і $f = 4$ (додаткові сегменти нанесені пунктирними лініями) і відповідних їм шляхів максимального просування (чим вище функціональність, тим пряміші шляхи знаходяться у сітці)

З іншого боку, цей деформований шлях складається з розтягнутих волокон $\lambda^m = \lambda(\lambda_0^m)$ з вибірки (22), і альтернативно R_l знаходиться шляхом осереднення на шляху векторів мікродеформацій волокон

$$R_l = n_{l_0} \langle R_0 \lambda^m \rangle. \quad (26)$$

Зіставляючи вирази (25) і (26), отримуємо співвідношення

$$\langle \lambda^m \rangle = [(f-2)/f] I_0; \sim$$

єю λ_0^m , максимально близькою до напрямку I_0 , що володіє властивістю

$$\langle \xi \rangle = \frac{1}{|S_0|} \int_{S_0} \lambda_0 p^m(\lambda_0, I_0) |d\lambda_0| = [(f-2)/f] I_0. \quad (23)$$

Відповідно до цього вектор R_{l_0} , що з'єднує початок і кінець довгого шляху максимального просування з n_{l_0} волокон, де n_{l_0} – велике, визначається за середнім значенням (23) вектора початкової орієнтацій λ_0^m волокон на шляху та їх довжини R_0

$$R_{l_0} = n_{l_0} \langle R_0 \lambda_0^m \rangle = n_{l_0} R_0 [(f-2)/f] I_0. \quad (24)$$

Як тільки довжина такого шляху стає досить великою, щоб вважати його макроскопічними лінійним об'єктом, можна вважати, що з макроскопічною деформацією він перетворюється афінно градієнтом деформації F , а саме

$$R_l = F R_{l_0} = n_{l_0} R_0 [(f-2)/f] I_l, \quad I_l = F I_0. \quad (25)$$

$$\frac{1}{|S_0|} \int_{S_0} \lambda(\lambda_0) p^m(\lambda_0, I_0) |d\lambda_0| = [(f-2)/f] F \cdot I_0, \quad (27)$$

яке накладає множину обмежень, що відповідає всім можливим напрямкам $I_0 \in S_0$, на невідомий розподіл $\lambda(\lambda_0)$ деформації волокон у сітці. Отримане рівняння зв'язку (27) будемо називати умовами деформації максимальних шляхів (УДМШ). З усією очевидністю, принаймні один розподіл мікродеформації в сітці буде поготові задовольняти кінематичні й мікро-макро умови, а саме афінне розтягування $\bar{\lambda}(\lambda_0) = F \lambda_0$. У разі, якщо усі волокна

λ_0^m у максимальному шляху деформуються афінно, як $\bar{\lambda}^m = F\lambda_0^m$, то і сам шлях також зазнає подібного ж розтягнення:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\lambda}^m \rangle &= F \langle \lambda_0^m \rangle \sim \\ \frac{1}{|S_0|} \int_{S_0} \bar{\lambda}(\lambda_0) p^m(\lambda_0, I_0) |d\lambda_0| &= \\ &= [(f-2)/f] F \cdot I_0. \end{aligned} \tag{28}$$

Повністю афінні сіткові моделі [143] показують саме такий відгук волоконної мікроструктури, виключаючи відхилення в розподілі мікродеформацій від афінного закону. Однак у загальному випадку волокна не мають дотримуватися афінної кінематики, відповідно до чого і запропоновано вважати мікродеформації λ варійованими і пов'язувати їх із макроскопічними деформаціями опосередковано через отримані вище умови сумісності.

Мікро-макро співвідношення (27) приймають вигляд лінійного інтегрального рівняння Фредгольма першого роду відносно невідомої функції $\lambda(\lambda_0)$, яка має суттєву властивість центральної симетрії. Відповідно до цього, середнє значення вектора розтягнення у максимальному шляху можна перетворити у такий спосіб:

$$\langle \lambda^m \rangle = \frac{1}{|S_0|} \int_{S_0} \lambda(\lambda_0) \tilde{p}^m(\lambda_0, I_0) |d\lambda_0|, \tag{29}$$

де $\tilde{p}^m = 0,5[p^m(\lambda_0, -I_0) - p^m(-\lambda_0, I_0)]$ – змінене з урахуванням симетрії ядро.

Виходячи з його властивості

$$\tilde{p}^m(\lambda_0, -I_0) = -\tilde{p}^m(\lambda_0, I_0),$$

можна вивести ще одну закономірність для середнього значення вектора розтягування вздовж шляху –

$$\begin{aligned} \langle \lambda^m \rangle \Big|_{I_0 = -I_0} &= \\ &= \frac{1}{|S_0|} \int_{S_0} \lambda(\lambda_0) \tilde{p}^m(\lambda_0, -I_0) |d\lambda_0| = -\langle \lambda^m \rangle. \end{aligned} \tag{30}$$

Оскільки права і ліва частини у рівнянні (27) є непарними векторними функціями I_0 , достатньо, щоби воно виконувалося лише в окремій напівсфері $S_0^{1/2}$ простору напрямків S_0 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|S_0|} \int_{S_0} \lambda(\lambda_0) \tilde{p}^m(\lambda_0, I_0) |d\lambda_0| &= [(f-2)/f] F \cdot I_0 \\ &\text{для } \forall I_0 \in S_0^{1/2}, \end{aligned} \tag{31}$$

де $\tilde{p}^m(\lambda_0, I_0) : S_0^{1/2} \times S_0^{1/2} \rightarrow IR$, $\lambda : S_0^{1/2} \rightarrow IR^3$,

$$\lambda(-\lambda_0) = -\lambda(\lambda_0).$$

При більш уважному вивченні ядра $\tilde{p}^m(\lambda_0, I_0)$ інтегрального оператора Фредгольма у (31) видно, що воно є многочленом для цілих значень $f \in IN$ функціональності сітки. Його можна розкласти у вигляді скінченного ряду

$$\tilde{p}^m(\lambda_0, I_0) = \sum_{\alpha} \phi_{\alpha}(\lambda_0) \psi_{\alpha}(I_0), \tag{32}$$

де $\alpha \in \{1, \dots, a\} = A$, $\{\phi_{\alpha}(\lambda_0)\}_{\alpha=1}^a$ і $\{\psi_{\alpha}(I_0)\}_{\alpha=1}^a$ – лінійно незалежні.

Таким чином, оператор Фредгольма має скінченний ранг, і його образ є лінійною комбінацією $\{\psi_{\alpha}(I_0)\}_{\alpha=1}^a$.

Використовуючи афінний вектор розтягування, що задовольняє кінематичним умовам (28), інтегральне рівняння (31) можна зробити однорідним

$$\frac{1}{|S_0|} \int_{S_0} [\lambda(\lambda_0) - \bar{\lambda}(\lambda_0)] \tilde{p}^m(\lambda_0, I_0) |d\lambda_0| = 0, \tag{33}$$

записавши відносно різниці між шуканими мікродеформаціями λ і афінним розтягненням $\bar{\lambda}$. Використовуючи розкладання в ряд (32), з цього співвідношення отримуємо далі:

$$\left\{ \frac{1}{|S_0|} \int_{S_0} [\lambda(\lambda_0) - \bar{\lambda}(\lambda_0)] \phi_{\alpha}(\lambda_0) |d\lambda_0| \right\} \psi_{\alpha}(I_0) = 0 \tag{34}$$

$$\forall I_0 \in S_0.$$

У силу лінійної незалежності $\{\psi_{\alpha}(I_0)\}_{\alpha=1}^a$ виконується тоді і тільки тоді, якщо

$$\begin{aligned} \frac{1}{|S_0|} \int_{S_0} [\lambda(\lambda_0) - \bar{\lambda}(\lambda_0)] \phi_{\alpha}(\lambda_0) |d\lambda_0| &= 0, \\ \forall \alpha \in A. \end{aligned} \tag{35}$$

Це значить, що умови деформації максимальних шляхів (31) насправді накладають лише скінченне число обмежень (35) на варійовані мікродеформації.

Покажемо детально дію отриманих кінематичних умов та їхнє застосування для гомогенізації волоконних мікроструктур для випадку мереж функціональності $f = 4$. Такі мережі є найбільш характерними для гум і біополімерів [146]. Для цього значення функціональності запропоновані мікро-макро співвідношення приймають дуже зручну і добре інтерпретовану форму. Середнє максимальне просування (31) у недеформованій конфігурації приймає для $f = 4$ значення $\langle \xi^m \rangle = 1/2$. Це означає, що шляхи максимального просування в тетрафункціональних мережах далекі від того, щоб бути прямими. Відповідно, можна очікувати істотної неафінності за раху-

нок випрямлення та перерозподілу деформації у цих шляхах. Співвідношення (31) визначають те, наскільки обмеженими є потенційні відхилення деформацій від афінних. Еквівалентна скінченна множина обмежень визначається за виразом ядра \tilde{p}^m , якого воно набуває за $f = 4$, а саме

$$\begin{aligned} \tilde{p}^m(\lambda_0, I_0) &= \\ &= 0,5[1,5(\lambda_0 \cdot I_0 + 1)^2 - 1,5(-\lambda_0 \cdot I_0 + 1)^2] = \\ &= 1,5(\lambda_0 \cdot I_0), \end{aligned} \quad (36)$$

є поліномом відносно декартових координат вектора вихідної орієнтації волокон $\lambda_0 = [x_0, y_0, z_0]$ і вектора напрямку максимального шляху $I_0 = [\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0]$, для яких $\lambda_0 \cdot I_0 = x_0 \tilde{x}_0 + y_0 \tilde{y}_0 + z_0 \tilde{z}_0$. Таке ядро може бути записане у вигляді розкладання в ряд (32) за базисними функціями

$$\begin{aligned} \{\phi_\alpha(\lambda_0)\}_{\alpha=1}^a &= \{x_0, y_0, z_0\} \text{ та} \\ \{\psi_\alpha(I_0)\}_{\alpha=1}^a &= \{1, 5\tilde{x}_0, 1, 5\tilde{y}_0, 1, 5\tilde{z}_0\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Для такого набору лінійно незалежних $\{\phi_\alpha(\lambda_0)\}_{\alpha=1}^a$, отриманих у (37), умови сумісності зводяться до трьох векторних обмежень виду (35), які можна подати у єдиній тензорній формі

$$\frac{1}{|S_0|} \int_{S_0} [\lambda(\lambda_0) - \bar{\lambda}(\lambda_0)] \otimes \lambda_0 |d\lambda_0| = 0. \quad (38)$$

Середнє діадного добутку $\langle \bar{\lambda} \otimes \lambda_0 \rangle$ можна легко знайти як

$$\begin{aligned} \frac{1}{|S_0|} \int_{S_0} \bar{\lambda}(\lambda_0) \otimes \lambda_0 |d\lambda_0| &= \\ &= F \cdot \frac{1}{|S_0|} \int_{S_0} \lambda_0 \otimes \lambda_0 |d\lambda_0| = \frac{1}{3} F \end{aligned} \quad (39)$$

за допомогою тотожності $\langle \lambda_0 \otimes \lambda_0 \rangle = \frac{1}{3} \mathbf{1}$. Це у кінцевому підсумку дає можливість одержати вираз умов деформації максимальних шляхів для тетрафункціональних мереж у вигляді:

$$\frac{1}{|S_0|} \int_{S_0} \lambda(\lambda_0) \otimes \lambda_0 |d\lambda_0| = \frac{1}{3} F, \quad (40)$$

який видається дуже природним. Дійсно, підінтегральний вираз $\lambda_0 \otimes \lambda_0$ певним чином відповідає деформації окремого волокна, оскільки цей тензор відображає вектор вихідної орієнтації λ_0 волокна у вектор розтягнення λ . Відповідно, (40) можна розглядати як співвідношення між осередненою мірою мікродефо-

рмації волокон мережі та локальною макроскопічною деформацією, представленою F .

Отже, отримане загальне формулювання умов деформації максимальних шляхів (31). Вони співвідносять мікродеформації мережі, описані в рамках статистичної моделі, з локальною макроскопічною деформацією матеріалу. Показано, що для заданої цілої функціональності f мережі на мікродеформації $\lambda(\lambda_0)$ накладається лише скінченна множина обмежень (35). Урахування функціональності у формулюванні обмежень відображає дуже важливі топологічні властивості мережі. Її якісний вплив на кінематику мережі обговорюється далі. У кінцевому рахунку, для випадку $f = 4$, що має найбільше практичне і теоретичне значення, умови сумісності мікро- і макродеформацій отримані у легко інтерпретовній тензорній формі (40).

Релаксація мікродеформацій і гомогенізований рівноважний відгук волокнистих мікроструктур. Кінематичні умови деформації максимальних шляхів, сформульовані вище, не визначають мікродеформацію λ , а тільки обмежують її варіації при заданій макроскопічній деформації. Для того, щоб визначити дійсні мікродеформації мережі, у цій роботі використовується принцип мінімуму вільної енергії. Він полягає в тому, що з усіх кінематично можливих мікродеформацій волокон вони набудуть саме такої, що мінімізує повну енергію мережі. Цей підхід був спочатку запропонований у роботі [31] для побудови неафінної моделі пружності каучуку. Ця робота відповідає загальній схемі осереднення, в яку вносяться новий статистичний опис мікродеформації з векторною величиною розтягнення волокон, заданої на мікросфері, а також запропоновані вище кінематичні мікро-макроспіввідношення. В цілому одержуваний відгук матеріалу є результатом релаксації мікроструктури за внутрішніми ступенями вільності, що визначаються розподілом мікророзтягнення $\lambda(\lambda_0)$, і, в кінцевому рахунку, виражається у вигляді осереднених механічних напружень.

Застосований статистичний опис мікродеформації мережі містить лише інформацію про розтягування волокон. Отже, в рамках запропонованого підходу можна розглядати тільки ті матеріали, для яких вільну енергію деформації можна пов'язати виключно із поздовжнім розтягненням волокон. Зокрема, це може бути явно здійснено у разі, коли мережі складаються з волокон, які взаємодіють тільки в місцях з'єднання, і самі собою створюють відгук на осьову деформацію при зміні відстані між вузлами. Незапутані мережі гнучких полімерних молекул багатьох полімерних гелів, еластомерів, а також біополімери, що формують мережі з напівгнучкими або жорсткими ланками, добре вписуються у цю категорію.

Раз повна енергія мережі ψ_{net} складається з енергії розтягування окремих волокон $\psi_f(|\lambda|)$ із множини всіх його волокон, то її можна виразити через середнє на мережі або згідно (14) як середнє на представницькій мікросфері

$$\Psi_{net}[\lambda] = n \langle \Psi_f(|\lambda|) \rangle. \quad (41)$$

Тут n – це вихідна щільність мережі, яка визначається числом волокон в одиниці об'єму недеформованого матеріалу, до якого також зведена і обчислюється щільність енергії Ψ_{net} .

З урахуванням цього виразу для енергії варіаційне формулювання може бути точніше позначене як принцип мінімуму осередненої енергії. Його математичне формулювання при обмеженні випадком тетрафункціональних мереж з $f = 4$ із застосуванням відповідної тензорної версії умов деформації максимальних шляхів (40) приймає вигляд наступної задачі умовної оптимізації:

$$\begin{aligned} \Psi_{net}[\lambda] \sim \\ \min_{\lambda(\lambda_0)} \int_{S_0} \Psi_f(|\lambda(\lambda_0)|) d\lambda_0 \xrightarrow{\lambda(\lambda_0)} \min; \quad (42) \\ \langle \lambda \otimes \lambda_0 \rangle = \frac{1}{|S_0|} \int_{S_0} \lambda(\lambda_0) \otimes \lambda_0 d\lambda_0 = \frac{1}{3} F. \end{aligned}$$

Енергія волокна Ψ_f припускається опуклою, неперервною та диференційованою функцією абсолютної величини розтягнення $|\lambda|$. Завдяки першому припущенню виключається нестійкість волокон. Друге гарантує, що функціонал $\Psi_{net}[\lambda]$ або ж осереднена енергія волокон $\langle \Psi_f \rangle$ у тих випадках, коли вони визначені, мають похідні відносно функції розтягнення λ . Крім цього, можуть бути й інші умови щодо Ψ_f , які визначають, чи є задача умовної оптимізації (32) коректно поставленою. Вони обговорюються далі з точки зору двох практично важливих типів реакцій волокон. На цьому етапі вважаємо, що існування та єдиність мінімуму розподілу вектора розтягнень λ^* забезпечується для деякої поки невизначеної множини макроскопічних деформацій \mathfrak{S} . У цьому випадку розв'язок задачі (32) може розглядатися як функція $\lambda^* = \lambda^*(F)$ градієнта деформації $F \in \mathfrak{S} \subset SO(3)$.

На закінчення розглянемо властивості рівноважної мікродеформації мережі та її релаксований осереднений відгук, одержуваний із принципу мінімуму (42). Для цього розглянемо лагранжіан задачі умовної мінімізації, який може бути записаний у вигляді:

$$\begin{aligned} L(\lambda, \nu) = \frac{1}{|S_0|} \int_{S_0} \Psi_f(|\lambda(\lambda_0)|) d\lambda_0 - \\ - \nu : \frac{1}{|S_0|} \int_{S_0} \lambda(\lambda_0) \otimes \lambda_0 d\lambda_0 - \frac{1}{3} F, \end{aligned} \quad (43)$$

де ν – тензор другого порядку множників Лагранжа, відповідний тензорній формі умов сумісності мікро- і макродеформацій (40) для цього випадку тетрафункціональних мереж.

Рівняння Ейлера-Лагранжа визначають зникаючу варіацію L відносно мікродеформацій λ за дійс-

них λ^* . Умова стаціонарності дає наступне співвідношення:

$$f_f^* = f_f^* \left(\lambda^* \right) \left(\lambda^* / |\lambda^*| \right) = \nu \lambda_0, \quad (44)$$

де $f_f = \partial \Psi_f / \partial \lambda$ є пов'язаною відносно розтягування поздовжньою силою у волокнах, яка релаксує у сторону $f_f^* = f_f^*(\lambda^*)$ при досягненні рівноваги, а $f_f = \partial \Psi_f / \partial |\lambda|$ – її абсолютна величина, пропорційна дійсній фізичній силі $F_f = \partial \Psi_f / \partial |R|$.

За відомих для кожної допустимої деформації $F \in \mathfrak{S}$ рівноважних розтягань волокон λ^* можна обчислити осереднення величини відгуку матеріалу. Зокрема, зміна повної вільної енергії мережі при зміні макроскопічної деформації

$$\Psi_{net}^*[F] = n \langle \Psi_f(|\lambda^*|) \rangle = \frac{1}{|S_0|} \int_{S_0} \Psi_f(|\lambda^*|) d\lambda_0, \quad (45)$$

Використовуючи цей вираз, за допомогою стандартних міркувань термодинаміки [140] можуть бути отримані гомогенізовані механічні напруження як похідні вільної енергії відносно відповідної попередньої деформації. Зокрема, перший тензор Піоли-Кірхгофа напружень обчислюється як

$$\begin{aligned} P = \partial_F \Psi_{net}^*[F] \sim \\ = n \langle \partial_F \Psi_f(|\lambda^*|) \rangle = \frac{n}{|S_0|} \int_{S_0} f_f^* \frac{\partial \lambda^*}{\partial F} d\lambda_0. \end{aligned} \quad (46)$$

Інтеграл у правій частині цього рівняння може бути далі перетворений у вигляді суми

$$\frac{1}{|S_0|} \int_{S_0} f_f^* \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial F} d\lambda_0 + \frac{1}{|S_0|} \int_{S_0} f_f^* \frac{\partial (\lambda^* - \bar{\lambda})}{\partial F} d\lambda_0, \quad (47)$$

у якій другий доданок поготів дорівнює нулю. Щоб довести це твердження, зауважимо, що кінематичні умови у формі (38) гарантовано задовольняються рівноважним розв'язком λ^* для всіх F , так що

$$\begin{aligned} \langle (\lambda^* - \bar{\lambda}) \otimes \lambda_0 \rangle \equiv 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle \partial_F (\lambda^* - \bar{\lambda}) \otimes \lambda_0 \rangle \equiv 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Згортка цієї тотожності з тензором ν множників Лагранжа дає рівняння

$$\frac{1}{|S_0|} \int_{S_0} (\nu \lambda_0) \cdot \frac{\partial (\lambda^* - \bar{\lambda})}{\partial F} d\lambda_0 = 0, \quad (49)$$

ліву частину якого можна ідентифікувати з другим інтегралом у (47), використовуючи співвідношення (44). У свою чергу, за допомогою тотожності $\partial_F \bar{\lambda} = 1 \otimes \lambda_0$ решта виразу дає можливість остаточно визначити пружні напруження у вигляді

$$P = \frac{n}{|S_0|} \int_{S_0} f_f^* \otimes \lambda_0 |d\lambda_0| = n \langle f_f^* \otimes \lambda_0 \rangle \quad (50)$$

через рівноважні значення сил у волокнах мережі. Знову ж таки, подібно до кінематичної умови (40), напруження отримуються у досить природній формі. Подібні вирази раніше отримані для неперервних тіл, у яких механічні напруження передаються за допомогою мікроскопічних сил осьової взаємодії [148]. Це спостереження підтверджує, що запропонований вище статистичний опис мікродеформації та умови деформації максимальних шляхів, одержані раніше, разом адекватно подають кінематику мережі та суцільного твердого тіла. За допомогою виразу (44) для вектора сили f_f^* може бути одержаний альтернативний компактний вираз для першого тензора напружень Піоли-Кірхгофа

$$P = n \langle (v\lambda_0) \otimes \lambda_0 \rangle = \frac{1}{3} n v, \quad (51)$$

який знову ж указує на природу значення множників Лагранжа v .

Слід зазначити ще раз, що наведені частинні результати одержані тут для тетрафункціональних мереж з $f = 4$, для яких мікро-макро умови зв'язку визначаються виразом (40), а енергія розтягування волокон задається середнім (41). Проте, запропонований підхід гомогенізації може бути легко розширений на випадок мереж довільної функціональності із вільною енергією, відмінною за формою від (41). По-перше, можна скористатися більш загальними кінематичними умовами у векторному записі (45) у разі $f \neq 4$. По-друге, варіаційний принцип, викладений тут, відрізняється універсальністю і не обмежується конкретним виразом вільної енергії. Що стосується конкретної моделі, представленої в цій роботі, то вона може бути ефективно реалізована чисельно із застосуванням дискретизації одиничної сфери і квадратурних формул, запропонованих у роботі [32].

Чисельні результати, що ілюструють ефективність запропонованого підходу, здійснені на прикладах неафінного відгуку матеріалів.

Мікромеханічна модель в'язкопружності еластомерів. Для пояснення в'язкопружних властивостей полімерних матеріалів виправдане ідеалізоване подання мікроструктури подібних матеріалів, запропоноване у роботах [31], як сукупності полімерних сіток різної природи, де наведено мікроскопічне подання реакції полімерної сітки гумоподібних матеріалів (мікроструктура, розділена на міцно зшити базову сітку (забезпечує пружний відгук) і мобільну підмережу (сформовану механізмом тимчасового сплутування ланцюжків і складовою зв'язку компоненту відгуку)), зображена схематично у початковому стані, а також миттєво і через певний час після застосування довільної макродеформації). Пружний відгук еластомерів ототожнюється із міцно зшитими полімерними ланцюжками, що утворюють основну сітку. Одночасно з цим незшиті рухливі макромолекули

утворюють додаткові мережі при випадковому сплутуванні та русі.

Відповідно до цього опису обидві мережі реагують на миттєве прикладання макроскопічної деформації відповідним розтягуванням і поворотом ланцюжків. Однак вільні макромолекули мають можливість релаксувати до вихідного рівноважного стану, у якому вони не здійснюють макроскопічного відгуку. У той час, як пружні напруження можуть бути одержані за допомогою відомих мікромеханічних моделей, таких як eight-chain model [29] і non-affine microsphere model [31], або ж за допомогою запропонованого раніше підходу гомогенізації, для визначення вузьких властивостей полімерів на основі їхньої молекулярної будови пропонується принципово інша теорія.

Відповідно до класичного підходу до моделювання непружної поведінки матеріалів при скінченних деформаціях, викладеному у роботі [139], в'язкопружна макроскопічна реакція каучуку і подібних йому матеріалів розкладається на об'ємну та ізохорну частини. Відповідно до цього вільна енергія подається сумою

$$\psi = U(J) + \bar{\psi}(I, \bar{F}), \quad (52)$$

де $U(J)$ – енергія об'ємної деформації,

$\bar{\psi}$ – ізохорна складова вільної енергії,

$\bar{F} = J^{-1/3} F$ – ізохорна частина градієнта деформації,

I – змінні історії навантаження пружного матеріалу.

Відповідно до такого розкладання повні механічні напруження подаються сумою сферичної та дівіаторної частин:

$$\tau = p1 + \bar{\tau}; P, \quad (53)$$

де $p = JU'(J)$ – гідростатичний тиск,

$\bar{\tau} = 2\partial_g \bar{\psi}(I, \bar{F})$ – пов'язаний з ізохорною частиною відгуку тензора напружень, до якого застосовується тензор дівіаторної проекції

$$P_{cd}^{ab} = [\delta_c^a \delta_d^b + \delta_d^a \delta_c^b] / 2 - \delta^{ab} \delta_{cd} / 3.$$

Відповідно до подання про поділ структури матеріалу на пружну базову полімерну сітку і в'язку мобільну підмережу ізохорна частина вільної енергії подається у вигляді суми

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}^e(\bar{F}) + \bar{\psi}^v(I, \bar{F}), \quad (54)$$

де $\bar{\psi}^e(\bar{F})$ – енергія пружних деформацій,

$\bar{\psi}^v$ – в'язка енергія, що залежить від історії навантаження.

Аналогічним чином розкладаються і напруження

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}^e + \bar{\tau}^v(I) \quad (55)$$

на пружні $\bar{\tau}^e(\bar{F}) = 2\partial_g \bar{\Psi}(\bar{F})$ і непружні $\bar{\tau}^v(I, \bar{F}) = 2\partial_g \bar{\Psi}(I, \bar{F})$.

Таке розкладання можна подати у вигляді реологічної моделі максвелівського типу, наведеної на рис. 6. У ній є основна пружна гілка і s дисипативних гілок, що відповідають широкому розподілу дисипативного спектра, яким зазвичай володіють розглянуті матеріали.

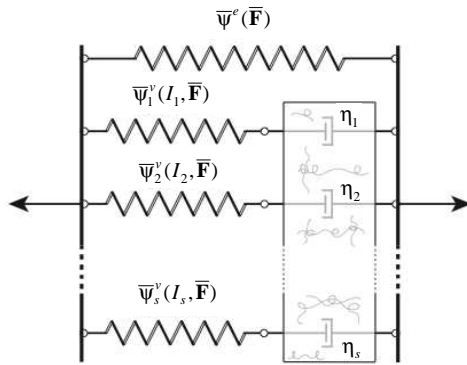


Рисунок 6 – Максвелівська реологічна модель ізохорної реакції матеріалу (складається з однієї пружної гілки, що представляє основну зшиту частину полімерної сітки, наведену на рис. 5, а також s в'язких гілок, кожна з яких відповідає окремій мобільній підмережі на рис. 5) [59]

У такому випадку в'язка енергія додатково розкладається у вигляді суми за цим спектром

$$\bar{\Psi}^v(I, \bar{F}) = \sum_{i=1}^s \bar{\Psi}^v(I, \bar{F}) \quad (56)$$

кожен із доданків якої пов'язаний із однією з гілок реологічної моделі, яка має власну історію навантаження I_i .

Також пропонується мікромеханічний опис поведінки незшитих полімерних мереж, який призводить до закону зміни їхнього стану при скінченних деформаціях, а також вираз для вільної енергії

Таблиця 1 – Моделі негнучких волокон

Модель	Вільна енергія ψ_f	Термодинамічна сила F_f
Лінійно пружне волокно ¹	$\frac{1}{2} k \frac{(R - R_0)^2}{R_0}$	$k \frac{R - R_0}{R_0}$
Напівгнучкий ланцюжок ²	$k_B T \frac{\pi^2 l_p}{2L} \left(1 - \frac{R^2}{L^2}\right) + \frac{2k_B T L}{\pi l_p} \left(1 - \frac{R^2}{L^2}\right)^{-1}$	$k_B T \frac{R}{L^2} \left[\frac{4L}{\pi l_p} \left(1 - \frac{R^2}{L^2}\right)^{-2} - \frac{\pi l_p}{L} \right]$

Примітки: ¹ $R_0 = L$ – початкова довжина волокна, що дорівнює його довжині L , $k = EA$ – осьова жорсткість за заданих модуля пружності E і площі перетину волокна A ; ² – наведені вирази відповідають наближенню залежності сили від подовження напівгнучкого філамента довжини L і персистентної довжини $l_p = x/k_B T$, згідно з яким рівноважна відстань між кінцями філамента за нульової осьової сили становить $1 - (R_0/L)^2 = 2L/(\pi^3 l_p)$

Енергія розтягнення окремого волокна визначається простим співвідношенням

$$\psi_f(r_{ij}) = 0,5EA \left[(r_{ij} - R_{ij})^2 / R_{ij} \right] \quad (58)$$

$\bar{\Psi}^v(I_i, \bar{F})$ і напружень $\bar{\tau}_i^v(I_i)$.

Застосування статистично осереднених моделей деформування матеріалів із випадковою мережевою будовою. Дискретне моделювання волоконної мікроструктури. Особливості осередненої поведінки матеріалів із волоконною мікроструктурою, що передбачена запропонованою неафінною моделлю, узгоджуються з результатами дискретного моделювання. Як репрезентативний об'єм розглянуто періодичну комірку мережі, у якій випадковим чином згенеровано її геометрію, як показано на рис. 7.

Випадковим чином розташовані вузли сітки по'єднано сегментами волокон, для яких задано лінійнопружну поведінку. Вектори R_{ij} і r_{ij} , що з'єднують відповідно кінці сегментів у недеформованому і деформованому стані, визначаються з урахуванням періодичності як

$$R_{ij} = X_j + \Delta_{ij} - X_i; \quad r_{ij} = x_j + \delta_{ij} - x_i, \quad (57)$$

де $X_{i,j}$, $x_{i,j}$ – початкові і поточні положення вузлів, Δ_{ij} – вектор періодичного зсуву недеформованої комірки,

$$\delta_{ij} = F\Delta_{ij} - \text{його зміна за деформації.}$$

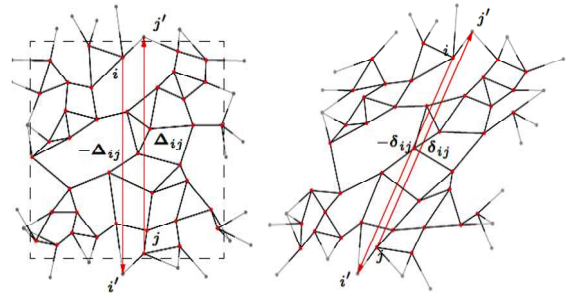


Рисунок 7 – Періодична комірка, що представляє випадкову мережеву мікроструктуру, та її деформація [2]

У дискретній моделі мереж передбачалася лінійно пружна поведінка волокон, аналогічна наведеної у табл. 1.

у припущенні, що у початковому стані всі волокна випрямлені та їхня довжина визначається початковою відстанню між вузлами $R_0 = |R_{ij}|$. Повна енергія цієї мікромеханічної системи обчислюється простим підсумовуванням по всіх волокнах

$$\Psi_{net} = \Psi_{net}(x, F) = \sum_f \Psi_f(r_{ij}). \quad (59)$$

Рівновага у системі досягається у стані, що мінімізує її енергію, за аналогією з тим, як у статистичній моделі рівноважні розтягнення визначалися мінімумом осередненої внутрішньої енергії. Розв'язок нелінійної задачі визначення актуальних положень вузлів сітки здійснюється методом Ньютона-Рафсона. За цим розв'язком, що характеризує механічний відгук мікроструктури, обчислюються безрозмірні напруження

$$P = \sum f_{ij} \otimes \frac{\Delta_{ij}}{L_{tot} EA} = \sum_{ij} f_{ij} \otimes \frac{R_{ij}}{L_{tot} EA}, \quad (60)$$

віднесені до загальної довжини волокон в сітці L_{tot} та їхньої поздовжньої жорсткості EA . Ці напруження коректно порівнювати із безрозмірними напруженнями, одержуваними за допомогою статистичної гомогенізації. Результати порівняння результатів, отриманих для зсувних деформацій, наведені на рис. 8.

Як і раніше, спочатку мережа поводить себе податливо, що видно з нахилу кривих компонент напруження в нулі. Однак дискретна модель показує значно меншу різницю у поведінці значень нормальних і

зсувних напружень. На рис. 9 показаний характер скінченних деформацій мережі при зсуві γ , що досягає значення 0.5. З картини розподілу осьових зусиль видно, що волокна практично не розтягуються, лише повертаючись у напрямку зсуву, аж до вельми істотного рівня деформацій.

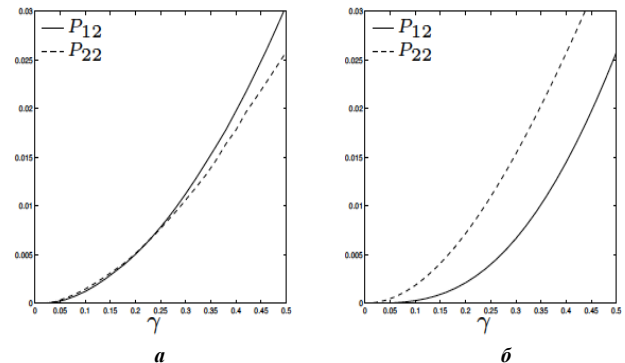


Рисунок 8 – Компоненти безрозмірних напружень, отриманих із дискретної моделі (а) і статистичною гомогенізацією (б) [60]

Надалі стає добре видно, що зусилля у мережі передаються уздовж чітко означених витягнутих шляхів. Така поведінка добре узгоджується з тим, що передбачає запропонована раніше осереднена модель для негнучких волокон. Представлені на рис. 10, 11 ані про розтягнення волокон, отримані за допомогою цих двох підходів, також свідчать про повну якісну їх відповідність.

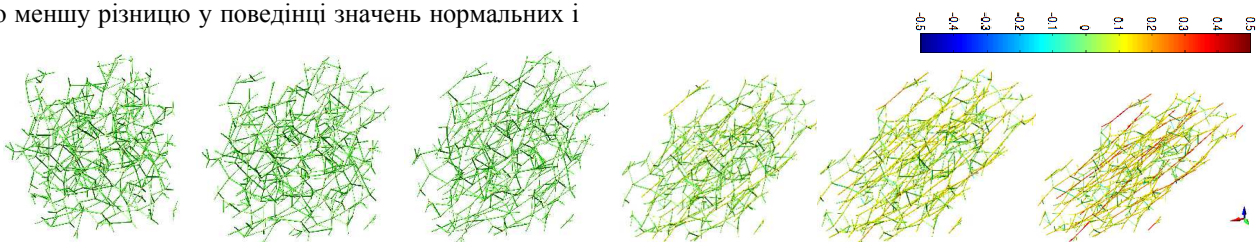


Рисунок 9 – Зсувна деформація тривимірної періодичної комірки, розподіл осьових зусиль у розтягнутих волокнах [2]

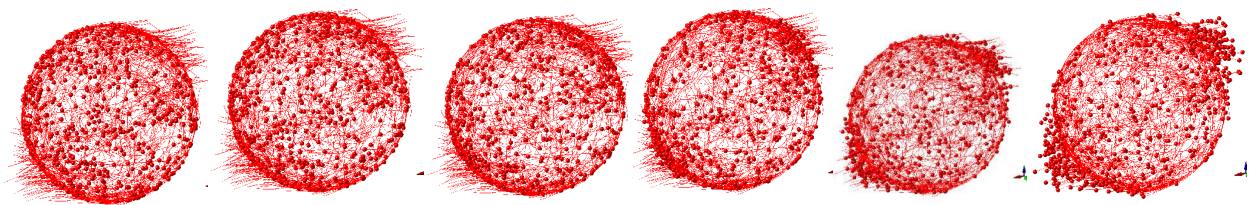


Рисунок 10 – Дискретні значення векторів розтягнення волокон за зсуву репрезентативної комірки (точками відзначені кінці векторів на поточному кроці навантаження, а суцільними лініями – їхні траєкторії; видно переорієнтацію волокон з подальшим розтягуванням у напрямку зсуву) [2]

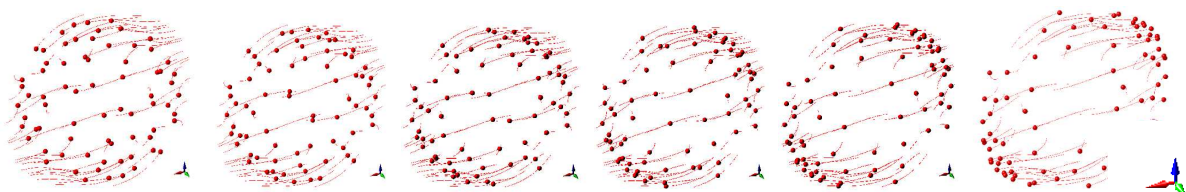


Рисунок 11 – Значення векторів розтягнення волокон за зсуву, отримані зі статистичної моделі (точками відображені кінці векторів розтягнення, отримані для волокон із дискретними початковими орієнтаціями, відповідними квадратурній формулі [112], використаній для чисельного розв'язання, суцільними лініями – їхні траєкторії)

Скінченно-елементне моделювання матеріалів із мережевою мікроструктурою. Запропонована статистична модель пружності матеріалів з мережевою мікроструктурою була реалізована у скінченно-елементному коді за скінченних деформацій. За її допомогою було досліджено поведінку м'яких тіл та їх просторовий НДС. Інтерес становить поведінка біополімерів із напівгнучких волокон. Для них раніше було встановлено, що стійкі деформації можливі лише в умовах, коли що-небудь перешкоджає об'ємному стисненню матеріалу.

Зазвичай у цій ролі виступає розчинник, хімічний потенціал якого перешкоджає його витисненню з гелю. Нижче показані результати в граничному стані, коли вплив розчинника дуже малий. У цьому випадку єдиним стабілізуючим фактором виступають крайові умови.

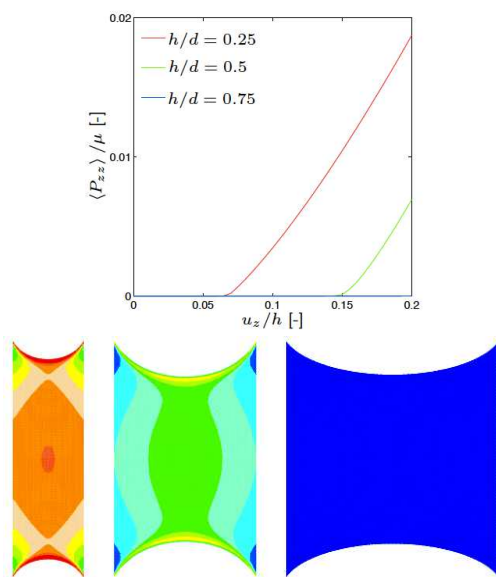


Рисунок 12 – Розтягування циліндричних зразків біогелю з відношенням висоти до ширини h/d , що дорівнює 0.25, 0.5 і 0.75 [2]

Покажемо вплив закріплення і геометричних розмірів на характер деформування матеріалів, мережева мікроструктура яких здатна підтримувати лише розтягнення, на прикладі одноосового розтягнення кругового циліндра. На рис. 12 показано зміну величини безрозмірних номінальних осьових напружень $\langle P_{zz} \rangle / \mu$ за переміщення верхньої границі зразків із відношенням висоти до ширини h/d , що дорівнює 0.25, 0.5 і 0.75, а також НДС за скінченного розтягнення 20%.

Видно, що за малих осьових переміщень усі зразки поведуться повністю податливо, не опираючись переміщенню. Короткий зразок раніше інших починає показувати стійкий відгук до розтягнення у вигляді осьової сили, у той час як найдовший зразок залишається ненапруженим аж до кінцевих деформацій у 20%. Це пояснюється крайовими умовами на верхній і нижній гранях, на яких були задані умови повного прилипання. Крім іншого, вони перешкоджають поперечним переміщенням матеріалу на гранях, що і перешкоджає його об'ємному стиснен-

ню. При цьому ефект обмежень для більшого зразка виявляється слабшим, у результаті чого він має можливість уникнути напружень мікроструктури за рахунок стиснення у всьому об'ємі.

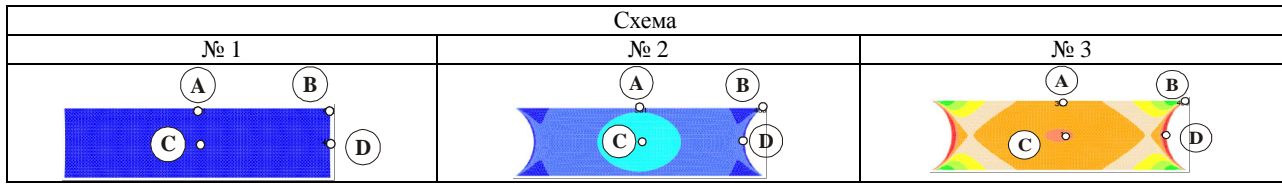
Слід звернути увагу на увігнуту арку, яка утворюється на бічній поверхні зразка за його неоднорідної деформації. Стан матеріалу в точках на вільній границі істотно відрізняється від того, що спостерігається всередині зразка та на його закріплених гранях. Цю різницю наведено у табл. 3 (у табл. 2 – схема розташування точок замірів), де показано розтягнення найменшого з циліндрів і зміна мікродеформації його матеріалу у чотирьох точках. Видно, що в точках A і C на центральній осі поступово відбувається розтягнення волокон.

При цьому відбувається воно не тільки у вертикальному напрямку, а й у поперечних. У результаті матеріал у цій частині тіла знаходиться у стані, близькому до всебічного розтягнення. На противагу, у точці D на вільній поверхні волокна лише орієнтуються в напрямку розтягування, при цьому самі вони залишаються ненавантаженими. У цілому матеріал у центральній частині увігнутої арки, витягуючись, істотно зменшується у об'ємі. При цьому всі компоненти напружень на поверхні перетворюються в нуль. Деформації у кутовій точці B відповідають зсуву, якого зазнає матеріал. Як видно, у цій точці кут між закріпленою гранню і основою арки вільної поверхні стає гострим. Застосований мікромеханічний підхід дає можливість не тільки встановити особливості деформування такого м'якого тіла як біогель, але і виявити механізми на рівні мереж полімерних волокон, які пояснюють спостережувані закономірності.

Ще один скінченно-елементний аналіз здійснено для узгодження із експериментальними даними, наведеними у [150]. Під час реометричних вимірів було встановлено, що нормальні напруження у біогелях за зсуву є додатними, а за величиною перевищують зсувні напруження, що незвично для інших матеріалів.

Раніше цьому було дано пояснення запропонованою гомогенізованою моделлю в ході аналізу результатів для напівгнучких волокон. Однак представлені вище розрахунки здійснені для однорідного зсуву. Попереднє скінченно-елементне моделювання, навпаки, показало, що гелі можуть деформуватися вкрай неоднорідно. Тому було здійснено додатковий розрахунок реальної геометрії зразка в реометричній машині між плоскою основою та конічним диском, зображеними на рис. 13. Для нестискуваних матеріалів у таких зразках досягається однорідний зсув γ , що визначається як ϕ/α , де ϕ – поворот конічного диска, а α – кут під конічною поверхнею верхнього диска. Видно, що поблизу вільної границі деформації випробуваного зразка неоднорідні. Варіація середніх значень напружень від центру до краю зразка склала більше 50%. У результаті поведінка осереднених на поверхні нижнього диска безрозмірних напружень $\langle p_{\phi z} \rangle / \mu$ та $\langle p_{zz} \rangle / \mu$ відрізняється від раніше отриманих для однорідних деформацій матеріалу.

Таблиця 2 – Схема розташування точок замірів



Таблиця 3 – Макроскопічна деформація зразка висотою $h/d = 0,25$ за одноосьового розтягнення і деформації мережевої мікроструктури в чотирьох точках

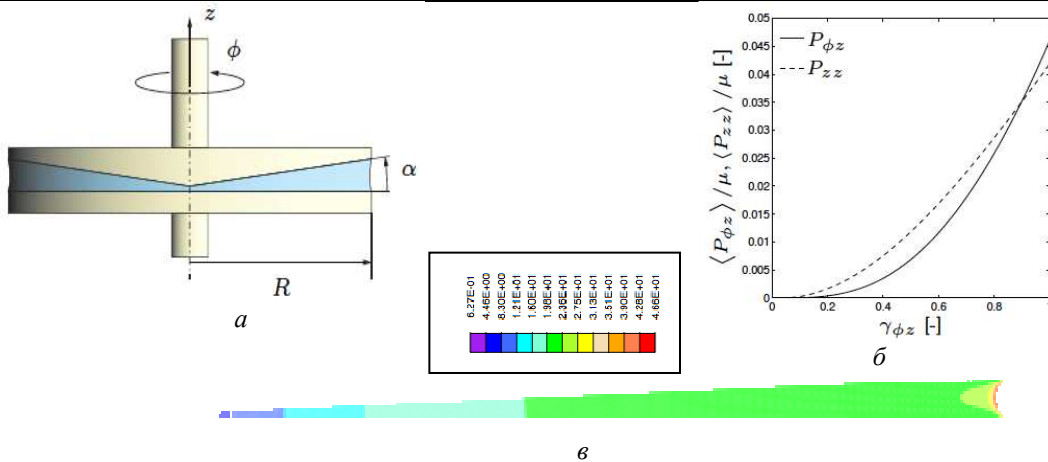
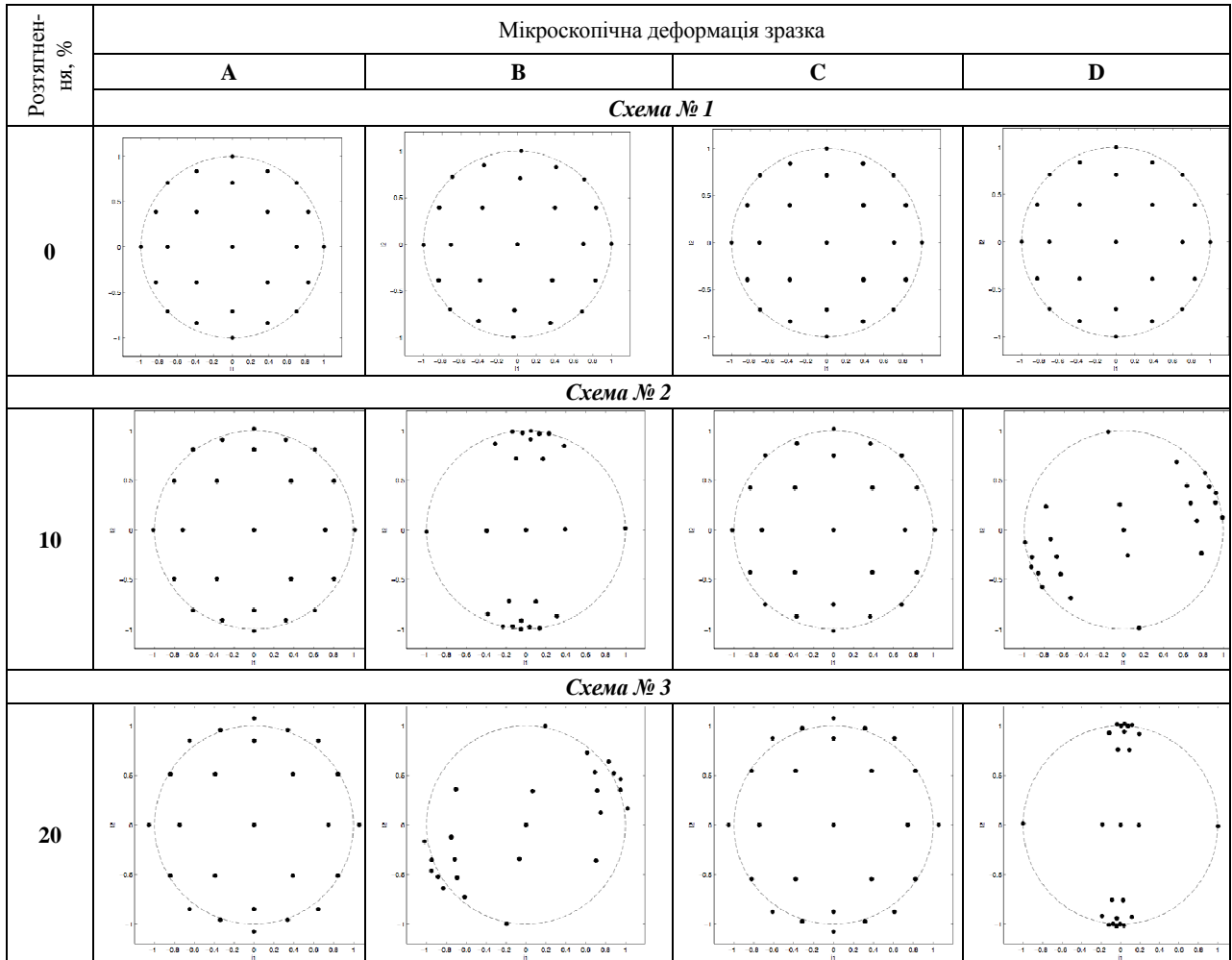


Рисунок 13 – Аналіз неоднорідних деформацій зразка, поміщеного у конусній реометричній машині: a – геометрія зразка, b – безрозмірні напруження $\langle p_{\phi z} \rangle / \mu$ та $\langle p_{zz} \rangle / \mu$, осереднені на поверхні нижнього диска, v – дотичні напруження у зразку [2, 60]

Розвиток базових підходів, моделей та методів досліджень напружено-деформованого стану тіл із матеріалів мережевої структури. Розглянемо, слідуючи [1, 2, 59–63], базові підходи до дослідження сучасних матеріалів на прикладі просторових волоконних структур. Для розв'язання поставлених у роботі задач потрібне залучення широкого арсеналу методів і моделей механіки деформівного твердого тіла, теорії пружності і механіки контактної взаємодії, а також їх розвиток і створення нових методів та моделей.

Розробка альтернативних варіаційних формулювань для осереднення анізотропних мережевих мікроструктур. Розглянемо далі, слідуючи [151–155], анізотропні мережеві структури на прикладі кабельних мереж, які за принципом деформування аналогічні мережам із гнучких волокон.

Статична рівновага кабельних мереж є предметом дослідження точки зору негладкої механіки. Ці мережі складаються зі скінченної кількості тонких елементів, які здатні передавати лише розтягувальні зусилля. Якщо спробувати застосувати стиснення до будь-якої ділянки волокна, то воно втрачає жорсткість та вигинається. Саме цим пояснюється негладкий характер поведінки самих структурних елементів, а також мережі в цілому. Тут нижче розглядаються різні варіаційні формулювання, за якими можна дослідити статичний відгук мережевих структур. З одного боку, це постановки у переміщеннях, де мінімізується потенціальна енергія пружних деформацій розтягнутих кабелів. З іншого боку, пропонуються спряжені варіаційні принципи відносно сил розтягнення як головних змінних. Окремі формулювання відрізняються поміж собою як структурою функціоналу, який є опуклим, так і обмежень у вигляді рівнянь та нерівностей. Останні подають як обмеження конусом у просторі варіюваних змінних, що дає змогу застосовувати добре відомі алгоритми розв'язання відповідних задач умовної мінімізації.

Відгук гнучких кабелів. Видовжений тонкий кабель по суті є одновимірним об'єктом, адже розміри його перерізу є значно меншими за довжину. Крім того, напружено-деформований стан у перерізі є однорідним і може змінюватися виключно за довжиною. Попри це, кабельні мережі демонструють неочевидні властивості, особливо за скінченних деформацій. Особливість відгуку тонких кабелів або волокон полягає у надзвичайно малій жорсткості до вигину, а також до стиснення. Спрощено кабель можна подати як стрижень із відмінною поведінкою за розтягнення та стиснення. За розтягнення кабель деформується пружно, запасаючи енергію. Такий стан називається напруженим. Однак за спроби передати вздовж цього стрижня стиснення він втрачає стійкість та раптово припиняє опиратися деформуванню. Такий стан можна назвати провисанням або ослабленим станом (slack state). Перехід між цими двома станами супроводжується миттєвою зміною жорсткості, яка виявляється розривною функцією подовження волокна. Відповідно сама подовжня сила є негладкою функцією подовження, як видно на рис. 14. Такою негладкою пове-

дінкою кабель відрізняється від традиційного стрижня. Відповідна відмінність порівняно із каркасними чи ферменними конструкціями присутня у механіці деформування кабельних мереж.

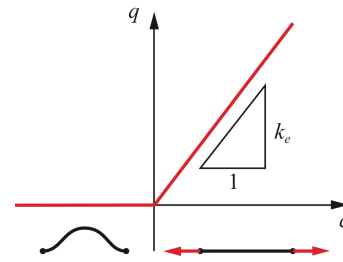


Рисунок 14 – Відгук елемента кабеля за розтягнення та стиснення

Залежність осьової сили q від подовження c для такого елемента визначається таким співвідношенням

$$q(c) = \begin{cases} kc, & c \geq 0; \\ 0, & c < 0, \end{cases} \quad (61)$$

де подовжня жорсткість у напруженому стані для волокна з площею перетину A та довжиною L , матеріал якого має пружний модуль E , становитиме

$$k = \frac{EA}{L}. \quad (62)$$

Потенціальна енергія такого деформованого волокна відповідно матиме такий вираз

$$\Pi(c) = \begin{cases} \frac{1}{2}kc^2, & c \geq 0; \\ 0, & c < 0. \end{cases} \quad (63)$$

Оскільки цей функціонал є гладким, то диференціальне включення $q \in \partial\Pi(c)$ є тотожним, тобто сила є однозначною функцією (61) подовження. Натомість, обернення цього співвідношення вже має інший характер. Здійснимо перетворення Фенхеля [151], за яким визначається спряжений функціонал додаткової енергії

$$\begin{aligned} \Phi(q) &= \sup_c \{qc - \Pi(c)\} = \\ &= \max \left\{ \sup_{c \geq 0} \left\{ qc - \frac{1}{2}kc^2 \right\}, \sup_{c < 0} \{qc\} \right\} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{q^2}{k}, & q \geq 0; \\ +\infty, & q < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (64)$$

Тоді за його допомогою подовження визначають як функцію осьової сили

$$c \in \partial\Phi(q) = \begin{cases} \frac{q}{k}, & q > 0; \\ (-\infty, 0], & q = 0; \\ \emptyset, & q < 0. \end{cases} \quad (65)$$

Видно, що подовження є однозначно лінійним за додатної сили, виявляється багатозначним за нульової сили та невизначене за від'ємних значень сили. Це відповідає природі гнучких волокон. У напруженому стані вони лінійно подовжуються, у ненапруженому стані вони довільним чином скорочуються, а стиснення є неможливим станом. На рис. 15 подано графіки додаткової енергії та багатозначної оберненої функції подовження.

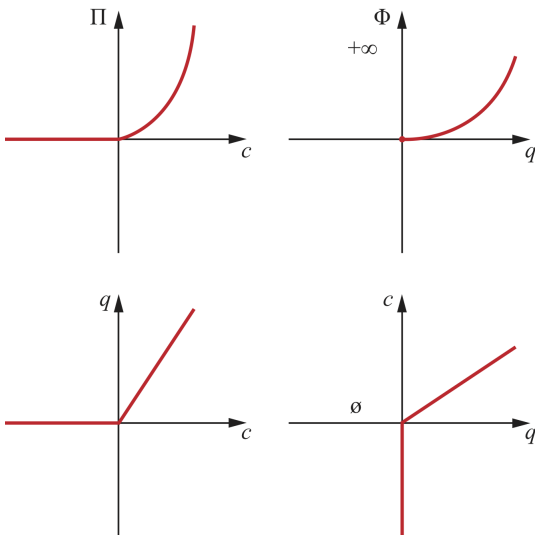


Рисунок 15 – Спряжена додаткова енергія для кабеля та обернена залежність подовження від сили

Варіаційне формулювання для кабеля. Для потенціальної енергії (63) існує альтернативна варіаційна форма, яка застосовується для отримання постановок кінчної оптимізації. Розглядають таку задачу мінімізації

$$\begin{cases} \min_y \frac{1}{2}ky^2; \\ y \geq c, \end{cases} \quad (66)$$

оптимальним розв'язком якої є

$$\bar{y} = \begin{cases} c, & c \geq 0; \\ 0, & c < 0. \end{cases} \quad (67)$$

Більш того, оптимальне значення задачі (66) збігається із потенціальною енергією гнучкого кабеля (63). Дійсно, умови оптимальності цієї задачі квадратичного програмування із обмеженнями у вигляді нерівностей визначаються сідловою точкою Лагранжіана

$$L(y, z^*) = \frac{1}{2}ky^2 - z^*(y - c), \quad z^* \geq 0, \quad (68)$$

де $z^* \geq 0$ – множник Лагранжа.

Умовами Куна-Таккера є така система рівнянь та нерівностей

$$k\bar{y} - z^* - 0, \quad (69)$$

$$\bar{y} - c \geq 0, \quad z^* \geq 0, \quad z^*(y - c) = 0. \quad (70)$$

Виключивши множник Лагранжа за рівнянням

(69), остаточно знаходимо:

$$\bar{y} - c \geq 0, \quad \bar{y} \geq 0, \quad \bar{y}(\bar{y} - c) = 0, \quad (71)$$

із чого незалежно від фізичної жорсткості встановлюємо умови спряженості

$$\bar{y} = c, \quad \text{або} \quad \bar{y} = 0. \quad (72)$$

Кожна із цих тотожностей відповідає за окрему гілку в залежності потенціальної енергії (63) як оптимальне значення задачі мінімізації (66).

Таке визначення потенціальної енергії деформованого сегмента кабеля має природну інтерпретацію. Для гнучкого кабеля можна сформулювати ряд характерних припущень щодо його відгуку, а саме:

а) кабелі не здатні витримувати стискні зусилля, тобто

$$q \geq 0; \quad (73)$$

б) подовження може бути поділено на невід'ємну пружну складову та скорочення від ослаблення

$$c = c_e + c_s, \quad c_s \leq 0, \quad c_s \leq 0; \quad (74)$$

останнє матиме ненульові від'ємні значення виключно у розвантаженому стані із нульовою силою та зникатиме за розтягнення волокна:

$$c_s < 0 \Rightarrow q = 0, \quad (75)$$

$$q > 0 \Rightarrow c_s = 0, \quad (76)$$

$$q \cdot c_s = 0. \quad (77)$$

При цьому осьова сила є лінійною функцією виключно пружної складової скорочення

$$c = q = kc_e. \quad (78)$$

Співвідношення (73)–(77) можна звести до попереднього формулювання (69), (70) якщо покласти

$$\bar{y} = c_e, \quad z^* = q. \quad (79)$$

За розв'язком (67) при цьому можна однозначно встановити поділ подовження (74), який подано на рис. 16.

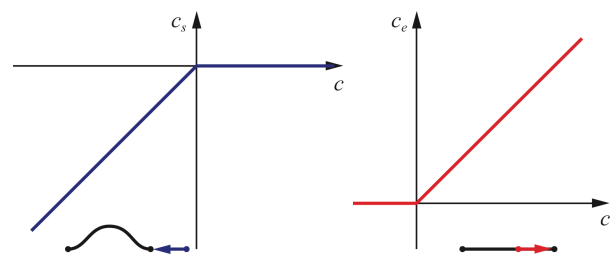


Рисунок 16 – Поділ (74) подовження на невід'ємну пружну складову та скорочення від ослаблення

Принципи мінімуму для рівноваги кабельних мереж. Кабельна мережа є дво- чи тривимірною структурою, що складається із m елементів, які поєднані на кінцях у n вузлах [151–155]. Деформований стан такої структури визначається вектором \mathbf{u}

переміщень усіх вузлів включно із закріпленими. Подовження кожної із окремих ланок мережі одно-значно обчислюється за вузловими переміщеннями за співвідношеннями

$$c_a = \hat{c}_a(u), \quad (80)$$

конкретна форма яких залежить від кінематичної моделі деформування, скінченності чи малості деформацій.

За умов, що жоден із елементів мережі не навантажений розподіленим зусиллям, уся взаємодія сконцентрована виключно у вузлах. Частина Γ_D множини ступенів вільності Γ є закріпленими та приймають задані значення переміщень. Решта Γ_N є вільними або навантаженими зовнішніми силами. Силкові та кінематичні граничні умови визначаються вектором фіксованих переміщень $\underline{u}_j, j \in \Gamma_D$, та вектором зовнішніх вузлових сил $\underline{p}_j, j \in \Gamma_N$.

Статична рівновага такої механічної системи визначається принципом мінімуму потенціальної енергії на множині кінематично допустимих переміщень та деформацій. У нашому випадку він може бути сформульований таким чином:

$$\begin{cases} \min_{u,c} \sum_{a=1}^m \Pi_a(c_a) - \sum_{j \in \Gamma_N} p_j u_j; \\ c_a = \hat{c}_a(u), a = \overline{1, m}; & u_j = \underline{u}_j, j \in \Gamma_D. \end{cases} \quad (81)$$

Оскільки потенціальна енергія (63) деформованих ланок мережі має негладку характеристику, то і повна потенціальна енергія системи наслідуює такі самі риси. Один із підходів полягає в тому, щоб перенести недиференційованість цільової функції у задачі мінімізації (81) на обмеження у вигляді нерівностей. Це можна здійснити за допомогою варіаційної форми для потенціальної енергії гнучкого кабеля (66) таким чином:

$$\begin{cases} \min_{u,c} \sum_{a=1}^m \Pi_a(c_a) - \sum_{j \in \Gamma_N} p_j u_j; \\ c_a \geq \hat{c}_a(u), a = \overline{1, m}; & u_j = \underline{u}_j, j \in \Gamma_D. \end{cases} \quad (82)$$

Формулювання (81) та (82) із певними застереженнями є еквівалентними, а їхні оптимальні розв'язки пов'язані між собою.

Скінченні деформації. Вочевидь, конкретна форма кінематичного співвідношення (80) відіграє значну роль у формулюваннях (81) та (82). Розглянемо геометрично нелінійний випадок. Традиційно для нього розглядаються початкова конфігурація, за якої початкове розташування вузлів визначаються вектором \mathbf{X} , та актуальна, або деформована конфігурація, в якій вузли займають нові позиції \mathbf{x} . Відповідно, скінченні переміщення є різницею

$$u = \varphi - x. \quad (83)$$

Подовження елемента a мережі визначаємо як різницю між його довжиною у актуальній та початковій конфігураціях

$$c_a = l_a - L_a, \quad (84)$$

які обчислюються як відстань між початковим та кінцевим вузлами i та j елемента в цих конфігураціях

$$\begin{aligned} l_a &= \|\underline{x}_j - \underline{x}_i\| = \|B_a \underline{x}\|; \\ L_a &= \|\underline{X}_j - \underline{X}_i\| = \|B_a \underline{X}\|. \end{aligned} \quad (85)$$

Матриці B_a складаються з 0, -1 та 1 та визначають лінійне перетворення глобального вектора позицій усіх вузлів \mathbf{X} та \mathbf{x} на вектори

$$\mathbf{R}_a = \mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i \text{ та } \mathbf{r}_a = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i,$$

що поєднують кінцеві вузли сегмента волокна у недеформованій та деформованій конфігураціях, відповідно. Важливо оговорити припущення, що у початковому стані мережі усі волокна є випрямленими, але ненапруженими, яке вважатимемо таким, що дотримується, якщо не оговорено інше. Наприклад, можливі ситуації, коли фізична довжина елементів кабелів є більшою за початкову відстань між вузлами, а, отже, він перебуває у ослабленому вигнутому стані.

З урахуванням кінематичних співвідношень (83) та (84) задача статичної рівноваги формулюється відносно набору змінних (\mathbf{x}, c) , в якому місце переміщень посідає вектор актуальних розташувань вузлів, таким чином

$$\begin{cases} \min_{\varphi,c} \sum_{a=1}^m \Pi_a(c_a) - \sum_{j \in \Gamma_N} p_j (\varphi_j - \mathbf{X}_j); \\ c_a = \|B_a \varphi\| - L_a, a = \overline{1, m}, \varphi_j = \mathbf{X}_j, j \in \Gamma_D. \end{cases} \quad (86)$$

Як і у випадку постановок (81) та (82), цей принцип мінімуму може бути зведений до еквівалентної задачі кінцевого програмування, яка позбавлена недиференційованості цільової функції за нульових подовжень, а саме

$$\begin{cases} \min_{\varphi,c_e} \sum_{a=1}^m \frac{1}{2} k_a c_{e,a}^2 - \sum_{j \in \Gamma_N} p_j (\varphi_j - \mathbf{X}_j); \\ c_{e,a} \geq \|B_a \varphi\| - L_a, a = \overline{1, m}, \varphi_j = \mathbf{X}_j, j \in \Gamma_D. \end{cases} \quad (87)$$

Ця задача належить до класу задач кінцевого програмування другого порядку (SCOP: second-order cone optimization problem) [151–155]. Вже існуюче обмеження у формі нерівності відносно скалярної змінної c_e та векторної змінної $\mathbf{r}_a = \mathbf{B}_a \mathbf{x}$ може бути подано як їхня належність до конусу другого порядку

$$\begin{bmatrix} c_{e,a} + L_a \\ B_a \varphi \end{bmatrix} \in \mathcal{L}^A, \quad (88)$$

де $\mathcal{L}^n = \{\mathbf{z} = (z_0, z_1) \in \mathcal{R}^n : z_0 \geq \|z_1\|\}$.

Для того, щоб задача остаточно набула форми SCOP, необхідно привести цільову функцію до лінійної, що можна зробити за допомогою додаткових

скалярних змінних, пов'язаних із пружними подовженнями c_e конічними нерівностями у тривимірному просторі

$$y_a \geq \frac{1}{2} k_a c_{e,a}^2 \Leftrightarrow \frac{y_a}{2k_a} + 1 \geq \left\| \begin{bmatrix} \frac{y_a}{2k_a} - 1 \\ c_a \end{bmatrix} \right\|. \quad (89)$$

Остаточно задача (87) набуває такої явної форми задачі конічного програмування другого порядку

$$\begin{cases} \min_{\varphi, c_e, y} \sum_{a=1}^m y_a - \sum_{j \in \Gamma_N} \mathbf{B} \cdot (\varphi_j - \mathbf{X}_j); \\ \frac{y_a}{2k_a} + 1 \geq \left\| \begin{bmatrix} \frac{y_a}{2k_a} - 1 \\ c_a \end{bmatrix} \right\|, \quad a = \overline{1, m}, \\ c_{e,a} + L_a \geq \|B_a \varphi\|, \quad a = \overline{1, m}, \\ \varphi_j = \mathbf{X}_j, \quad j \in \Gamma_D. \end{cases} \quad (90)$$

Побудовані постановки можуть бути поширені на інші практично важливі випадки. Зокрема, на формулювання відгуку сегментів кабелів відносно малих деформацій або інших мір великих деформацій. Окремо зазначимо випадок, який відрізняється нелінійністю закону відгуку сегментів відносно лінійного подовження c , поданого схематично на рис. 17.

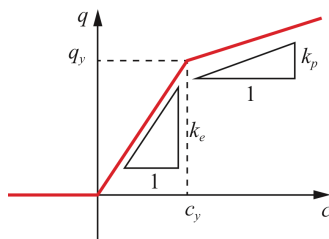


Рисунок 17 – Білінійний відгук кабеля на розтягнення

Для таких кабелів спостерігається дві ділянки на кривій розтягнення, на кожній із яких пружний модуль становить два відмінних значення $k_e > 0$ та $k_p > 0$. Зазвичай друге значення є меншим за перше.

Подібний нелінійний відгук можна віднести до пружно-пластичного навантаження, якщо вважати його монотонним та таким, що виключає процес розвантаження. При цьому квазіпружна подовжня сила обчислюється за таким виразом:

$$q(c) = \begin{cases} k_p(c - c_y) + q_y, & c \geq c_y; \\ k_e c, & c \in [0, c_y); \\ 0, & c < 0, \end{cases} \quad (91)$$

де $q_y = k_e c_y$ – сила податливості кабеля за досягненням межі пружного подовження c_y (множник k_e , вочевидь, відповідатиме пружній жорсткості перерізу кабеля, а k_p – пружно-пластичному модулю

після того, як кабель почне деформуватися пластично).

Потенціальна енергія розтягнення за такого відгуку має такий вираз:

$$\Pi(c) = \begin{cases} \frac{1}{2} k_p (c - c_y)^2 + q_y (c - c_y) + \frac{1}{2} q_y c_y^2, & c \geq c_y; \\ \frac{1}{2} k_e c^2, & c \in [0, c_y); \\ 0, & c < 0. \end{cases} \quad (92)$$

Як і раніше, з огляду на негладкий закон (91), можна адитивно розкласти подовження на такі компоненти

$$c = c_p + c_e + c_s, \quad (93)$$

серед яких на додачу до невід'ємної пружної складової c_e та скорочення від ослаблення c_e присутня пластична деформація c_p . Заразом усі ці компоненти визначають такі співвідношення:

$$c_y = \begin{cases} c - c_y; \\ 0; \\ 0; \end{cases} \quad c_e = \begin{cases} c_y; \\ c; \\ 0; \end{cases} \quad c_s = \begin{cases} 0, & c \geq c_y; \\ 0, & c \in [0, c_y); \\ c, & c < 0, \end{cases} \quad (94)$$

як подано на рис. 18.

Згідно цього розкладу осьова сила складатиметься із пружної та пластичної складових

$$q = q_p + q_e; \quad q_p = k_p c_p; \quad q_e = k_e c_e. \quad (95)$$

Варто зауважити, що сумісно компоненти подовження та осьової сили пов'язані також між собою такими умовами Куна-Такера:

$$\begin{cases} q_e \geq 0, & c_s \leq 0, & q_e c_s = 0; \\ q_p \geq 0, & c_e - c_y \leq 0, & q_p (c_e - c_y) = 0. \end{cases} \quad (96)$$

Аналогічно до попереднього розкладу потенціальної енергії (63), для білінійного випадку маємо потенціальну енергію (92) як результат мінімізації за компонентами подовження (93), обмеженими умовами (96), а саме

$$\Pi(c) = \min_{c_p, c_e} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} k_p c_p^2 + q_y c_p + \\ + \frac{1}{2} k_e c_e^2 \mid c_p + c_e \geq c, \\ c_e \leq c_y, c_y \geq 0. \end{array} \right\} \quad (97)$$

Відповідно, за тими самими міркуваннями, що і у виведенні постановки (87), можна отримати наступне формулювання для випадку білінійних кабелів:

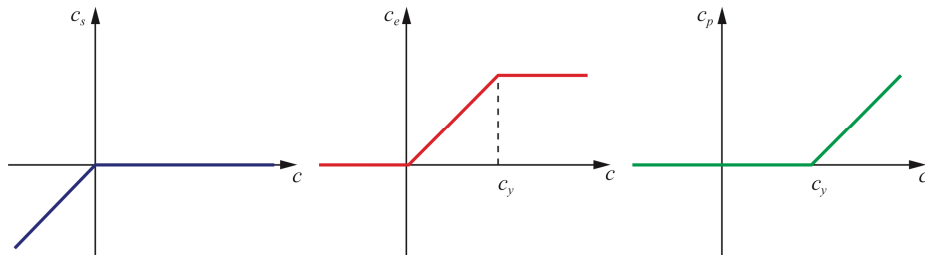


Рисунок 18 – Розклад подовження на пластичну, пружну деформації та скорочення від ослаблення за білінійного відгуку кабеля

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\varphi, c_p, c_e} \sum_{a=1}^m \left(\frac{1}{2} k_{p,a} c_{p,a}^2 + q_{y,a} c_{p,a} + \frac{1}{2} k_{e,a} c_e^2 \right)^2 - \\ - \sum_{j \in \Gamma_N} \mathbf{p}_j \cdot (\varphi_j - \mathbf{X}_j); \\ c_{p,a} + c_{e,a} \geq \|B_a \varphi\| - L_a, \quad a = \overline{1, m}, \\ c_{e,a} \leq c_{y,a}, \quad c_{p,a} \geq 0, \quad a = \overline{1, m}, \quad \varphi_j = \mathbf{X}_j, \quad j \in \Gamma_D, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda^* \bar{z}^* \in \partial f(\bar{x}); \\ -\bar{z}^* \in \partial g(\Lambda \bar{x}). \end{array} \right. \quad (98)$$

яке, у свою чергу, може бути зведене до канонічної форми SCOP з огляду на квадратичну цільову функцію та форму обмежень у задачі програмування.

Запропонований Канно підхід до постановок задач статички кабельних систем у переміщеннях має суттєві переваги [151–155]. По-перше, зведення до задач конічного програмування другого порядку дає змогу використовувати ефективні методи пошуку оптимального розв'язку. Для негладких задач подібна можливість є надзвичайно цінною. По-друге, видно, запропоновані постановки допускають істотні узагальнення, наприклад, на випадок нелінійного відгуку кабелів на розтягнення. Відповідно, це становить інтерес з точки зору моделювання непружної поведінки у кабельних мережах: пластичного деформування волокон, їхнього відносного ковзання із тертям тощо. І, по-третє, ці постановки допускають отримання спряжених формулювань відносно сил як варійованих змінних.

Принцип мінімуму додаткової енергії. Для отримання спряжених постановок використовують спеціальну форму дуальності, а саме дуальність Фенхеля [151–155]. Якщо первинна задача опуклого програмування має форму

$$\inf_x f(x) + g(\Lambda x) \quad x \in \mathbf{V}, \quad (99)$$

де $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathcal{R} \cup \{+\infty\}$, $g: \mathbf{Y} \rightarrow \mathcal{R} \cup \{+\infty\}$ є опуклими функціями, а $\Lambda: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{Y}$ – лінійним відображенням, то дуальною до цієї задачі мінімуму є задача максимуму

$$\sup_{z^*} \left\{ -f^*(\Lambda^* z^*) - g^*(z^*) \mid z^* \in \mathbf{Y}^* \right\}, \quad (100)$$

де $\Lambda^*: \mathbf{Y}^* \rightarrow \mathbf{V}^*$ є спряженим оператором.

У разі сильної дуальності, коли оптимальні значення функціоналів (99) та (100) є скінченними та збігаються, справедливі такі умови оптимальності для розв'язків цих спряжених задач математичного програмування \bar{x} та \bar{z}^* :

Для принципу мінімуму енергії (82) як первинної задачі варійованими змінними є переміщення та подовження

$$x = \begin{bmatrix} \varphi \\ c_e \end{bmatrix} \in \mathbf{V} = \mathbf{R}^d \times \mathcal{R}^m, \quad (102)$$

а лінійний оператор діє таким чином:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \Lambda x = \begin{bmatrix} -c_e \\ B_1 \varphi \\ \vdots \\ B_m \varphi \end{bmatrix} \in \mathbf{Y} = \mathbf{R}^m \times \mathcal{R}^{3m}. \quad (103)$$

Опуклі функції f та g відповідно слід подати як

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{a=1}^m \frac{1}{2} k_{e,a} (c_{e,a})^2 - \sum_{j \in \Gamma_N} p_j (\varphi_j - x_j), & \text{якщо } \varphi_j + \bar{\varphi}_j = 0 \quad (j \in \Gamma_N); \\ +\infty, & \text{інакше,} \end{cases} \quad (104)$$

$$g(z) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } z_{1a} + L_a \geq \|z_{2a}\|; \\ +\infty, & \text{інакше,} \end{cases} \quad (105)$$

визначивши їх скінченними лише за умов виконання крайових умов у закріплених вузлах для f та невід'ємності для g .

Функції, спряжені до (104), (105), матимуть такий вираз:

$$f^*(x^*) = \begin{cases} \sum_{a=1}^m \frac{1}{2} \frac{(c_{e,a}^*)^2}{k_{e,a}} + \sum_{j \in \Gamma_N} \bar{\varphi}_j \varphi_j^* - \sum_{j \in \Gamma_N} \bar{p}_j X_j, & \text{якщо } \varphi_j^* + \bar{p}_j = 0 \quad (j \in \Gamma_N); \\ +\infty, & \text{інакше.} \end{cases} \quad (106)$$

$$g^*(z^*) = \begin{cases} -\sum_{a=1}^m L_a z_{1a}^*, \\ \text{якщо } -z_{1a}^* \geq \left\| -z_{2a}^* \right\| \quad (a = \overline{1, m}); \\ +\infty, \quad \text{інакше.} \end{cases} \quad (107)$$

Можна звернути увагу, що область визначення скінченних значень спряженої функції (106) тепер прив'язана до виконання умов рівноваги у вузлах прикладання зовнішніх сил Γ_N . Спряжений оператор визначатиметься наступним чином:

$$g^*(z^*) = \begin{cases} -\sum_{a=1}^m L_a z_{1a}^*, \\ \text{якщо } -z_{1a}^* \geq \left\| -z_{2a}^* \right\| \quad (a = \overline{1, m}); \\ +\infty, \quad \text{інакше,} \end{cases} \quad (108)$$

де для зручності спряжені змінні подані більш звично як осьові сили q , а також для зручності введена нова векторна змінна t . Останній складається із вузлових реакцій t_j :

$$\Lambda^* z^* = \begin{bmatrix} -\sum_{a=1}^m B_i^T z_{1a}^* \\ z_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{a=1}^m B_a^T v_a \\ \{q_a\}_{a=1}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ q \end{bmatrix}. \quad (109)$$

З урахуванням цих визначень остаточно отримуюмо із використанням дуальності Фенхеля таку спряжену постановку

$$\max_{q, v, t} \begin{cases} -\sum_{a=1}^m \frac{1}{2} \frac{(q_a)^2}{k_{e,a}} - \sum_{a=1}^m L_a q_a + \\ + \sum_{j \in \Gamma_N} \bar{\varphi}_j t_j + \sum_{j \in \Gamma_N} p_j X_j; \\ \sum_{a=1}^m B_a^T v_a = t, q_a \geq \|v_a\|; \\ t_j = \bar{p}_j, j \in \Gamma_N. \end{cases} \quad (110)$$

Таким чином, запропоновані різні постановки вихідної задачі, у т.ч. – варіаційні формулювання, серед яких є модифікація принципів типу запропонованих Канно [151–155]. Вони мають позитивні та негативні якості, що змушує у подальшому розвивати удосконалені постановки. Разом із тим уже на основі існуючих формулювань можливо більш достовірно, ніж із застосуванням традиційних підходів, досліджувати поведінку матеріалів із мережевою просторовою будовою.

Висновки. У роботі представлені нові підходи, моделі і методи дослідження новітніх нетрадицій-

них матеріалів у вигляді мережевих структур з одновимірних елементів (волокон), що взаємодіють між собою в окремих вузлах просторової сітки, на основі варіаційних постановок. Ґрунтуючись на отриманих результатах, можна зробити наступні висновки.

1. На відміну від традиційних підходів до гомогенізації властивостей звичайних композиційних матеріалів, у яких армівні елементи занурені у матрицю, для досліджуваних типів волоконних структур вони неприйнятні. Відповідно, були розроблені: підхід, заснований на виділенні представницького статистичного набору; модель співставлення енергії пружного деформування системи осередненій її енергії; метод співставлення мікромакрохарактеристик деформації, що відрізняється способом осереднення за шляхом векторів мікродеформацій волокон на одиничній мікросфері.

2. Для мережевих структур запропоновані нові моделі для опису в'язкопружних процесів на основі аналізу статистичних наборів волоконних мережевих структур.

3. Для середовищ типу нетканних матеріалів розроблені базові співвідношення для опису процесів розтягування волокон, вузлових проковзувань і вузлових розривів. Сформована нова варіаційна постановка задачі у вузлових зусиллях.

Таким чином, знайшли відображення теоретичні основи дослідження механіки волоконних структур на базі нових підходів, моделей і методів мікромеханіки. Розв'язання за їх допомогою задач для тестових зразків матеріалів мережевої структури продемонструвало адекватність, працездатність та ефективність таких постановок.

Вони у подальшому знайдуть застосування при дослідженні деформування захисних, силових та функціональних структур із такого типу матеріалів.

Список літератури

1. Ткачук М. М. Базові підходи при дослідженні реакції волоконних матеріалів на зовнішнє навантаження. *Вісник НТУ ХПИ. Серія: «Машинознавство та САПР»*. 2018. № 7 (1283). С. 132–141.
2. Ткачук М. М. *Мікромеханічні моделі та методи осереднення властивостей матеріалів мережевої структури та проміжних шарів контактуючих тіл*: дис. ... д-ра техн. наук: 05.03.2/Ткачук Микола Миколайович. Харків, 2020. 470 с.
3. Treloar L.R.G. *The Physics of Rubber Elasticity*. 3rd edition. Oxford: Clarendon Press. 1975. 322 p.
4. Lodish H. *Molecular Cell Biology*. Cambridge: W.H. Freeman & Company. 2000. 973 p.
5. Boal D.H. *Mechanics of the cell*. Cambridge: Cambridge University Press. 2002. 406 p.
6. Holzapfel G.A., Ogden R.W. *Mechanics of biological tissue*. New York: Springer Science & Business Media. 2006. 135 p.
7. Schmolle K.M., Lieleg O., Bausch A.R. Internal stress in kinetically trapped actin bundle networks. *Soft Matter*. 2008. No. 4(12). P. 2365–2367.
8. Schmolle K. M., Fernandez P., Arevalo R. C., Blair D. L., Bausch A. R. Cyclic hardening in bundled actin networks. *Nature communications*. 2010. No. 1. P. 134.
9. Lang N. R., Münster S., Metzner C., Krauss P., Schürmann S., Lange J., Fabry, B. Estimating the 3D pore size distribution of biopolymer networks from directionally biased data. *Biophysical journal*. 2013. No. 105(9). P. 1967–1975.
10. Picu R.C. Mechanics of random fiber networks—a review. *Soft Matter*. 2011. No. 7. P. 6768–6785.
11. Gibson L.J., M.F. Ashby, B.A. Harley. *Cellular Materials in*

- Nature and Medicine*. Cambridge: Cambridge University Press. 2010. 309 p.
12. Pai C. L., Boyce M. C., Rutledge G. C. On the importance of fiber curvature to the elastic moduli of electrospun nonwoven fiber meshes. *Polymer*. 2011. No. 52(26). P. 6126–6133.
 13. Yu B., Zhao X., Zeng Y., Qi D. The influence of process parameters on needle punched nonwovens investigated using image analysis. *RSC Advances*. 2017. No. 7(9). P. 5183–5188.
 14. Martínez-Hergueta F., Ridruejo A., González C., Llorca J. Deformation and energy dissipation mechanisms of needle-punched nonwoven fabrics: A multiscale experimental analysis. *International Journal of Solids and Structures*. 2015. No. 64. P. 120–131.
 15. Haverhals L.M., Reichert W.M., De Long H.C., Trulove P.C. Natural fiber welding. *Macromolecular Materials and Engineering*. 2010. Vol. 295(5). P. 425–430.
 16. Li H., Zhu C., Xue J., Ke Q., Xia Y. Enhancing the Mechanical Properties of Electrospun Nanofiber Mats through Controllable Welding at the Cross Points. *Macromolecular Rapid Communications*. 2017. Vol. 38(9).
 17. Martínez-Hergueta F., Ridruejo A., González C., Llorca J. Numerical simulation of the ballistic response of needle-punched nonwoven fabrics. *International Journal of Solids and Structures*. 2017. Vol. 106. P. 56–67.
 18. Martínez-Hergueta F., Ridruejo A., González C., Llorca J. Ballistic performance of hybrid nonwoven/woven polyethylene fabric shields. *International Journal of Impact Engineering*. 2018. Vol. 111. P. 55–65.
 19. Ethiraj G., Miehe C. Multiplicative magneto-elasticity of magnetosensitive polymers incorporating micromechanically-based network kernels. *International Journal of Engineering Science*. 2016. Vol. 102. P. 93–119.
 20. Хорошун, Л. П., Назаренко, Л. В. Нелинейные деформативные свойства композитных материалов с трансверсально-изотропными компонентами. *Прикладная механика*. 2014. Т. 50, № 3. С. 31–41.
 21. Угримов, С. В. Расчет трехслойных пластин с композитными обшивками. *Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов*. 2014. № 3. С. 47–56.
 22. Mykhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Effective elastic properties of 3D composites with short curvilinear fibers: numerical simulation and experimental validation. *Solid State Phenomena*. 2017. Vol. 258. P. 452–455.
 23. Winkler R. Deformation of semiflexible chains. *Journal of Chemical Physics*. 2003. Vol. 118. P. 2919–2928.
 24. Huisman E., C. Storm, G. Barkema Monte Carlo study of multiply crosslinked semiflexible polymer networks. *Physical Review E Staff*. 2008. Vol. 78. P. 051801(11).
 25. Blundell J., E. Terentjev The influence of disorder on deformations in semiflexible networks. Proceedings of the Royal Society A: *Mathematical, Physical and Engineering Science*. 2011. Vol. 467. P. 2330–2349.
 26. Cox HL The elasticity and strength of paper and other fibrous materials. *British journal of applied physics*. 1952. Vol. 3(3). 72 p.
 27. Storm C., J.J. Pastore, F.C. MacKintosh, T.C. Lubensky, Janmey P.A. Nonlinear elasticity in biological gels. *Nature*. 2005. Vol. 435(7039). P. 191–194.
 28. Blundell J., E. Terentjev Affine model of stress stiffening in semiflexible filament networks. *ArXiv*. 2008. Vol. 0808.4088. P. 1–11.
 29. Arruda E.M., M.C. Boyce A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1993. Vol. 41. P. 389–412.
 30. Head D., A. Levine, F. MacKintosh Deformation of cross-linked semiflexible polymer networks. *Physical Review Letters*. 2003. Vol. 91. P. 108102(4).
 31. Miehe C., S. Göktepe, F. Lulei A micro-macro approach to rubber-like materials – Part I: the non-affine micro-sphere model of rubber elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2004. Vol. 52. P. 2617–2660.
 32. Băzant Z. P., B.H. Oh Efficient numerical integration on the surface of a sphere. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1986. No 1. 66. P. 37–49.
 33. Ehret A.E., Itskov M., Schmid H. Numerical integration on the sphere and its effect on the material symmetry of constitutive equations: a comparative study. *International journal for numerical methods in engineering*. 2010. Vol. 81(2). P. 189–206.
 34. Verron Erwan Questioning numerical integration methods for microsphere (and microplane) constitutive equations. *Mechanics of Materials*. 2015. Vol. 89. P. 216–228.
 35. Miehe C., Joel Méndez Diez, Göktepe S., Lisa-Marie Schänzel Coupled thermoviscoplasticity of glassy polymers in the logarithmic strain space based on the free volume theory. *International Journal of Solids and Structures*. 2011. Vol. 48(13). P. 1799–1817.
 36. Govindjee S., Zoller M. J., Hackl K. A fully-relaxed variationally-consistent framework for inelastic micro-sphere models: Finite viscoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2019. Vol. 127. P. 1–19.
 37. Menzel A., Waffenschmidt T. A microsphere-based remodelling formulation for anisotropic biological tissues. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2009. Vol. 367(1902). P. 3499–3523.
 38. Holzapfel G.A., Unterberger M. J., Ogden R. W. An affine continuum mechanical model for cross-linked F-actin networks with compliant linker proteins. *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials*. 2014. Vol. 38. P. 78–90.
 39. Van Oosterwyck H., José F. Rodríguez, M. Doblaré, José M. García Aznar An affine micro-sphere-based constitutive model, accounting for junctional sliding, can capture F-actin network mechanics. *Computer methods in biomechanics and biomedical engineering*. 2013. Vol. 16(9). P. 1002–1012.
 40. Guilie Joachim, Thien-Nga Le, Patrick Le Tallec Micro-sphere model for strain-induced crystallisation and three-dimensional applications. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2015. Vol. 81. P. 58–74.
 41. Rastak R., Linder C. A non-affine micro-macro approach to strain-crystallizing rubber-like materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2018. Vol. 111. P. 67–99.
 42. Thylander S., A. Menzel, M. Ristinmaa A non-affine electroviscoelastic microsphere model for dielectric elastomers: Application to VHB 4910 based actuators. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2016. p. 1045389X16651157.
 43. Behnke R., Berger T., Kaliske M. Numerical modeling of time- and temperature-dependent strain-induced crystallization in rubber. *International Journal of Solids and Structures*. 2018. No. 141. P. 15–34.
 44. Gros A., Huneau B., Verron E., Tosaka M. A physically-based model for strain-induced crystallization in natural rubber. Part I: Life cycle of a crystallite. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2019. No. 125. P. 164–177.
 45. Rey T., Chagnon G., Favier D., Le J.-B. Cam Hyperelasticity with rate-independent microsphere hysteresis model for rubberlike materials. *Computational Materials Science*. 2014. Vol. 90. P. 89–98.
 46. Bergström J.S., M.C. Boyce Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1998. Vol. 46(5). P. 931–954.
 47. Sáez P., Alastrué V., Peña E., Doblaré M., Martínez M.A. Anisotropic microsphere-based approach to damage in soft fibered tissue. *Biomechanics and modeling in mechanobiology*. 2012. Vol. 11(5). P. 595–608.
 48. Martínez-Hergueta F., Ridruejo A., González C., Llorca J. Ballistic performance of hybrid nonwoven/woven polyethylene fabric shields. *International Journal of Impact Engineering* 2018. Vol. 111. P. 55–65.
 49. Negi V., Picu C. Mechanical behavior of nonwoven non-crosslinked fibrous mats with adhesion and friction. *Soft Matter*. 2019. Vol. 15, Iss. 29, 5951–5964.
 50. Deoekar S., Yan Z., Picu R. C. Random Fiber Networks With Superior Properties Through Network Topology Control. *Journal of Applied Mechanics*. (2019). 86(8). P. 081010.
 51. Deoekar S., Picu R. C. On the strength of random fiber networks. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2018. 116. P. 1–16.
 52. Chen, N., Silberstein, M. N. A micromechanics-based damage model for non-woven fiber networks. *International Journal of Solids and Structures*. 2019. 160. P. 18–31.
 53. Chen, N. *Experimental and computational study of non-woven damage mechanics* (Doctoral dissertation, Cornell University). 2018.

54. Diani, J., Le Tallec, P. A fully equilibrated microsphere model with damage for rubberlike materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2019. 124. P. 702–713.
55. Bosco E., Peerlings R. H. J., Geers M. G. D. Scale effects in the hygro-thermo-mechanical response of fibrous networks. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2018. 71. P. 113–121.
56. Berkache K., Deogekar S., Goda I., Picu R. C., Ganghoffer J. F. Identification of equivalent couple-stress continuum models for planar random fibrous media. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2019. 31(4), P. 1035–1050.
57. Dirrenberger J., Forest S., Jeulin D. Computational Homogenization of Architected Materials. In *Architected Materials in Nature and Engineering*. Springer, Cham. 2019. Pp. 89–139.
58. Chen G., Rastak R., Wang Y., Yan H., Feig V., Liu Y., Jiang Y., Chen Sh., Lian F., Molina-Lopez F., Jin L., Cui K., Chung J. W., Pop E., Linder C., Bao Z.. Strain- and Strain-Rate-Invariant Conductance in a Stretchable and Compressible 3D Conducting Polymer Foam. *Matter* 2019.. Vol. 1. Iss. 1. P. 205–218.
59. Linder C., Mische C., Tkachuk M. A micromechanically motivated diffusion-based transient network model and its incorporation into finite rubber viscoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2011. Vol. 59. Iss. 10. P. 2134–2156.
60. Tkachuk M., Linder C. The maximal advance path constraint for the homogenization of materials with random network microstructure. *Philosophical Magazine*. 2012. Vol. 92. P. 779–2808.
61. Ткачук М.М. Базові підходи при дослідженні реакції волоконних матеріалів на зовнішнє навантаження. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Серія: *Машинознавство та САІР*. 36. наук. праць. Харків, НТУ «ХПІ». 2018. № 7 (1283). С. 132–141.
62. Ткачук Н.Н. Анализ реакции волоконных материалов на действие нагрузок на основе микромеханических моделей. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Серія: *Машинознавство та САІР*. 36. наук. праць. Харків, НТУ «ХПІ». 2018. № 25 (1301). С. 149–155.
63. Ткачук М.М. Метод пружної гомогенізації бімодальних мереж. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Серія: *Машинознавство та САІР*. 36. наук. праць. Харків, НТУ «ХПІ». 2019. № 7 (1332). С. 107–113.
64. Picu, C. R. Constitutive models for random fiber network materials: a review of current status and challenges. *Mechanics Research Communications*. 2020. 103605.
65. Islam M. R. & Picu R. C. Effect of network architecture on the mechanical behavior of random fiber networks. *Journal of Applied Mechanics*. 2018. 85(8).
66. Negi V., & Picu R. C. Mechanical behavior of cross-linked random fiber networks with inter-fiber adhesion. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2019. 122. P. 418–434.
67. Deogekar S., Islam M. R., & Picu R. C. Parameters controlling the strength of stochastic fibrous materials. *International journal of solids and structures*. 2019. 168. P. 194–202.
68. Deogekar S., & Picu R. C. Strength of stochastic fibrous materials under multiaxial loading. *Soft Matter*. 2021. 17(3). P. 704–714.
69. Merson J., & Picu R. C. Size effects in random fiber networks controlled by the use of generalized boundary conditions. *International Journal of Solids and Structures*. 2020. 206. P. 314–321.
70. Berkache K., Deogekar S., Goda I., Picu R. C. & Ganghoffer J. F. Homogenized elastic response of random fiber networks based on strain gradient continuum models. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2019. 24(12). P. 3880–3896.
71. Tyznik S. & Notbohm J. Length scale dependent elasticity in random three-dimensional fiber networks. *Mechanics of Materials*. 2019. 138. P. 103155.
72. Lakhali L., Brunet Y., & Kanit T. Numerical bounds for elastic properties of unidirectional non-overlapping fiber reinforced materials. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2020. No. 80. P. 103926.
73. Reda H., Berkache K., Ganghoffer J. F. & Lakiss H. Dynamical properties of random fibrous networks based on generalized continuum mechanics. *Waves in Random and Complex Media*. 2020. 30(1). P. 27–53.
74. Karakoç A., Paltakari J. & Taciroglu E. 2020. On the computational homogenization of three-dimensional fibrous materials. *Composite Structures*. 242. P. 112151.
75. Zhang M., Lu W., Gouma P. I., Xu Z. & Wang L. Theoretical prediction of effective stiffness of nonwoven fibrous networks with straight and curved nanofibers. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2021. 143. P. 106311.
76. Zhang M., Chen Y., Chiang F. P., Gouma P. I., & Wang L. Modeling the large deformation and microstructure evolution of nonwoven polymer fiber networks. *Journal of Applied Mechanics*. 2019. 86(1). P. 011010.
77. Pan F., Zhang F., Chen Y., Liu Z., Zheng X., & Liu B. In-plane and out-of-plane stiffness of 2D random fiber networks: Micromechanics and non-classical stiffness relation. *Extreme Mechanics Letters*. 2020. 36. P. 100658.
78. Shi L., Long K., Zhong Y., Luo G., Ma X., Li M., ... & Yu J. Compressive and shear performance of three-dimensional rigid stochastic fibrous networks: Experiment, finite element simulation, and factor analysis. *Journal of the European Ceramic Society*. 2020. 40(1). P. 115–126.
79. Farukh F., Demirci E., Ali H., Acar M., Pourdeyhimi B., & Silberschmidt V. V. Nonwovens modelling: a review of finite-element strategies. *The Journal of The Textile Institute*. 2016. 107(2). P. 225–232.
80. Bosco E., Peerlings R. H. J. & Geers M. G. D. Asymptotic homogenization of hygro-thermo-mechanical properties of fibrous networks. *International Journal of Solids and Structures*. 2017. 115. P. 180–189.
81. Domaschke S., Morel A., Fortunato G., & Ehret A. E. Random auxetics from buckling fibre networks. *Nature communications*. 2019. 10(1) P. 1–8.
82. Domaschke S., Zündel M., Mazza E. & Ehret A. E. A 3D computational model of electrospun networks and its application to inform a reduced modelling approach. *International Journal of Solids and Structures*. 2019. 158. P. 76–89.
83. Zündel M., Mazza E., & Ehret A. E. A 2.5 D approach to the mechanics of electrospun fibre mats. *Soft Matter*. 2017. 13(37). P. 6407–6421.
84. Gazzo S., Cuomo M., Boutin C. & Contrafatto L. Directional properties of fibre network materials evaluated by means of discrete homogenization. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2020. 82. P. 104009.
85. Martínez-Hergueta F., Pellegrino A., Ridruejo Á., Petrinic N., González C. & LLorca J. Dynamic Tensile Testing of Needle-Punched Nonwoven Fabrics. *Applied Sciences*. 2020. 10(15). P. 5081.
86. Reddy P. R. S., Reddy T. S., Srikanth I., Kushwaha J., & Madhu V. Development of cost effective personnel armour through structural hybridization. *Defence Technology*. 2020. 16(6). P. 1089–1097.
87. Mawkhlieng U., Majumdar A. & Laha A. A review of fibrous materials for soft body armour applications. *RSC Advances*. 2020. 10(2). P. 1066–1086.
88. Yin Y., & Xiong J. Finite element analysis of electrospun nanofibrous mats under biaxial tension. *Nanomaterials*. 2018. 8(5). P. 348.
89. Domaschke S., Morel A., Kaufmann R., Hofmann J., Rossi R. M., Mazza E., ... & Ehret A. E. Predicting the macroscopic response of electrospun membranes based on microstructure and single fibre properties. *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials*. 2020. 104. P. 103634.
90. Tojaga V., Kulachenko A., Östlund S. & Gasser T. C. Modeling multi-fracturing fibers in fiber networks using elastoplastic Timoshenko beam finite elements with embedded strong discontinuities—Formulation and staggered algorithm. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2021. 384. P. 113964.
91. Kouko J., Turpeinen T., Kulachenko A., Hirn U., & Retulainen E. Understanding extensibility of paper: Role of fiber elongation and fiber bonding. *Tappi J*. 2020. 19. P. 125–135.
92. Brandberg A. & Kulachenko A. Compression failure in dense non-woven fiber networks. *Cellulose*. 2020. 27(10). P. 6065–6082.
93. Zhang Y., Lu Z., Yang Z. & Zhang D. Fracture behavior of fibrous network materials: Crack insensitivity and toughening

- mechanism. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2020. 188. P. 105910.
94. Čarija J., Nikolić M., Ibrahimbegovic A. & Nikolić Ž. Discrete softening-damage model for fracture process representation with embedded strong discontinuities. *Engineering Fracture Mechanics*. 2020. 236. P. 107211.
 95. Sozumert E., Demirci E. & Silberschmidt V. V. Experimental and numerical methods to analyse deformation and damage in random fibrous networks. In *Plasticity, Damage and Fracture in Advanced Materials*. 2020. (Pp. 151–174). Springer, Cham.
 96. Sozumert E., Farukh F., Sabuncuoglu B., Demirci E., Acar M., Pourdeyhimi B. & Silberschmidt V. V. Deformation and damage of random fibrous networks. *International Journal of Solids and Structures*. 2020. 184. P. 233–247.
 97. Chen Y. & Siegmund T. The Effect of Notches on the Failure of Two-Dimensional Nonwoven Fiber Networks. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 2021. 143(2). P. 021001.
 98. Harmening M., Marheineke N., & Wegener R. Efficient graph-based tensile strength simulations of random fiber structures. *ZAMM–Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2020. e202000287.
 99. Li T. T., Wang Z., Ren H. T., Peng H. K., Zhang X., Jiang Q., ... & Lin J. H. Recyclable and degradable nonwoven-based double-network composite hydrogel adsorbent for efficient removal of Pb (II) and Ni (II) from aqueous solution. *Science of The Total Environment*. 2021. 758. P. 143640.
 100. Schill W., Abbott L. J. & Haskins J. B. A multiscale cohesive law for carbon fiber networks. *Carbon*. 2021. 171. P. 376–384.
 101. Picu, C. R. Constitutive models for random fiber network materials: a review of current status and challenges. *Mechanics Research Communications*. 2020. 103605.
 102. Islam M. R. & Picu R. C. Effect of network architecture on the mechanical behavior of random fiber networks. *Journal of Applied Mechanics*. 2018. 85(8).
 103. Deoekar S., Islam M. R., & Picu R. C. Parameters controlling the strength of stochastic fibrous materials. *International journal of solids and structures*. 2019. 168. P. 194–202.
 104. Negi V., & Picu R. C. Mechanical behavior of cross-linked random fiber networks with inter-fiber adhesion. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2019. Vol. 122. P. 418–434.
 105. Deoekar S., & Picu R. C. Strength of stochastic fibrous materials under multiaxial loading. *Soft Matter*. 2021. 17(3). P. 704–714.
 106. Merson J., & Picu R. C. Size effects in random fiber networks controlled by the use of generalized boundary conditions. *International Journal of Solids and Structures*. 2020. 206. P. 314–321.
 107. Berkache K., Deoekar S., Goda I., Picu R. C. & Ganghoffer J. F. Homogenized elastic response of random fiber networks based on strain gradient continuum models. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2019. 24(12). P. 3880–3896.
 108. Tyznik S. & Notbohm J. Length scale dependent elasticity in random three-dimensional fiber networks. *Mechanics of Materials*. 2019. 138. P. 103155.
 109. Lakhali L., Brunet Y., & Kanit T. Numerical bounds for elastic properties of unidirectional non-overlapping fiber reinforced materials. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2020. 80. P. 103926.
 110. Reda H., Berkache K., Ganghoffer J. F. & Lakiss H. Dynamical properties of random fibrous networks based on generalized continuum mechanics. *Waves in Random and Complex Media*. 2020. 30(1). P. 27-53.
 111. Karakoç A., Paltakari J. & Taciroglu E. 2020. On the computational homogenization of three-dimensional fibrous materials. *Composite Structures*. 242. P. 112151.
 112. Zhang M., Lu W., Gouma P. I., Xu Z. & Wang L. Theoretical prediction of effective stiffness of nonwoven fibrous networks with straight and curved nanofibers. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2021. 143. P. 106311.
 113. Zhang M., Chen Y., Chiang F. P., Gouma P. I., & Wang L. Modeling the large deformation and microstructure evolution of nonwoven polymer fiber networks. *Journal of Applied Mechanics*. 2019. 86(1). P. 011010.
 114. Pan F., Zhang F., Chen Y., Liu Z., Zheng X., & Liu B. In-plane and out-of-plane stiffness of 2D random fiber networks: Micromechanics and non-classical stiffness relation. *Extreme Mechanics Letters*. 2020. 36. P. 100658.
 115. Shi L., Long K., Zhong Y., Luo G., Ma X., Li M., ... & Yu J. Compressive and shear performance of three-dimensional rigid stochastic fibrous networks: Experiment, finite element simulation, and factor analysis. *Journal of the European Ceramic Society*. 2020. 40(1). P. 115–126.
 116. Farukh F., Demirci E., Ali H., Acar M., Pourdeyhimi B., & Silberschmidt V. V. Nonwovens modelling: a review of finite-element strategies. *The Journal of The Textile Institute*. 2016. 107(2). P. 225–232.
 117. Bosco E., Peerlings R. H. J. & Geers M. G. D. Asymptotic homogenization of hygro-thermo-mechanical properties of fibrous networks. *International Journal of Solids and Structures*. 2017. 115. P. 180–189.
 118. Domaschke S., Morel A., Fortunato G., & Ehret A. E. Random auxetics from buckling fibre networks. *Nature communications*. 2019. 10(1) P. 1–8.
 119. Domaschke S., Zündel M., Mazza E. & Ehret A. E. A 3D computational model of electrospun networks and its application to inform a reduced modelling approach. *International Journal of Solids and Structures*. 2019. 158. P. 76–89.
 120. Zündel M., Mazza E., & Ehret A. E. A 2.5 D approach to the mechanics of electrospun fibre mats. *Soft Matter*. 2017. 13(37). P. 6407–6421.
 121. Gazzo S., Cuomo M., Boutin C. & Contrafatto L. Directional properties of fibre network materials evaluated by means of discrete homogenization. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2020. 82. P. 104009.
 122. Martínez-Hergueta F., Pellegrino A., Ridruejo Á., Petrinic N., González C. & Llorca J. Dynamic Tensile Testing of Needle-Punched Nonwoven Fabrics. *Applied Sciences*. 2020. 10(15). P. 5081.
 123. Reddy P. R. S., Reddy T. S., Srikanth I., Kushwaha J., & Madhu V. Development of cost effective personnel armour through structural hybridization. *Defence Technology*. 2020. 16(6). P. 1089–1097.
 124. Mawkhlieng U., Majumdar A. & Laha A. A review of fibrous materials for soft body armour applications. *RSC Advances*. 2020. 10(2). P. 1066–1086.
 125. Yin Y., & Xiong J. Finite element analysis of electrospun nanofibrous mats under biaxial tension. *Nanomaterials*. 2018. 8(5). P. 348.
 126. Domaschke S., Morel A., Kaufmann R., Hofmann J., Rossi R. M., Mazza E., ... & Ehret A. E. Predicting the macroscopic response of electrospun membranes based on microstructure and single fibre properties. *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials*. 2020. 104. P. 103634.
 127. Tojaga V., Kulachenko A., Östlund S. & Gasser T. C. Modeling multi-fracturing fibers in fiber networks using elastoplastic Timoshenko beam finite elements with embedded strong discontinuities –Formulation and staggered algorithm. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2021. 384. P. 113964.
 128. Kouko J., Turpeinen T., Kulachenko A., Hirn U., & Retulainen E. Understanding extensibility of paper: Role of fiber elongation and fiber bonding. *Tappi J*. 2020. 19. P. 125–135.
 129. Brandberg A. & Kulachenko A. Compression failure in dense non-woven fiber networks. *Cellulose*. 2020. 27(10). P. 6065–6082.
 130. Zhang Y., Lu Z., Yang Z. & Zhang D. Fracture behavior of fibrous network materials: Crack insensitivity and toughening mechanism. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2020. 188. P. 105910.
 131. Čarija J., Nikolić M., Ibrahimbegovic A. & Nikolić Ž. Discrete softening-damage model for fracture process representation with embedded strong discontinuities. *Engineering Fracture Mechanics*. 2020. 236. P. 107211.
 132. Sozumert E., Demirci E. & Silberschmidt V. V. Experimental and numerical methods to analyse deformation and damage in random fibrous networks. In *Plasticity, Damage and Fracture in Advanced Materials*. Springer, Cham. 2020. Pp. 151–174.
 133. Sozumert E., Farukh F., Sabuncuoglu B., Demirci E., Acar M., Pourdeyhimi B. & Silberschmidt V. V. Deformation and damage of random fibrous networks. *International Journal of Solids and Structures*. 2020. 184. P. 233–247.
 134. Chen Y. & Siegmund T. The Effect of Notches on the Failure of Two-Dimensional Nonwoven Fiber Networks. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 2021. 143(2).

- P. 021001.
135. Harmening M., Marheineke N., & Wegener R. Efficient graph based tensile strength simulations of random fiber structures. *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2020. e202000287.
 136. Li T. T., Wang Z., Ren H. T., Peng H. K., Zhang X., Jiang Q., ... & Lin J. H. Recyclable and degradable nonwoven-based double-network composite hydrogel adsorbent for efficient removal of Pb (II) and Ni (II) from aqueous solution. *Science of The Total Environment*. 2021. Vol. 758. P. 143640.
 137. Schill W., Abbott L. J. & Haskins J. B. A multiscale cohesive law for carbon fiber networks. *Carbon*. 2021. 171. P. 376–384.
 138. Joe J., Thouless M. D., Barber J. R. Effect of roughness on the adhesive tractions between contacting bodies. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2018. 118. P. 365–373.
 139. Miehe C. A constitutive frame of elastoplasticity at large strains based on the notion of a plastic metric. *International Journal of Solids and Structures*. 1998. vol. 35. P. 3859–3897.
 140. Ethiraj G., C. Miehe Multiplicative magneto-elasticity of magnetosensitive polymers incorporating micromechanically-based network kernels. *International Journal of Engineering Science*. 2016. Vol. 102. P. 93–119.
 141. Гребенюк С. М., Гребенюк С. Н. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів (Doctoral dissertation, Запорізький національний технічний університет). 2016.
 142. Strömberg N., Klarbring A. Topology optimization of structures in unilateral contact. *Structural and multidisciplinary optimization*. 2010. vol. 41(1). P. 57–64.
 143. Wu P.D., E. van der Giessen On improved network models for rubber elasticity and their applications to orientation hardening in glassy polymers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1993. Vol. 41(3). P. 427–456.
 144. Alastrué V., Sáez P., Martínez M.A., Doblaré M. On the use of the Bingham statistical distribution in microsphere-based constitutive models for arterial tissue. *Mechanics Research Communications*. 2010. Vol. 37(8). P. 700–706.
 145. Glatting G., Winkler R. G., Reineker P. Analytical model for the microscopic nonaffine deformation of polymer networks. *Journal of Chemical Physics*. 1994. Vol. 101(3). P. 2532–2538.
 146. Flory P.J. *Statistical mechanics of chain molecules*. Munich: Hanser Publishers, 1988.
 147. Coleman B.D., Noll W. Foundations of Linear Viscoelasticity. *Reviews of Modern Physics*. 1961. Vol. 33. P. 239–249.
 148. Doi M., Edwards S.F. *The Theory of Polymer Dynamics*. Oxford: Clarendon Press, 1986.
 149. Otto M., Eckert J., Vilgis T. Persistence lengths of semiflexible chains – methods and approximations. *Macromolecular Theory and Simulations*. 1994. Vol. 3. P. 543–555.
 150. Janney P.A., McCormick M.E., Rammensee S., Leight J.L., Georges P.C., MacKintosh F.C. Negative normal stress in semiflexible biopolymer gels. *Nature Materials*. 2007. Vol. 6(1). P. 48–51.
 151. Kanno, Y. (2011). *Nonsmooth Mechanics and Convex Optimization*. CRC Press. 445 p.
 152. Kanno, Y., & Ohsaki, M. (2006). Contact analysis of cable networks by using second-order cone programming. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(6), 2032–2052.
 153. Kanno, Y., Ohsaki, M., Ito, J. Large-deformation and friction analysis of non-linear elastic cable networks by second-order cone programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 55(9), 1079–1114.
 154. Kanno, Y., & Ohsaki, M. (2003). Minimum principle of complementary energy of cable networks by using second-order cone programming. *International Journal of Solids and Structures*, 40(17), 4437–4460.
 155. Kanno, Y., & Ohsaki, M. (2005). Minimum principle of complementary energy for nonlinear elastic cable networks with geometrical nonlinearities. *Journal of optimization theory and applications*, 126(3), 617–641.
- approaches in the study of the reaction of fibrous materials to external loads]. *Visnyk NTU KhPI. Seriya: «Mashynoznavstvo ta SAPR»*. 2018, no. 7 (1283), pp. 132–141.
2. Tkachuk M. M. *Mikromexanichni modeli ta metody`oserednennyya vlasty`vostej materialiv merezhevoyi struktury` ta promizhny`x shariv kontaktuyuchy`x til* [Micromechanical models and methods of averaging the properties of materials of the network structure and intermediate layers of contacting bodies]: dy`s. ... d-ra techn. nauk: 05.03.2/Tkachuk My`kola My`kolajovy`ch. Kharkiv, 2020 470 p.
 3. Treloar L.R.G. *The Physics of Rubber Elasticity*. 3rd edition. Oxford: Clarendon Press, 1975. 322 p.
 4. Lodish H. *Molecular Cell Biology*. Cambridge: W.H. Freeman & Company, 2000. 973 p.
 5. Boal D.H. *Mechanics of the cell*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 406 p.
 6. Holzapfel G.A., Ogden R.W. *Mechanics of biological tissue*. New York: Springer Science & Business Media, 2006. 135 p.
 7. Schmoller K.M., Lieleg O., Bausch A.R. Internal stress in kinetically trapped actin bundle networks. *Soft Matter*, 2008, no. 4(12), pp. 2365–2367.
 8. Schmoller K. M., Fernandez P., Arevalo R. C., Blair D. L., Bausch A. R. Cyclic hardening in bundled actin networks. *Nature communications*, 2010, no. 1, P. 134.
 9. Lang N. R., Münster S., Metzner C., Krauss P., Schürmann S., Lange J., Fabry, B. Estimating the 3D pore size distribution of biopolymer networks from directionally biased data. *Biophysical journal*, 2013, no. 105(9), pp. 1967–1975.
 10. Picu R.C. Mechanics of random fiber networks-a review. *Soft Matter*, 2011, no. 7, pp. 6768–6785.
 11. Gibson L.J., M.F. Ashby, B.A. Harley. *Cellular Materials in Nature and Medicine*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 309 p.
 12. Pai C. L., Boyce M. C., Rutledge G. C. On the importance of fiber curvature to the elastic moduli of electrospun nonwoven fiber meshes. *Polymer*, 2011, no. 52(26), pp. 6126–6133.
 13. Yu B., Zhao X., Zeng Y., Qi D. The influence of process parameters on needle punched nonwovens investigated using image analysis. *RSC Advances*, 2017, no. 7(9), pp. 5183–5188.
 14. Martínez-Hergueta F., Ridruejo A., González C., LLorca J. Deformation and energy dissipation mechanisms of needle-punched nonwoven fabrics: A multiscale experimental analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, no. 64, pp. 120–131.
 15. Haverhals L.M., Reichert W.M., De Long H.C., Trulove P.C. Natural fiber welding. *Macromolecular Materials and Engineering*, 2010. Vol. 295(5). P. 425–430.
 16. Li H., Zhu C., Xue J., Ke Q., Xia Y. Enhancing the Mechanical Properties of Electrospun Nanofiber Mats through Controllable Welding at the Cross Points. *Macromolecular Rapid Communications*, 2017, vol. 38(9).
 17. Martínez-Hergueta F., Ridruej A., González C., LLorca J. Numerical simulation of the ballistic response of needle-punched nonwoven fabrics. *International Journal of Solids and Structures*, 2017, vol. 106, pp. 56–67.
 18. Martínez-Hergueta F., Ridruejo A., González C., LLorca J. Ballistic performance of hybrid nonwoven/woven polyethylene fabric shields. *International Journal of Impact Engineering*, 2018, vol. 111, pp. 55–65.
 19. Ethiraj G., Miehe C. Multiplicative magneto-elasticity of magnetosensitive polymers incorporating micromechanically-based network kernels. *International Journal of Engineering Science*. 2016, vol. 102, pp. 93–119.
 20. Horoshun, L. P., Nazarenko, L. V. Nelinejnye deformativnye svoystva kompozitnyh materialov s transversal'no-izotropnyimi komponentami [Nonlinear deformation properties of composite materials with transversely isotropic components]. *Prikladnaya mehanika*, 2014, vol. 50, no. 3, pp. 31–41.
 21. Ugrimov, S. V. Raschet trehslojnyh plastin s kompozitnymi obshivkami [Calculation of three-layer plates with composite skin]. *Voprosy proektirovaniya i proizvodstva konstrukcij letatel'nyh apparatov*, 2014, no. 3, pp. 47–56.
 22. Mykhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Effective elastic properties of 3D composites with short curvilinear fibers: numerical simulation and experimental validation. *Solid State Phenomena*, 2017, vol. 258, pp. 452–455.
 23. Winkler R. Deformation of semiflexible chains. *Journal of Chemical Physics*. 2003, vol. 118, pp. 2919–2928.

Bibliography (transliterated)

1. Tkachuk M. M. Bazovy pidhody` pry` doslidzhenni reakciyi volokonny`x materialiv na zovnishnye navantazhennya [Basic

24. Huisman E., Storm C., Barkema G. Monte Carlo study of multiply crosslinked semiflexible polymer networks. *Physical Review E Staff*, 2008, vol. 78, pp. 051801(11).
25. Blundell J., E. Terentjev The influence of disorder on deformations in semiflexible networks. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 2011, vol. 467, pp. 2330–2349.
26. Cox H.L. The elasticity and strength of paper and other fibrous materials. *British journal of applied physics*, 1952, Vol. 3(3), 72 p.
27. Storm C., Pastore J.J., MacKintosh F.C., Lubensky T.C., Janmey P.A. Nonlinear elasticity in biological gels. *Nature*, 2005, vol. 435(7039), pp. 191–194.
28. Blundell J., E. Terentjev Affine model of stress stiffening in semiflexible filament networks. *ArXiv*, 2008, vol. 0808.4088, pp. 1–11.
29. Arruda E.M., Boyce M.C. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1993, vol. 41, pp. 389–412.
30. Head D., Levine A., MacKintosh F. Deformation of cross-linked semiflexible polymer networks. *Physical Review Letters*, 2003, vol. 91, pp. 108102(4).
31. Miehe C., Göktepe S., Lulei F. A micro-macro approach to rubber-like materials – Part I: the non-affine micro-sphere model of rubber elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2004, vol. 52, pp. 2617–2660.
32. Bázant Z. P., Oh B.H. Efficient numerical integration on the surface of a sphere. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1986, no 1. 66, pp. 37–49.
33. Ehret A.E., Itskov M., Schmid H. Numerical integration on the sphere and its effect on the material symmetry of constitutive equations: a comparative study. *International journal for numerical methods in engineering*, 2010, vol. 81(2), pp. 189–206.
34. Verron Erwan. Questioning numerical integration methods for microsphere (and microplane) constitutive equations. *Mechanics of Materials*, 2015, vol. 89, pp. 216–228.
35. Miehe C., Joel Méndez Diez, Göktepe S., Lisa-Marie Schänzel Coupled thermoviscoplasticity of glassy polymers in the logarithmic strain space based on the free volume theory. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, vol. 48(13), pp. 1799–1817.
36. Govindjee, S., Zoller, M. J., Hackl, K. A fully-relaxed variationally-consistent framework for inelastic micro-sphere models: Finite viscoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2019, vol. 127, pp. 1–19.
37. Menzel A., Waffenschmidt T. A microsphere-based remodelling formulation for anisotropic biological tissues. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2009, vol. 367(1902), pp. 3499–3523.
38. Holzapfel G.A., M. J. Unterberger, R. W. Ogden An affine continuum mechanical model for cross-linked F-actin networks with compliant linker proteins. *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials*, 2014, vol. 38, pp. 78–90.
39. Van Oosterwyck H., José F. Rodríguez, M. Doblaré, José M. García Aznar An affine micro-sphere-based constitutive model, accounting for junctional sliding, can capture F-actin network mechanics. *Computer methods in biomechanics and biomedical engineering*, 2013, Vol. 16(9), pp. 1002–1012.
40. Guilie Joachim, Thien-Nga Le, Patrick Le Tallec. Micro-sphere model for strain-induced crystallisation and three-dimensional applications. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2015, vol. 81, pp. 58–74.
41. Rastak R., Linder C. A non-affine micro-macro approach to strain-crystallizing rubber-like materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2018, vol. 111, pp. 67–99.
42. Thylander S., A. Menzel, M. Ristinmaa A non-affine electroviscoelastic microsphere model for dielectric elastomers: Application to VHB 4910 based actuators. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2016, p. 1045389X16651157.
43. Behnke, R., Berger, T., Kaliske, M. (2018). Numerical modeling of time- and temperature-dependent strain-induced crystallization in rubber. *International Journal of Solids and Structures*, no. 141, pp. 15–34.
44. Gros, A., Huneau, B., Verron, E., Tosaka, M. A physically-based model for strain-induced crystallization in natural rubber. Part I: Life cycle of a crystallite. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2019, no. 125, pp. 164–177.
45. Rey T., G. Chagnon, D. Favier, J.-B. Le Cam Hyperelasticity with rate-independent microsphere hysteresis model for rubberlike materials. *Computational Materials Science*, 2014, vol. 90, pp. 89–98.
46. Bergström J.S., Boyce M.C. Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1998, vol. 46(5), pp. 931–954.
47. Sáez P., Alastrué V., Peña E., Doblaré M., Martínez M.A. Anisotropic microsphere-based approach to damage in soft fibered tissue. *Biomechanics and modeling in mechanobiology*, 2012, vol. 11(5), pp. 595–608.
48. Martínez-Hergueta F., Ridruejo A., González C., LLorca J. Ballistic performance of hybrid nonwoven/woven polyethylene fabric shields. *International Journal of Impact Engineering*, 2018, vol. 111, pp. 55–65.
49. Negi V., Picu C. Mechanical behavior of nonwoven non-crosslinked fibrous mats with adhesion and friction. *Soft Matter*, 2019, vol. 15, Iss. 29, 5951–5964
50. Deoekar, S., Yan, Z., Picu, R. C. Random Fiber Networks With Superior Properties Through Network Topology Control. *Journal of Applied Mechanics*, 2019, 86(8), 081010.
51. Deoekar, S., Picu, R. C. On the strength of random fiber networks. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2018, 116, 1–16.
52. Chen, N., Silberstein, M. N. A micromechanics-based damage model for non-woven fiber networks. *International Journal of Solids and Structures*, 2019, 160, 18–31.
53. Chen, N. *Experimental and computational study of non-woven damage mechanics* (Doctoral dissertation, Cornell University). 2018.
54. Diani, J., Le Tallec, P. A fully equilibrated microsphere model with damage for rubberlike materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2019, 124, 702–713.
55. Bosco, E., Peerlings, R. H. J., Geers, M. G. D. Scale effects in the hygro-thermo-mechanical response of fibrous networks. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 71, 2018, 113–121.
56. Berkache, K., Deoekar, S., Goda, I., Picu, R. C., Ganghoffer, J. F. Identification of equivalent couple-stress continuum models for planar random fibrous media. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2019, 31(4), 1035–1050.
57. Dirrenberger, J., Forest, S., Jeulin, D. Computational Homogenization of Architected Materials. *In Architected Materials in Nature and Engineering*. Springer, Cham, 2019, pp. 89–139.
58. Chen G., R. Rastak, Y. Wang, H. Yan, V. Feig, Y. Liu, Y. Jiang, Sh. Chen, F. Lian, F. Molina-Lopez, L. Jin, K. Cui, J. W. Chung, E. Pop, C. Linder, Z. Bao, Strain- and Strain-Rate-Invariant Conductance in a Stretchable and Compressible 3D Conducting Polymer Foam. *Matter*, 2019, vol. 1, iss. 1, pp 205–218.
59. Linder C., Miehe C., Tkachuk M. A micromechanically motivated diffusion-based transient network model and its incorporation into finite rubber viscoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2011, vol. 59, iss. 10, pp. 2134–2156.
60. Tkachuk M., Linder C. The maximal advance path constraint for the homogenization of materials with random network microstructure. *Philosophical Magazine*, 2012, vol. 92, pp. 779–2808.
61. Tkachuk M.M. Bazovi pidxody` pry` doslidzhenni reakciyi volokonny`x materialiv na zovnishnye navantazhennya [Basic approaches in the study of the reaction of fibrous materials to external loads]. *Visnyk Nacional`nogo texnichnogo universy`tetu «Kharkivs`kyj politexnichnyj insty`tut»*. Seriya: *Mashy`noznavstvo ta SAPR*. Zb. nauk. pracz`. Kharkiv, NTU «KhPI», 2018, no. 7 (1283), pp. 132–141.
62. Tkachuk N.N. Analiz reakcii volokonnyh materialov na dejstvие nagrauzok na osnovе mikromechanicheskikh modelej [Analysis of the response of fiber materials to loads based on micromechanical models]. *Visnyk Nacional`nogo texnichnogo universy`tetu «Kharkivs`kyj politexnichnyj insty`tut»*. Seriya: *Mashy`noznavstvo ta SAPR*. Zb. nauk. pracz`. Kharkiv, NTU «KhPI», 2018, no 25 (1301), pp. 149–155.
63. Tkachuk N.N. Metod pruzhnoyi gomogenizaciyi bimodal`ny`x merezh [Method of elastic homogenization of bimodal networks]. *Visnyk Nacional`nogo texnichnogo*

- universy`tetu «Kharkivs`kyj` politexnichnyj` insty`tut». Seriya: Mashy`nozhnavstvo ta SAPR. Zb. nauk. pracz`. Kharkiv, NTU «KhPI», 2019, no. 7 (1332), pp. 107–113.
64. Picu, C. R. Constitutive models for random fiber network materials: a review of current status and challenges. *Mechanics Research Communications*, 2020, 103605.
 65. Islam, M. R., & Picu, R. C. Effect of network architecture on the mechanical behavior of random fiber networks. *Journal of Applied Mechanics*, 2018, 85(8).
 66. Negi, V., & Picu, R. C. Mechanical behavior of cross-linked random fiber networks with inter-fiber adhesion. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2019, 122, 418–434.
 67. Deoekar, S., Islam, M. R., & Picu, R. C. Parameters controlling the strength of stochastic fibrous materials. *International journal of solids and structures*, 2019, 168, 194–202.
 68. Deoekar, S., & Picu, R. C. Strength of stochastic fibrous materials under multiaxial loading. *Soft Matter*, 2021, 17(3), 704–714.
 69. Merson, J., & Picu, R. C. Size effects in random fiber networks controlled by the use of generalized boundary conditions. *International Journal of Solids and Structures*, 2020, 206, 314–321.
 70. Berkache, K., Deoekar, S., Goda, I., Picu, R. C., & Ganghoffer, J. F. Homogenized elastic response of random fiber networks based on strain gradient continuum models. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2019, 24(12), 3880–3896.
 71. Tyznik, S., & Notbohm, J. Length scale dependent elasticity in random three-dimensional fiber networks. *Mechanics of Materials*, 2019, 138, 103155.
 72. Lakhali, L., Brunet, Y., & Kanit, T. Numerical bounds for elastic properties of unidirectional non-overlapping fiber reinforced materials. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2020, 80, 103926.
 73. Reda, H., Berkache, K., Ganghoffer, J. F., & Lakiss, H. Dynamical properties of random fibrous networks based on generalized continuum mechanics. *Waves in Random and Complex Media*, 2020, 30(1), 27–53.
 74. Karakoç, A., Paltakari, J., & Taciroglu, E. On the computational homogenization of three-dimensional fibrous materials. *Composite Structures*, 2020, 242, 112151.
 75. Zhang, M., Lu, W., Gouma, P. I., Xu, Z., & Wang, L. Theoretical prediction of effective stiffness of nonwoven fibrous networks with straight and curved nanofibers. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2021, 143, 106311.
 76. Zhang, M., Chen, Y., Chiang, F. P., Gouma, P. I., & Wang, L. Modeling the large deformation and microstructure evolution of nonwoven polymer fiber networks. *Journal of Applied Mechanics*, 2019, 86(1), 011010.
 77. Pan, F., Zhang, F., Chen, Y., Liu, Z., Zheng, X., & Liu, B. In-plane and out-of-plane stiffness of 2D random fiber networks: Micromechanics and non-classical stiffness relation. *Extreme Mechanics Letters*, 2020, 36, 100658.
 78. Shi, L., Long, K., Zhong, Y., Luo, G., Ma, X., Li, M., ... & Yu, J. Compressive and shear performance of three-dimensional rigid stochastic fibrous networks: Experiment, finite element simulation, and factor analysis. *Journal of the European Ceramic Society*, 2020, 40(1), 115–126.
 79. Farukh, F., Demirci, E., Ali, H., Acar, M., Pourdeyhimi, B., & Silberschmidt, V. V. Nonwovens modelling: a review of finite-element strategies. *The Journal of The Textile Institute*, 2016, 107(2), 225–232.
 80. Bosco, E., Peerlings, R. H. J., & Geers, M. G. D. Asymptotic homogenization of hygro-thermo-mechanical properties of fibrous networks. *International Journal of Solids and Structures*, 2017, 115, 180–189.
 81. Domaschke, S., Morel, A., Fortunato, G., & Ehret, A. E. Random auxetics from buckling fibre networks. *Nature communications*, 2019, 10(1), 1–8.
 82. Domaschke, S., Zündel, M., Mazza, E., & Ehret, A. E. A 3D computational model of electrospun networks and its application to inform a reduced modelling approach. *International Journal of Solids and Structures*, 2019, 158, 76–89.
 83. Zündel, M., Mazza, E., & Ehret, A. E. A 2.5 D approach to the mechanics of electrospun fibre mats. *Soft Matter*, 2017, 13(37), 6407–6421.
 84. Gazzo, S., Cuomo, M., Boutin, C., & Contrafatto, L. Directional properties of fibre network materials evaluated by means of discrete homogenization. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2020, 82, 104009.
 85. Martínez-Hergueta, F., Pellegrino, A., Ridruejo, Á., Petrinic, N., González, C., & Llorca, J. Dynamic Tensile Testing of Needle-Punched Nonwoven Fabrics. *Applied Sciences*, 2020, 10(15), 5081.
 86. Reddy, P. R. S., Reddy, T. S., Srikanth, I., Kushwaha, J., & Madhu, V. Development of cost effective personnel armour through structural hybridization. *Defence Technology*, 2020, 16(6), 1089–1097.
 87. Mawkhlieng, U., Majumdar, A., & Laha, A. A review of fibrous materials for soft body armour applications. *RSC Advances*, 2020, 10(2), 1066–1086.
 88. Yin, Y., & Xiong, J. Finite element analysis of electrospun nanofibrous mats under biaxial tension. *Nanomaterials*, 2018, 8(5), 348.
 89. Domaschke, S., Morel, A., Kaufmann, R., Hofmann, J., Rossi, R. M., Mazza, E., ... & Ehret, A. E. Predicting the macroscopic response of electrospun membranes based on microstructure and single fibre properties. *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials*, 2020, 104, 103634.
 90. Tojaga, V., Kulachenko, A., Östlund, S., & Gasser, T. C. Modeling multi-fracturing fibers in fiber networks using elastoplastic Timoshenko beam finite elements with embedded strong discontinuities—Formulation and staggered algorithm. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2021, 384, 113964.
 91. Kouko, J., Turpeinen, T., Kulachenko, A., Hirn, U., & Retulainen, E. Understanding extensibility of paper: Role of fiber elongation and fiber bonding. *Tappi J*, 2020, 19, 125–135.
 92. Brandberg, A., & Kulachenko, A. Compression failure in dense non-woven fiber networks. *Cellulose*, 2020, 27(10), 6065–6082.
 93. Zhang, Y., Lu, Z., Yang, Z., & Zhang, D. Fracture behavior of fibrous network materials: Crack insensitivity and toughening mechanism. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, 188, 105910.
 94. Čarija, J., Nikolić, M., Ibrahimbegovic, A., & Nikolić, Ž. Discrete softening-damage model for fracture process representation with embedded strong discontinuities. *Engineering Fracture Mechanics*, 2020, 236, 107211.
 95. Sozumert, E., Demirci, E., & Silberschmidt, V. V. Experimental and numerical methods to analyse deformation and damage in random fibrous networks. In *Plasticity, Damage and Fracture in Advanced Materials* Springer, Cham. 2020, pp. 151–174.
 96. Sozumert, E., Farukh, F., Sabuncuoglu, B., Demirci, E., Acar, M., Pourdeyhimi, B., & Silberschmidt, V. V. Deformation and damage of random fibrous networks. *International Journal of Solids and Structures*, 2020, 184, 233–247.
 97. Chen, Y., & Siegmund, T. The Effect of Notches on the Failure of Two-Dimensional Nonwoven Fiber Networks. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 2021, 143(2), 021001.
 98. Harmening, M., Marheineke, N., & Wegener, R. Efficient graph based tensile strength simulations of random fiber structures. *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2020, e202000287.
 99. Li, T. T., Wang, Z., Ren, H. T., Peng, H. K., Zhang, X., Jiang, Q., ... & Lin, J. H. Recyclable and degradable nonwoven-based double-network composite hydrogel adsorbent for efficient removal of Pb (II) and Ni (II) from aqueous solution. *Science of The Total Environment*, 2021, 758, 143640.
 100. Schill, W., Abbott, L. J., & Haskins, J. B. A multiscale cohesive law for carbon fiber networks. *Carbon*, 2021, 171, 376–384.
 101. Picu, C. R. Constitutive models for random fiber network materials: a review of current status and challenges. *Mechanics Research Communications*. 2020. 103605.
 102. Islam M. R. & Picu R. C. Effect of network architecture on the mechanical behavior of random fiber networks. *Journal of Applied Mechanics*. 2018. 85(8).
 103. Deoekar S., Islam M. R., & Picu R. C. Parameters controlling the strength of stochastic fibrous materials. *International journal of solids and structures*. 2019. 168. P. 194–202.

104. Negi V., & Picu R. C. Mechanical behavior of cross-linked random fiber networks with inter-fiber adhesion. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2019. Vol. 122. P. 418–434.
105. Deoekar S., & Picu R. C. Strength of stochastic fibrous materials under multiaxial loading. *Soft Matter*. 2021. 17(3). P. 704–714.
106. Merson J., & Picu R. C. Size effects in random fiber networks controlled by the use of generalized boundary conditions. *International Journal of Solids and Structures*. 2020. 206. P. 314–321.
107. Berkache K., Deoekar S., Goda I., Picu R. C. & Ganghoffer J. F. Homogenized elastic response of random fiber networks based on strain gradient continuum models. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2019. 24(12). P. 3880–3896.
108. Tyznik S. & Notbohm J. Length scale dependent elasticity in random three-dimensional fiber networks. *Mechanics of Materials*. 2019. 138. P. 103155.
109. Lakhal L., Brunet Y., & Kanit T. Numerical bounds for elastic properties of unidirectional non-overlapping fiber reinforced materials. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2020. 80. P. 103926.
110. Reda H., Berkache K., Ganghoffer J. F. & Lakiss H. Dynamical properties of random fibrous networks based on generalized continuum mechanics. *Waves in Random and Complex Media*. 2020. 30(1). P. 27–53.
111. Karakoç A., Paltakari J. & Tacioglu E. 2020. On the computational homogenization of three-dimensional fibrous materials. *Composite Structures*. 242. P. 112151.
112. Zhang M., Lu W., Gouma P. I., Xu Z. & Wang L. Theoretical prediction of effective stiffness of nonwoven fibrous networks with straight and curved nanofibers. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2021. 143. P. 106311.
113. Zhang M., Chen Y., Chiang F. P., Gouma P. I., & Wang L. Modeling the large deformation and microstructure evolution of nonwoven polymer fiber networks. *Journal of Applied Mechanics*. 2019. 86(1). P. 011010.
114. Pan F., Zhang F., Chen Y., Liu Z., Zheng X., & Liu B. In-plane and out-of-plane stiffness of 2D random fiber networks: Micromechanics and non-classical stiffness relation. *Extreme Mechanics Letters*. 2020. 36. P. 100658.
115. Shi L., Long K., Zhong Y., Luo G., Ma X., Li M., ... & Yu J. Compressive and shear performance of three-dimensional rigid stochastic fibrous networks: Experiment, finite element simulation, and factor analysis. *Journal of the European Ceramic Society*. 2020. 40(1). P. 115–126.
116. Farukh F., Demirci E., Ali H., Acar M., Pourdeyhimi B., & Silberschmidt V. V. Nonwovens modelling: a review of finite-element strategies. *The Journal of The Textile Institute*. 2016. 107(2). P. 225–232.
117. Bosco E., Peerlings R. H. J. & Geers M. G. D. Asymptotic homogenization of hygro-thermo-mechanical properties of fibrous networks. *International Journal of Solids and Structures*. 2017. 115. P. 180–189.
118. Domaschke S., Morel A., Fortunato G., & Ehret A. E. Random auxetics from buckling fibre networks. *Nature communications*. 2019. 10(1) P. 1–8.
119. Domaschke S., Zündel M., Mazza E. & Ehret A. E. A 3D computational model of electrospun networks and its application to inform a reduced modelling approach. *International Journal of Solids and Structures*. 2019. 158. P. 76–89.
120. Zündel M., Mazza E., & Ehret A. E. A 2.5 D approach to the mechanics of electrospun fibre mats. *Soft Matter*. 2017. 13(37). P. 6407–6421.
121. Gazzo S., Cuomo M., Boutin C. & Contrafatto L. Directional properties of fibre network materials evaluated by means of discrete homogenization. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2020. 82. P. 104009.
122. Martínez-Hergueta F., Pellegrino A., Ridruejo Á., Petrinic N., González C. & LLorca J. Dynamic Tensile Testing of Needle-Punched Nonwoven Fabrics. *Applied Sciences*. 2020. 10(15). P. 5081.
123. Reddy P. R. S., Reddy T. S., Srikanth I., Kushwaha J., & Madhu V. Development of cost effective personnel armour through structural hybridization. *Defence Technology*. 2020. 16(6). P. 1089–1097.
124. Mawkhlieng U., Majumdar A. & Laha A. A review of fibrous materials for soft body armour applications. *RSC Advances*. 2020, no. 10(2), pp. 1066–1086.
125. Yin Y., & Xiong J. Finite element analysis of electrospun nanofibrous mats under biaxial tension. *Nanomaterials*. 2018. no. 8(5), pp. 348.
126. Domaschke S., Morel A., Kaufmann R., Hofmann J., Rossi R. M., Mazza E., ... & Ehret A. E. Predicting the macroscopic response of electrospun membranes based on microstructure and single fibre properties. *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials*. 2020. 104. P. 103634.
127. Tojaga V., Kulachenko A., Östlund S. & Gasser T. C. Modeling multi-fracturing fibers in fiber networks using elastoplastic Timoshenko beam finite elements with embedded strong discontinuities –Formulation and staggered algorithm. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2021. 384. P. 113964.
128. Kouko J., Turpeinen T., Kulachenko A., Hirn U., & Retulainen E. Understanding extensibility of paper: Role of fiber elongation and fiber bonding. *Tappi J*. 2020. 19. P. 125–135.
129. Brandberg A. & Kulachenko A. Compression failure in dense non-woven fiber networks. *Cellulose*. 2020. 27(10). P. 6065–6082.
130. Zhang Y., Lu Z., Yang Z. & Zhang D. Fracture behavior of fibrous network materials: Crack insensitivity and toughening mechanism. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2020. 188. P. 105910.
131. Čarija J., Nikolić M., Ibrahimbegovic A. & Nikolić Ž. Discrete softening-damage model for fracture process representation with embedded strong discontinuities. *Engineering Fracture Mechanics*. 2020. 236. P. 107211.
132. Sozumert E., Demirci E. & Silberschmidt V. V. Experimental and numerical methods to analyse deformation and damage in random fibrous networks. In *Plasticity, Damage and Fracture in Advanced Materials*. Springer, Cham. 2020. Pp. 151–174.
133. Sozumert E., Farukh F., Sabuncuoglu B., Demirci E., Acar M., Pourdeyhimi B. & Silberschmidt V. V. Deformation and damage of random fibrous networks. *International Journal of Solids and Structures*. 2020. 184. P. 233–247.
134. Chen Y. & Siegmund T. The Effect of Notches on the Failure of Two-Dimensional Nonwoven Fiber Networks. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 2021. 143(2). P. 021001.
135. Harmening M., Marheineke N., & Wegener R. Efficient graph based tensile strength simulations of random fiber structures. *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2020. e202000287.
136. Li T. T., Wang Z., Ren H. T., Peng H. K., Zhang X., Jiang Q., ... & Lin J. H. Recyclable and degradable nonwoven-based double-network composite hydrogel adsorbent for efficient removal of Pb (II) and Ni (II) from aqueous solution. *Science of The Total Environment*. 2021. Vol. 758. P. 143640.
137. Schill W., Abbott L. J. & Haskins J. B. A multiscale cohesive law for carbon fiber networks. *Carbon*. 2021. 171. P. 376–384.
138. Joe J., Thouless M. D., Barber J. R. Effect of roughness on the adhesive tractions between contacting bodies. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2018. 118. P. 365–373.
139. Miehe C. A constitutive frame of elastoplasticity at large strains based on the notion of a plastic metric. *International Journal of Solids and Structures*. 1998, vol. 35, pp. 3859–3897.
140. Ethiraj G., C. Miehe Multiplicative magneto-elasticity of magnetosensitive polymers incorporating micromechanically-based network kernels. *International Journal of Engineering Science*. 2016, vol. 102, pp. 93–119.
141. Гребенюк С. М., Гребенюк С. Н. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів (Doctoral dissertation, Запорізький національний технічний університет). 2016.
142. Strömberg N., Klarbring A. Topology optimization of structures in unilateral contact. *Structural and multidisciplinary optimization*. 2010, vol. 41(1), pp. 57–64.
143. Wu P.D., E. van der Giessen On improved network models for rubber elasticity and their applications to orientation hardening in glassy polymers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1993, vol. 41(3), pp. 427–456.
144. Alastrué V., Sáez P., Martínez M.A., Doblaré M. On the use of the Bingham statistical distribution in microsphere-based constitutive models for arterial tissue. *Mechanics Research*

- Communications*. 2010, vol. 37(8), pp. 700–706.
145. Glatting G., Winkler R. G., Reineker P. Analytical model for the microscopic nonaffine deformation of polymer networks. *Journal of Chemical Physics*. 1994, vol. 101(3), pp. 2532–2538.
 146. Flory P.J. *Statistical mechanics of chain molecules*. Munich: Hanser Publishers, 1988.
 147. Coleman B.D., Noll W. Foundations of Linear Viscoelasticity. *Reviews of Modern Physics*. 1961, vol. 33, pp. 239–249.
 148. Doi M., Edwards S.F. *The Theory of Polymer Dynamics*. Oxford: Clarendon Press, 1986.
 149. Otto M., Eckert J., Vilgis T. Persistence lengths of semiflexible chains – methods and approximations. *Macromolecular Theory and Simulations*. 1994. Vol. 3. P. 543–555.
 150. Janmey P.A., McCormick M.E., Rammensee S., Leight J.L., Georges P.C., MacKintosh F.C. Negative normal stress in semiflexible biopolymer gels. *Nature Materials*. 2007. Vol. 6(1). P. 48–51.
 151. Kanno, Y. (2011). Nonsmooth Mechanics and Convex Optimization. CRC Press. 445 p.
 152. Kanno, Y., & Ohsaki, M. (2006). Contact analysis of cable networks by using second-order cone programming. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(6), 2032–2052.
 153. Kanno, Y., Ohsaki, M., Ito, J. Large-deformation and friction analysis of non-linear elastic cable networks by second-order cone programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 55(9), 1079–1114.
 154. Kanno, Y., & Ohsaki, M. (2003). Minimum principle of complementary energy of cable networks by using second-order cone programming. *International Journal of Solids and Structures*, 40(17), 4437–4460.
 155. Kanno, Y., & Ohsaki, M. (2005). Minimum principle of complementary energy for nonlinear elastic cable networks with geometrical nonlinearities. *Journal of optimization theory and applications*, 126(3), 617–641.

Надійшла до редакції 12.10.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ткачук Микола Миколайович (Ткачук Николай Николаевич, Tkachuk Mykola) – доктор технічних наук, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», старший науковий співробітник кафедри «Інформаційні технології і системи колісних та гусеничних машин ім. О. О. Морозова», м. Харків, Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4753-4267>, тел.: (057)7076902, e-mail: m.tkachuk@tmm-sapr.org.