

**В. А. МАТУСЕВИЧ, Ю. В. ШАРАБАН, А. В. ШЕХОВ**

### **МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ МАССЫ ЗАМКНУТОГО ПЛАНЕТАРНОГО МЕХАНИЗМА, ОБРАЗОВАННОГО ДВУМЯ ПРОСТЫМИ ПЛАНЕТАРНЫМИ МЕХАНИЗМАМИ ДЖЕЙМСА**

Предложена математическая модель оценки проектировочной массы замкнутого планетарного механизма, образованного из двух простых планетарных механизмов Джеймса (механизм типа  $\overline{AI}$ ), учитывающая их структурные схемы и конструктивные ограничения, определяемые условиями контактной и изгибной прочностей внешних зубчатых зацеплений солнечных колес и спутников. Модель представляет собой безразмерную функцию (аналог массы) двух переменных – передаточных отношений простых планетарных механизмов, и набора числовых параметров. В качестве параметров аналога массы выбраны коэффициенты, характеризующие модели массы зубчатых колес и водил, конструктивные и прочностные ограничения внешних зубчатых зацеплений простых планетарных механизмов типа  $\overline{AI}$ , а также структуру этих механизмов. В программе Mathcad исследованы дифференциальные свойства предложенной модели и влияние на положение минимума аналога массы в зависимости от числовых значений его параметров. Приведены документы программы Mathcad, реализующие компьютерное моделирование алгоритмов параметрической оптимизации массы замкнутого планетарного механизма, где в качестве целевой функции использована функция аналога массы данного механизма. Рассмотрен сравнительный анализ минимизации проектной массы двух кинематических схем планетарных механизмов – замкнутого планетарного механизма и рядно-планетарного типа  $2 \times \overline{AI}$ .

**Ключевые слова:** простой планетарный механизм Джеймса, простой планетарный механизм типа  $\overline{AI}$ ; замкнутый планетарный механизм; рядно-планетарный механизм; масса планетарного механизма; контактная прочность зубчатого зацепления; изгибная прочность зубчатого зацепления; параметрическая оптимизация; параметрическая оптимизация массы планетарного механизма

**В. А. МАТУСЕВИЧ, Ю. В. ШАРАБАН, О. В. ШЕХОВ**

### **МОДЕЛЮВАННЯ І АНАЛІЗ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ МАСИ ЗАМКНУТОГО ПЛАНЕТАРНОГО МЕХАНІЗМУ, УТВОРЕНОГО ДВОМА ПРОСТИМИ ПЛАНЕТАРНИМИ МЕХАНІЗМАМИ ДЖЕЙМСА**

Запропоновано математичну модель оцінки проектувальної маси замкнутого планетарного механізму, утвореного із двох простих планетарних механізмів Джеймса (механізму типу  $\overline{AI}$ ), яка враховує їх структурні схеми і конструктивні обмеження, які визначаються умовами контактною та згинальною міцністю зовнішніх зубчастих зачеплень сонячних коліс і супутників. Модель є безрозмірною функцією (аналог маси) двох змінних – передаточних відношень простих планетарних механізмів, і набору числових параметрів. Як параметри аналога маси обрані коефіцієнти, що характеризують моделі маси зубчастих коліс та водил, конструктивні і міцнісні обмеження зовнішніх зубчастих зачеплень простих планетарних механізмів типу  $\overline{AI}$ , а також структуру цих механізмів. У програмі Mathcad досліджені диференціальні властивості запропонованої моделі та вплив на положення мінімуму аналога маси в залежності від числових значень його параметрів. Наведено документи програми Mathcad, що реалізують комп'ютерне моделювання алгоритмів параметричної оптимізації маси замкнутого планетарного механізму, де в якості цільової функції використана функція аналога маси даного механізму. Розглянуто порівняльний аналіз мінімізації проектною маси двох кінематичних схем планетарних механізмів – замкнутого планетарного механізму і рядно-планетарного типу  $2 \times \overline{AI}$ .

**Ключові слова:** простий планетарний механізм Джеймса, простий планетарний механізму типу  $\overline{AI}$ ; замкнутый планетарний механізм; рядно-планетарний механізм; маса планетарного механізму; контактна міцність зубчастого зачеплення; згинальна міцність зубчастого зачеплення; параметрична оптимізація; параметрична оптимізація маси планетарного механізму

**V. MATUSEVICH, Ju. SHARABAN, A. SHEHOV**

### **MODELING AND ANALYSIS OF PARAMETRIC OPTIMIZATION OF THE MASS OF A CLOSED PLANETARY MECHANISM FORMED BY TWO SIMPLE PLANETARY MECHANISMS OF JAMES**

The mathematical model of estimation of a design mass of the closed planetary mechanism formed from two simple planetary mechanisms of James (mechanism of type  $\overline{AI}$ ), taking into account their structural diagrams and design constraints, determined by the conditions of contact and bending strengths of external gearing of sun gears and satellites, is offered. A model is a dimensionless function (analogue of mass) of two variables – transmission relations of simple planetary mechanisms, and set of numerical parameters. As parameters of analogue of mass coefficients are chosen, characterizing the models of mass of gear wheels and carriers, structural and strength limitations of the external gearing of simple planetary mechanisms of the type  $\overline{AI}$ , and also structure of these mechanisms. In the program Mathcad differential properties of the offered model and influence on position of minimum of analogue of mass are investigational depending on the numerical values of his parameters. Documents of the Mathcad program are presented that implement computer modeling of algorithms for parametric optimization of mass closed planetary mechanism, where the function of the analogue of the mass of the given mechanism is used as the objective function. A comparative analysis of minimizing the design mass of two kinematic schemes of planetary mechanisms is considered – closed planetary mechanism and in-line planetary of the type  $2 \times \overline{AI}$ .

**Keywords:** simple planetary mechanism of James, simple planetary mechanism type  $\overline{AI}$ ; closed planetary mechanism; in-line planetary mechanism; mass of closed planetary mechanism; contact strength of gearing; bending strength of gearing; parametric optimization; parametric optimization of mass of planetary mechanism

**Введение.** Одним из основных направлений в развитии электромеханических приводов различных систем летательных аппаратов является уменьшение их массогабаритных показателей, в частности, изменяемых механических передач.

Стремление улучшить массогабаритные показатели механических передач приводит к применению

различных кинематических схем планетарных передач. Наибольшее применение получили кинематические схемы планетарных передач на базе простого планетарного механизма типа  $\overline{AI}$  (планетарный механизм Джеймса).

Среди вариантов кинематических схем плане-

© А. В. Матусевич, Ю. В. Шарабан, А. В. Шехов, 2021

тарных передач на базе простого планетарного механизма типа  $\overline{AI}$  чаще используется вариант рядно-планетарных механизмов типа  $n \times \overline{AI}$ , где  $n$  – число ступеней базового планетарного механизма типа  $\overline{AI}$ . Другой вариант кинематических схем – схема замкнутого планетарного механизма (замкнутого дифференциального механизма), образованная на базе двух или более простых планетарных механизмов типа  $\overline{AI}$ . Данный вариант менее распространенный, чем первый. Каждый вариант из вышеперечисленных обладает своими достоинствами и недостатками.

На сегодняшний день для первого варианта имеется достаточный объем теоретических и практических исследований и методик проектирования с учетом различных критериев. Для второго варианта этого сказать нельзя [1]. С другой стороны, в приводах грузоподъемного оборудования самолетов используются конструкции замкнутых планетарных передач.

Учитывая эти обстоятельства, практическую значимость приобретают вопросы решения различных задач проектирования и определения (оценки) различных технических характеристик механических передач вышеназванных электромеханических приводов, построенных по схеме замкнутого планетарного механизма, образованного на базе простого планетарного механизма типа  $\overline{AI}$ .

*Цель статьи* – разработка и исследование особенностей методики параметрической оптимизации массы замкнутого планетарного механизма, образованного двумя простыми планетарными механизмами типа  $\overline{AI}$  с учетом возможных значений их передаточных отношений.

**Анализ литературы.** Подходы оптимального проектирования различных кинематических схем планетарных механизмов рассмотрены в работе [1]. Моделирование массы и ее параметрическая минимизация приводится для ряда кинематических схем простых планетарных механизмов и для рядно-планетарных механизмов типа  $n \times \overline{AI}$ . Замкнутые планетарные механизмы в этой работе рассмотрены только с позиций их строения (образования) и кинематического анализа. Вопросы минимизации (оптимизации) массы таких механизмов в данной работе не представлены. Теория и вопросы проектирования замкнутых многоступенчатых передач планетарно-дифференциального типа изложены в работе [2]. В данной работе приводится подход оценки массовой характеристики планетарного ряда (простого планетарного механизма типа  $\overline{AI}$ ). Однако, в работе отсутствует рассмотрение отмеченного подхода для оценки массы многоступенчатых передач планетарно-дифференциального типа.

Исследование свойств модели суммарной массы рядно-планетарных механизмов типа  $n \times \overline{AI}$  выполнено в работе [3]. Параметрическая оптимизация суммарной массы двухпоточного механизма, образованного простыми планетарными механизмами типа  $\overline{AI}$  (планетарные ступени), в котором суммирование двух потоков механической мощности реализовано дифференциальным механизмом типа  $\overline{AI}$ , рассмот-

рена в работе [4]. В работе приводится описание подхода, который позволяет построить математическую модель суммарной массы механизма, в структуре которого имеются рядные ступени, планетарные ступени и дифференциалы (дифференциальные ступени).

Методология минимизации суммарного веса зубчатых передач, в том числе планетарной передачи типа  $\overline{AI}$ , применяемых в авиационной, рассмотрена в работе [5]. При этом суммарный вес зубчатой передачи представляется как безразмерная целевая функция, зависящая от одной независимой переменной – передаточного отношения передачи, и параметра – числа сателлитов. Оптимальное значение передаточного отношения зубчатой передачи минимального веса определяется из решения уравнения, полученного приравниванием к нулю производной соответствующей целевой функции по независимой переменной.

Проектированию облегченных конструкций планетарных передач посвящена работа [6]. В качестве критериев оптимального проектирования принимаются значения трех ее технических характеристик: КПД; объем; суммарная масса. Приводятся математические модели – формулы для определения суммарной массы планетарной передачи (простого планетарного механизма) типов  $\overline{AI}$ ,  $\Pi$  и  $AA$  соответственно. Здесь не исследуются зависимости массы простого планетарного механизма как целевой функции, зависящей от ряда параметров простого планетарного механизма (числа сателлитов, передаточного отношения и др.). В работе приводится сравнительный анализ вышеназванных кинематических схем простого планетарного механизма по значениям массы, объема и КПД, определенных для трех значений передаточного отношения планетарной передачи.

Применение многокритериальной оптимизации для проектирования планетарной коробки передач с двумя степенями свободы, содержащей два простых планетарных механизма типа  $\overline{AI}$ , рассмотрено в работе [7]. Переменными целевых функций (функций проектирования) приняты шесть параметров конструкции планетарной передачи: числа зубьев солнечного колеса, сателлитов и эпицикла; число сателлитов; модуль зубчатых колес; ширина зубчатого венца, принимаемая одинаковой для всех зубчатых колес. В качестве целевых функций выбраны следующие показатели проектируемой планетарной коробки передач: объем; масса; КПД; производственные затраты (себестоимость). Для заданной структурной схемы планетарной коробки передач (в статье представлено 12 схем) с учетом ограничений на возможные значения переменных целевых функций, учитывающие условия сборки, геометрические соотношения и прочности зубчатых зацеплений, решается многокритериальная задача целевого программирования в форме метода весовых коэффициентов. Решение задачи ищется в смысле оптимальности по Парето. Математическая модель массы планетарной ступени применима как для прямозубых, так и для косозубых зубчатых колес. Отметим, что эта модель не учитывает массу водила. В статье не исследуются экстремальные свойства размерных целевых функций массы планетарной ступени и суммарной массы двух плане-

тарных ступеней – планетарной коробки передач.

Параметрическая оптимизация конструкции замкнутой планетарной передачи типа  $2K-H[A]$ , основанная на методе нечеткой оптимизации (Fuzzy Optimization Method), исследована в работе [8]. Математическая модель оптимального проектирования основана на поиске минимального значения главной целевой функции, образованной двумя частными целевыми функциями. Частные целевые функции – функции независимых переменных (переменных проектирования) соответственно объема и КПД выбранной структурной схемы планетарной передачи. Переменными проектирования приняты 12 величин: числа зубьев всех семи зубчатых колес; модуль зубчатых зацеплений дифференциала типа  $AI$ ; модули двух зацеплений кинематической цепи замыкания, образованной простым планетарным механизмом типа  $AA$  или типа  $IA$  с заторможенным водилом; коэффициенты относительной ширины венца зубчатых зацеплений дифференциала (все зубчатые колеса имеют одинаковую ширину) и зубчатых зацеплений кинематической цепи замыкания соответственно. Необходимо отметить, что в целевой функции суммарного объема проектируемой передачи учитываются только объемы эпицикла дифференциала и объемы двух зубчатых зацеплений кинематической цепи замыкания.

Методика оптимального проектирования планетарного редуктора (простого планетарного механизма типа  $AI$ ), основанная на двух методах многокритериальной оптимизации, не требующих определения производных целевых функций, представлена в работе [9]. Авторы работы разработали алгоритм оптимизации, основанный на методе дифференциальной эволюции (Differential Evolution) и методе роя частиц (Particle Swarm). Свой алгоритм авторы назвали адаптивным гибридным алгоритмом многоцелевой оптимизации. Критериями оптимальной конструкции планетарного редуктора были выбраны вес, объем и значение КПД редуктора. Поиск оптимального набора варьируемых параметров (аргументов целевых функций) конструкции планетарного редуктора выполнялся для шести целевых функций. В качестве ограничений на возможные значения параметров проектирования были приняты условия прочности по изгибу и контакту, условия соседства сателлитов и условия сборки планетарного редуктора. Отметим, что для вычисления значения КПД редуктора авторы разработали алгоритм определения крутящего момента на ведомом зубчатом колесе с учетом действия сил трения в зубчатом зацеплении согласно теории эластогидродинамического смазывания. Для вычисления целевой функции объема планетарного редуктора принята математическая модель, в которой учитываются объемы модельных дисков всех зубчатых колес планетарного редуктора. В качестве переменных проектирования были приняты следующие параметры зубчатых колес: числа зубьев, значения коэффициентов смещения зубчатых колес, ширина зубчатого венца и модуль зубчатых зацеплений. Остальные параметры – кинематические, силовые, свойства материалов зубчатых колес задавались как входные

данные проектируемого планетарного редуктора.

В работе [10] рассмотрено применение генетического алгоритма (Genetic Algorithm) оптимизации многокритериальной задачи проектирования планетарной передачи (простого планетарного механизма типа  $AI$ ). Под оптимальной конструкцией планетарной передачи принимается такая, которая имеет наименьшие вес и межосевое расстояние внешнего зубчатого зацепления солнечного колеса и сателлита, а также и наибольшее значение КПД передачи. В качестве целевых функций авторы работы используют три функции: объема; межосевого расстояния; КПД. Аргументами целевых функций были приняты: ширина зубчатого венца, равная для всех зубчатых колес; модуль зубчатых зацеплений; числа зубьев солнечного колеса и сателлита; диаметры валов солнечного колеса и сателлита. В качестве ограничений на возможные значения параметров проектирования были приняты условия прочности по изгибу и контакту, условие соседства сателлитов, условие сборки планетарной передачи, возможный диапазон значений числа зубьев колес, возможный диапазон относительной ширины зубчатого венца и условия выбора диаметров валов для солнечного колеса и сателлитов. Целевая функция суммарного объема планетарной передачи учитывает объемы всех зубчатых колес (модельные объемы). При этом для модели объема эпицикла учитываются объемы валов солнечного колеса и валов сателлитов. Методика оптимизации объема двухступенчатого планетарного механизма, основанная на генетическом алгоритме, реализованная в среде программы Matlab, приведена в работе [11].

**Материалы исследований.** Изложение материалов статьи является продолжением исследований, которые были представлены в работе [12]. Поэтому из этой работы в настоящей статье будут использованы иллюстрации, обозначения переменных и результаты структурного, кинематического и силового анализов замкнутого планетарного механизма.

Кинематическая схема исследуемого замкнутого планетарного механизма показана на рис. 1.

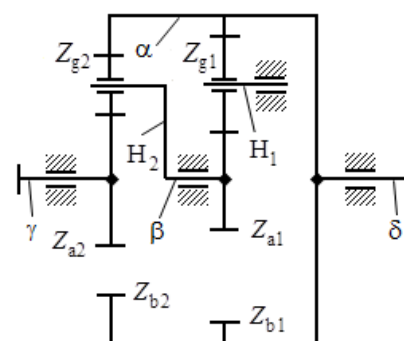


Рисунок 1 – Замкнутый планетарный механизм

На рис. 2 показана схема образования структуры замкнутого планетарного механизма. Утолщенными линиями показаны звенья механизмов, которые соединяются между собой.

Замкнутый планетарный механизм образован из двух одновенцовых простых планетарных механизмов

типа  $\overline{\text{AI}}$ . Первый механизм – дифференциальный, второй – планетарный, в котором заторможено водило  $H_1$ .

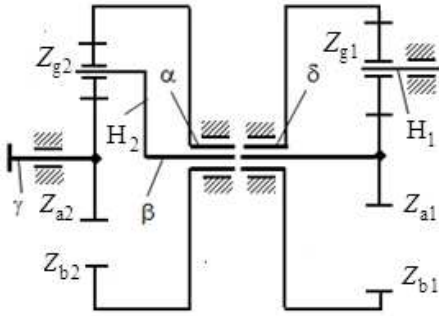


Рисунок 2 – Схема образования замкнутого планетарного механизма

Механизм  $Z_{a1}$ - $Z_{g1}$ - $Z_{b1}$ - $H_1$  является кинематической цепью замыкания (КЦЗ) дифференциального механизма  $Z_{a2}$ - $Z_{g2}$ - $Z_{b2}$ - $H_2$ .

Передаточное отношение исследуемого механизма от вала  $\gamma$  к валу  $\delta$  определяется по формуле

$$U_{\gamma\delta} = 1 - (p_1 + 1)(p_2 + 1), \quad (1)$$

где  $p_1 = \frac{Z_{b1}}{Z_{a1}}$ ,  $p_2 = \frac{Z_{b2}}{Z_{a2}}$  – кинематические параметры КЦЗ и дифференциального механизма.

С учетом допущений, которые приведены в работах [1–4], масса  $M_{\text{DM}}$  дифференциального механизма типа  $\overline{\text{AI}}$  может быть определена по формуле

$$M_{\text{DM}} = M_{a2} + k_2 M_{g2} + M_{b2} + M_{H2}, \quad (2)$$

где  $M_{a2}$ ,  $M_{g2}$ ,  $M_{b2}$  – массы подвижных зубчатых колес соответственно  $Z_{a2}$ ,  $Z_{g2}$  и  $Z_{b2}$ ;

$k_2$  – число сателлитов  $Z_{g2}$ ;

$M_{H2}$  – масса водила  $H_2$ .

Полагаем, что подвижные звенья дифференциального механизма изготовлены из одного и того же материала, характеризуемого удельной плотностью  $\rho_2$ .

Учитывая известные геометрические и кинематические соотношения для планетарного механизма типа  $\overline{\text{AI}}$ , получим запись формулы (1) в виде

$$M_{\text{DM}} = \frac{\pi\rho_2}{4} b_{a2} d_{a2}^2 \left[ 1 + k_2 \frac{b_{g2}}{b_{a2}} \left( \frac{U_{\text{DM}} - 2}{2} \right)^2 + \frac{b_{b2}}{b_{a2}} (U_{\text{DM}} - 1)^2 + n_{H2} \frac{U_{\text{DM}}^2}{4} \right], \quad (3)$$

где  $b_{a2}$ ,  $b_{g2}$ ,  $b_{b2}$  – ширины зубчатых венцов соответственно зубчатых колес  $Z_{a2}$ ,  $Z_{g2}$  и  $Z_{b2}$ ;

$d_{a2}$  – делительный диаметр зубчатого колеса

$Z_{a2}$ ;

$U_{\text{DM}} = 1 + Z_{b2}/Z_{a2} = 1 + p_2$  – передаточное отношение механизма от зубчатого колеса  $Z_{a2}$  к водилу  $H_2$  при неподвижном зубчатом колесе  $Z_{b2}$ ;

$n_{H2}$  – коэффициент приведения массы водила к массе условного диска.

В формуле (3) масса водила  $H_2$  была принята пропорциональной массе диска, диаметр которого равен удвоенному межосевому расстоянию внешнего зубчатого зацепления  $Z_{a2}$ - $Z_{g2}$ , а ширина – ширине  $b_{a2}$  зубчатого колеса  $Z_{a2}$ ; тогда получим

$$M_{H2} = \frac{\pi\rho_2}{4} b_{a2} (d_{a2} + d_{g2}). \quad (4)$$

Для случая, когда ширины зубчатых венцов зубчатых колес дифференциального механизма приняты одинаковыми, формула (3) будет иметь следующий вид

$$M_{\text{DM}} = \frac{\pi\rho_2}{4} b_{a2} d_{a2}^2 \left[ 1 + k_2 \left( \frac{U_{\text{DM}} - 2}{2} \right)^2 + (U_{\text{DM}} - 1)^2 + n_{H2} \frac{U_{\text{DM}}^2}{4} \right], \quad (5)$$

Масса  $M_{\text{КЦЗ}}$  КЦЗ дифференциального механизма, образованной на основе планетарного механизма типа  $\overline{\text{AI}}$ , может быть определена по формуле

$$M_{\text{КЦЗ}} = M_{a1} + k_1 M_{g1} + M_{b1}, \quad (6)$$

где  $M_{a1}$ ,  $M_{g1}$ ,  $M_{b1}$  – массы подвижных зубчатых колес соответственно  $Z_{a1}$ ,  $Z_{g1}$  и  $Z_{b1}$ ;

$k_1$  – число сателлитов  $Z_{g1}$ .

В формуле (6) не учитывается масса заторможенного водила  $H_1$ , так как это неподвижное звено отнесено к стойке замкнутого планетарного механизма (корпусу механизма).

Полагаем, что подвижные звенья КЦЗ изготовлены из одного и того же материала, характеризуемого удельной плотностью  $\rho_1$ .

С учетом замечаний, сделанных при выводе формулы (3), получим формулу для вычисления массы зубчатых колес КЦЗ в виде

$$M_{\text{КЦЗ}} = \frac{\pi\rho_1}{4} b_{a1} d_{a1}^2 \left[ 1 + k_1 \frac{b_{g1}}{b_{a1}} \left( \frac{U_{\text{КЦЗ}} - 2}{2} \right)^2 + \frac{b_{b1}}{b_{a1}} (U_{\text{КЦЗ}} - 1)^2 \right], \quad (7)$$

где  $b_{a1}$ ,  $b_{g1}$ ,  $b_{b1}$  – ширины зубчатых венцов соответственно зубчатых колес  $Z_{a1}$ ,  $Z_{g1}$  и  $Z_{b1}$ ;

$d_{a1}$  – делительный диаметр зубчатого колеса

$Z_{a1}$ ;

$U_{\text{кцз}} = 1 + Z_{b1}/Z_{a1} = 1 + p_1$  – передаточное отношение планетарного механизма типа  $\overline{\text{AI}}$  от зубчатого колеса  $Z_{a1}$  к водилу  $H_1$  при неподвижном зубчатом колесе  $Z_{b1}$ .

Для случая, когда ширины зубчатых венцов зубчатых колес КЦЗ выполнены одинаковыми, формула (7) примет следующий вид

$$M_{\text{КЦЗ}} = \frac{\pi \rho_1}{4} b_{a1} d_{a1}^2 \left[ 1 + k_1 \left( \frac{U_{\text{кцз}} - 2}{2} \right)^2 + (U_{\text{кцз}} - 1)^2 \right]. \quad (8)$$

Суммарная масса  $M_{\Sigma}$  замкнутого планетарного механизма, схема которого показана на рис. 1, определяется по формуле

$$M_{\Sigma} = M_{\text{ДМ}} + M_{\text{КЦЗ}}. \quad (9)$$

Подставив в (9) формулы (3) и (7), получаем следующее выражение для массы  $M_{\Sigma}$

$$M_{\Sigma} = \frac{\pi \rho_2}{4} b_{a2} d_{a2}^2 \left[ 1 + k_2 \frac{b_{g2}}{b_{a2}} \left( \frac{U_{\text{дм}} - 2}{2} \right)^2 + \frac{b_{b2}}{b_{a2}} (U_{\text{дм}} - 1)^2 + n_{H_2} \frac{U_{\text{дм}}^2}{4} \right] + \frac{\pi \rho_1}{4} b_{a1} d_{a1}^2 \times \left[ 1 + k_1 \frac{b_{g1}}{b_{a1}} \left( \frac{U_{\text{кцз}} - 2}{2} \right)^2 + \frac{b_{b1}}{b_{a1}} (U_{\text{кцз}} - 1)^2 \right]. \quad (10)$$

Преобразуем формулу (10) к виду

$$M_{\Sigma} = \frac{\pi \rho_2}{4} b_{a2} d_{a2}^2 \left[ \left( 1 + k_2 \frac{b_{g2}}{b_{a2}} \left( \frac{U_{\text{дм}} - 2}{2} \right)^2 + \frac{b_{b2}}{b_{a2}} (U_{\text{дм}} - 1)^2 + n_{H_2} \frac{U_{\text{дм}}^2}{4} \right) + \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{b_{a1} d_{a1}^2}{b_{a2} d_{a2}^2} \times \left( 1 + k_1 \frac{b_{g1}}{b_{a1}} \left( \frac{U_{\text{кцз}} - 2}{2} \right)^2 + \frac{b_{b1}}{b_{a1}} (U_{\text{кцз}} - 1)^2 \right) \right]. \quad (11)$$

Отношение диаметров солнечных колес  $Z_{a1}$  и  $Z_{a2}$  представим в виде

$$\frac{d_{a1}}{d_{a2}} = \frac{d_{b1}}{U_{\text{кцз}} - 1} \cdot \frac{U_{\text{дм}} - 1}{d_{b2}} = \frac{d_{b1}}{d_{b2}} \cdot \frac{U_{\text{дм}} - 1}{U_{\text{кцз}} - 1}. \quad (12)$$

**Контактная прочность.** Условие контактной прочности для внешних зацеплений  $Z_{ai} - Z_{gi}$  ( $i = 1, 2$ ) замкнутого планетарного механизма, образованного из двух одновенцовых простых планетарных механизмов типа  $\overline{\text{AI}}$ , запишем в виде

$$b_{ai} d_{di}^2 \geq \frac{0,7 M_{ai} \Omega_{Hi} (K_{H\beta} K_{H\alpha} Z_E)_i u_i}{k_i \cos^2(\alpha) \text{tg}(\alpha_{wi}) \sigma_{HP_i}^2 (u_i - 2)}, \quad (13)$$

где  $M_{ai}$  – вращающий момент, приложенный к солнечному колесу  $Z_{ai}$ ;

$$u_i = \begin{cases} U_{\text{кцз}}, & \text{если } i = 1, \\ U_{\text{дм}}, & \text{если } i = 2. \end{cases} \quad \text{– передаточное отношение}$$

соответствующего планетарного механизма.

С учетом формулы (13) представим следующее отношение в виде

$$\frac{\rho_1 b_{a1} d_{a1}^2}{\rho_2 b_{a2} d_{a2}^2} = \frac{\rho_1 M_{a1} k_2 u_1 (u_2 - 1) \Omega_{H1}}{\rho_2 M_{a2} k_1 (u_1 - 1) u_2 \Omega_{H2}} \frac{\text{tg}(\alpha_{w2}) (K_{H\beta} K_{H\alpha} Z_E)_1 \sigma_{HP_2}^2}{\text{tg}(\alpha_{w1}) (K_{H\beta} K_{H\alpha} Z_E)_2 \sigma_{HP_1}^2}. \quad (14)$$

Различие в контактной прочности внешних зацеплений  $Z_{ai} - Z_{gi}$  замкнутого планетарного механизма определяем коэффициентом разнопрочности  $\Pi_H$  по формуле

$$\Pi_H = \frac{\text{tg}(\alpha_{w2}) (K_{H\beta} K_{H\alpha} Z_E)_1 \sigma_{HP_2}^2}{\text{tg}(\alpha_{w1}) (K_{H\beta} K_{H\alpha} Z_E)_2 \sigma_{HP_1}^2}. \quad (15)$$

Учитывая формулу (15) и выражение для отношения модулей моментов  $M_{a1}/M_{a2} = p_2 + 1 = u_2$ , получим

$$\frac{\rho_1 b_{a1} d_{a1}^2}{\rho_2 b_{a2} d_{a2}^2} = \frac{\rho_1 k_2 u_1 (u_2 - 1) \Omega_{H1}}{\rho_2 k_1 (u_1 - 1) \Omega_{H2}} \Pi_H. \quad (16)$$

Формулу (11) с учетом формулы (16) преобразуем к виду

$$M_{\Sigma H} = \frac{\pi \rho_2}{4} b_{a2} d_{a2}^2 \left[ \left( 1 + k_2 \frac{b_{g2}}{b_{a2}} \left( \frac{u_2 - 2}{2} \right)^2 + \frac{b_{b2}}{b_{a2}} (u_2 - 1)^2 + n_{H_2} \frac{u_2^2}{4} \right) + \frac{\rho_1 k_2 u_1 (u_2 - 1) \Omega_{H1}}{\rho_2 k_1 (u_1 - 1) \Omega_{H2}} \times \Pi_H \left( 1 + k_1 \frac{b_{g1}}{b_{a1}} \left( \frac{u_1 - 2}{2} \right)^2 + \frac{b_{b1}}{b_{a1}} (u_1 - 1)^2 \right) \right]. \quad (17)$$

Введем коэффициент массы  $C_{H2}$  при расчете на контактную прочность внешнего зубчатого зацепления дифференциала  $Z_{a2} - Z_{g2}$

$$C_{H2} = \frac{\pi \rho_2}{4} \frac{0,7 M_{a2} \Omega_{H2} \cdot (K_{H\beta} K_{H\alpha} Z_E)_2}{\cos^2(\alpha) \text{tg}(\alpha_{w2}) \sigma_{HP_2}^2} = \frac{\pi \rho_2}{4} \frac{0,7 M_{\delta} \Omega_{H2} \cdot (K_{H\beta} K_{H\alpha} Z_E)_{\delta}}{\cos^2(\alpha) \text{tg}(\alpha_{w2}) \sigma_{HP_2}^2}. \quad (18)$$

В формуле (18) учтена связь между модулями моментов  $M_{a2}$  и  $M_{\delta}$ .

С учетом формулы (18), перепишем формулу (17) к безразмерному виду (аналогу массы)

$$\begin{aligned} \overline{M}_{\Sigma H} = & \frac{u_2}{k_2 |U_{\gamma\delta}| (u_2 - 2)} \left[ \left( 1 + k_2 \frac{b_{g2}}{b_{a2}} \left( \frac{u_2 - 2}{2} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{b_{b2}}{b_{a2}} (u_2 - 1)^2 + n_{H_2} \frac{u_2^2}{4} \right) + \frac{\rho_1 k_2 u_1 (u_2 - 1) \Omega_{H1}}{\rho_2 k_1 (u_1 - 1) \Omega_{H2}} \times \right. \\ & \left. \Pi_H \left( 1 + k_1 \frac{b_{g1}}{b_{a1}} \left( \frac{u_1 - 2}{2} \right)^2 + \frac{b_{b1}}{b_{a1}} (u_1 - 1)^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\overline{M}_{\Sigma H} = \frac{M_{\Sigma H}}{C_{H2}}$ .

Проанализируем формулу (19) для некоторых случаев, которые представляют практический интерес.

Если ширины зубчатых венцов зубчатых колес для каждого простого планетарного механизма типа  $\overline{AI}$  выполнены одинаковыми, данное допущение означает, что имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} b_1 &= b_{a1} = b_{g1} = b_{b1}, \\ b_2 &= b_{a2} = b_{g2} = b_{b2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Условию (20) соответствует следующее представление аналога суммарной массы исследуемого замкнутого планетарного механизма  $\overline{M}_{\Sigma H}$ :

$$\begin{aligned} \overline{M}_{\Sigma H} = & \frac{u_2}{k_2 |U_{\gamma\delta}| (u_2 - 2)} \left[ \left( 1 + k_2 \left( \frac{u_2 - 2}{2} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + (u_2 - 1)^2 + n_{H_2} \frac{u_2^2}{4} \right) + \frac{\rho_1 k_2 u_1 (u_2 - 1) \Omega_{H1}}{\rho_2 k_1 (u_1 - 1) \Omega_{H2}} \times \right. \\ & \left. \Pi_H \left( 1 + k_1 \left( \frac{u_1 - 2}{2} \right)^2 + (u_1 - 1)^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Если все зубчатые колеса изготовлены из одного и того же материала, т.е. имеет место равенство  $\rho = \rho_1 = \rho_2$ , то выражение (21) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \overline{M}_{\Sigma H} = & \frac{u_2}{k_2 |U_{\gamma\delta}| (u_2 - 2)} \left[ \left( 1 + k_2 \left( \frac{u_2 - 2}{2} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + (u_2 - 1)^2 + n_{H_2} \frac{u_2^2}{4} \right) + \frac{k_2 u_1 (u_2 - 1) \Omega_{H1}}{k_1 (u_1 - 1) \Omega_{H2}} \times \right. \\ & \left. \Pi_H \left( 1 + k_1 \left( \frac{u_1 - 2}{2} \right)^2 + (u_1 - 1)^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

В случае, когда к предыдущим допущениям добавить равенство сателлитов  $k = k_1 = k_2$ , которое приводит к равенству  $\Omega_H = \Omega_{H1} = \Omega_{H2}$ , то получим следующее представление аналога массы  $\overline{M}_{\Sigma H}$ :

$$\begin{aligned} \overline{M}_{\Sigma H} = & \frac{u_2}{k |U_{\gamma\delta}| (u_2 - 2)} \left[ \left( 1 + k \left( \frac{u_2 - 2}{2} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + (u_2 - 1)^2 + n_{H_2} \frac{u_2^2}{4} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{(u_2 - 1)}{(u_1 - 1)} \Pi_H \left( 1 + k \left( \frac{u_1 - 2}{2} \right)^2 + (u_1 - 1)^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Исследуем экстремальные свойства аналога массы  $\overline{M}_{\Sigma H}$  вида (23), рассматривая эту формулу как целевую функцию двух аргументов  $u_1$  и  $u_2$ . Число сателлитов  $k$ , коэффициент разнопрочности  $\Pi_H$ , коэффициент  $n_{H_2}$  и передаточное отношение  $U_{\gamma\delta}$  принимаем как параметры целевой функции

$$\overline{M}_{\Sigma H} = \overline{M}_{\Sigma H}(u_1, u_2, k, n_{H_2}, U_{\gamma\delta}, \Pi_H). \quad (24)$$

Из соотношения (1) следует, что для случая, когда известно значение передаточного отношения  $U_{\gamma\delta} = U_{\gamma\delta}^*$ , то передаточные отношения  $u_1$  и  $u_2$  не являются независимыми переменными. Примем в качестве независимой переменной передаточное отношение  $u_2$ , тогда передаточное отношение  $u_1$  определится по формуле

$$u_1 = (1 - U_{\gamma\delta}^*) / u_2. \quad (25)$$

На рис. 3 показан график зависимости вида (23), построенный при следующих значениях параметров:  $U_{\gamma\delta}^* = -26$ ;  $k = 3$ ;  $n_{H_2} = 5$ ;  $\Pi_H = 2$ . Независимая переменная  $u_2$  изменялась в диапазоне  $u_2 \in [2, 8]$ .

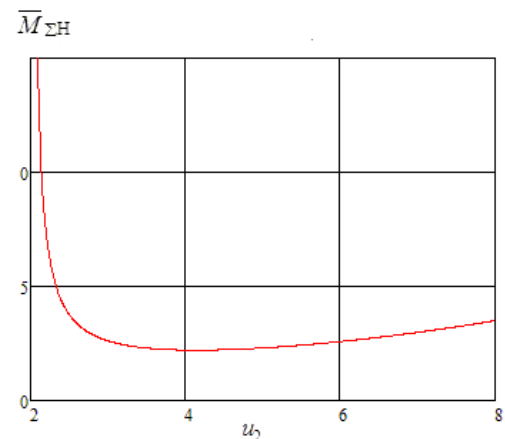


Рисунок 3 – График функции  $\overline{M}_{\Sigma H} = \overline{M}_{\Sigma H}(u_1, u_2)$

Анализ графика, изображённого на рис. 3, показывает наличие минимума функции вида (23) и стремление увеличения значения функции при  $u_2 \rightarrow 2$ . Действительно, из формулы (23) следует наличие разрыва функции при  $u_2 = 2$ .

Особенности функциональной зависимости вида (23) (точки экстремума и разрыва) показаны на рис. 4. Данный график был построен при изменении независимой переменной в диапазоне  $u_2 \in [0, 8]$ .

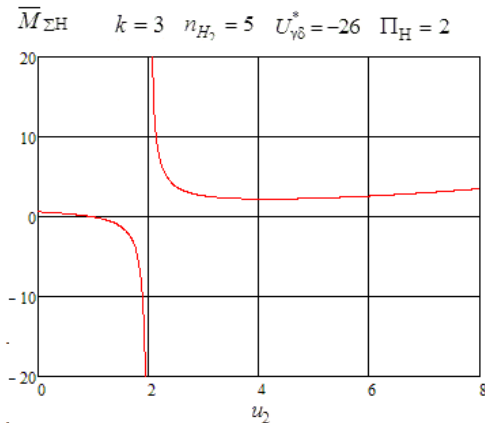


Рисунок 4 – Особенности графика функции  $\overline{M}_{\Sigma H} = \overline{M}_{\Sigma H}(u_1, u_2)$

Из рис. 4 видно, что в диапазоне значений  $u_2 \in [0, 2]$  функция вида (23) является знакопеременной и имеет глобальный минимум, равный нулю. Учитывая, что физически реализуемое наименьшее значение передаточного отношения  $u_2$  не менее 2,1, в качестве минимума функции (23) считаем минимум, показанный на рис. 3.

Оптимальное значение передаточного отношения  $u_{2opt}$ , при котором значение функции аналога массы вида (23) будет минимальным, можно находить разными методами (графическими, аналитическими и численными).

На рис. 5 показан фрагмент документа программы Mathcad для решения задачи по определению оптимальных значений передаточных отношений  $u_{1opt}$  и  $u_{2opt}$ , минимизирующих функцию аналога массы вида (23).

Результат решения задачи минимизации целевой функции вида (23), который показан на рис. 5, зависит от выбранных начальных приближений и выбранного метода решения (настройка внутренней функции *Minimize* программы Mathcad). Для функции *Minimize* было выбрано: нелинейная оптимизация; метод сопряженных градиентов.

Целевая функция вида (23) в диапазоне значений  $2 < u_2 \leq 11$  является непрерывной функцией, поэтому можно реализовать нахождение ее минимума путем приравнивания ее производной к нулю с последующим решением этого уравнения.

График производной целевой функции вида (23) по переменной  $u_2$ , построенный при изменении независимой переменной в диапазоне  $u_2 \in [3, 6]$ , показан на рис. 6. Данный график был получен при значениях параметров, которые были приняты для построения графика, изображенного на рис. 3.

Находить значение передаточного отношения  $u_2$ , при котором график производной целевой функ-

ции вида (23), показанный на рис. 6, проходит через нуль, можно разными методами, например численными методами.

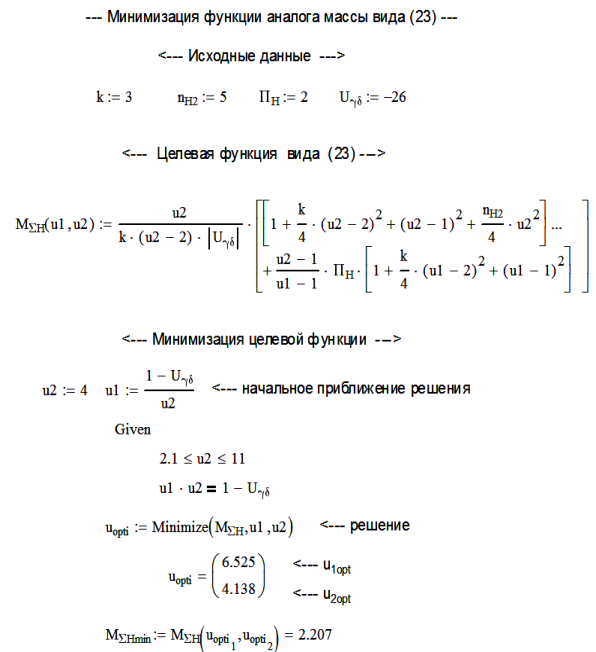


Рисунок 5 – Нахождение передаточных отношений  $u_{1opt}$  и  $u_{2opt}$  при минимизации целевой функции вида (23). Вариант 1

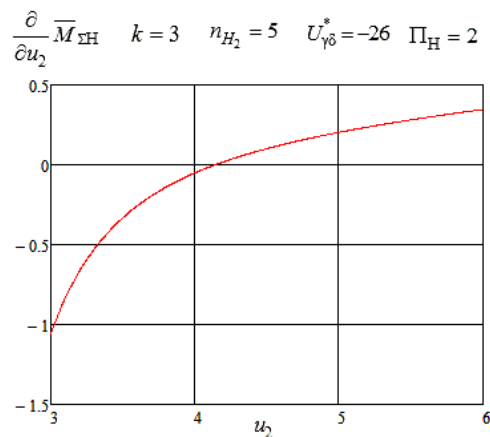


Рисунок 6 – График производной  $\frac{\partial}{\partial u_2} \overline{M}_{\Sigma H}(u_1, u_2)$

Определение значений оптимальных передаточных отношений  $u_{1opt}$  и  $u_{2opt}$ , основанное на решении уравнения, полученного путем приравнивания к нулю производной целевой функции вида (23) по независимой переменной  $u_2$ , реализованное в среде программы Mathcad, показано на рис. 7.

Из приведенного фрагмента видно, что производная целевой функции вида (23) по независимой переменной  $u_2$  представляет собой полином 5-го порядка относительно переменной  $u_2$  (точнее дробь, числитель которой есть полином 5-го порядка, а знаменатель – полином 4-го порядка). В этом можно

убедиться воспользовавшись символьным процессором программы Mathcad (вывести в символьном виде формулу производной).

```

-- Минимизация функции аналога массы вида (23) --
    <-- Исходные данные -->
    k := 3      nH2 := 5      ПH := 2      Uγ6* := -26

    <-- Целевая функция вида (23) -->
    MΣH(u1, u2) :=  $\frac{u2}{k \cdot (u2 - 2)} \cdot \left[ 1 + \frac{k}{4} \cdot (u2 - 2)^2 + (u2 - 1)^2 + \frac{n_{H2}}{4} \cdot u2^2 \right] \dots$ 
    +  $\frac{u2 - 1}{u1 - 1} \cdot П_H \cdot \left[ 1 + \frac{k}{4} \cdot (u1 - 2)^2 + (u1 - 1)^2 \right]$ 

    <-- Производная целевой функции вида (23) -->
    dMΣHdu2(u1, u2) :=  $\frac{d}{du2} M_{\Sigma H}(u1, u2)$ 

Решение уравнения, полученного путем приравнивания к нулю
производной целевой функции вида (23)

u2 := 5 <-- начальное приближение решения

Given

dMΣHdu2  $\left( \frac{1 - U_{\gamma 6}}{u2}, u2 \right) = 0$  <-- уравнение

Find(u2)T →  $\begin{pmatrix} 4.1422224093458863451 \\ 27.324558295179820981 + 4.101488797723252666i \\ 27.324558295179820981 - 4.101488797723252666i \\ 0.35433050014723584672 - 2.0949532253511633609i \\ 0.35433050014723584672 + 2.0949532253511633609i \end{pmatrix}$ 

<-- Искомое решение оптимизационной задачи -->

uopt2 := 4.1422224093458863451 <-- u2opt

uopt1 :=  $\frac{1 - U_{\gamma 6}}{u_{opt2}} = 6.518$  <-- u1opt

MΣHmin := MΣH(uopt1, uopt2) = 57.375
    
```

Рисунок 7 – Нахождение передаточных отношений  $u_{1opt}$  и  $u_{2opt}$  при минимизации целевой функции вида (23). Вариант 2

Сравнивая результаты, показанные на рис. 5 и рис. 7, можно увидеть небольшое их различие, обусловленное применением численных методов для реализации внутренних функций *Minimize* и *Find* программы Mathcad.

Изменение положения минимума аналога суммарной массы  $\bar{M}_{\Sigma H}$  вида (23) исследуемого замкнутого планетарного механизма в зависимости от значения коэффициента  $\Pi_H$  показано на рис. 8.

Оптимальные значения передаточных отношений  $u_{1opt}$  и  $u_{2opt}$  для зависимостей, показанных на рис. 8, были найдены с помощью документа программы Mathcad (див. рис. 5). Получены следующие результаты:  $u_{1opt} = 8,115$ ,  $u_{2opt} = 3,327$ ,  $\bar{M}_{\Sigma H} = 1,112$  при  $\Pi_H = 0,5$ ;  $u_{1opt} = 7,405$ ,  $u_{2opt} = 3,646$ ,  $\bar{M}_{\Sigma H} = 1,507$  при  $\Pi_H = 1$ ;  $u_{1opt} = 6,525$ ,  $u_{2opt} = 4,138$ ,  $\bar{M}_{\Sigma H} = 2,207$  при  $\Pi_H = 2$ .

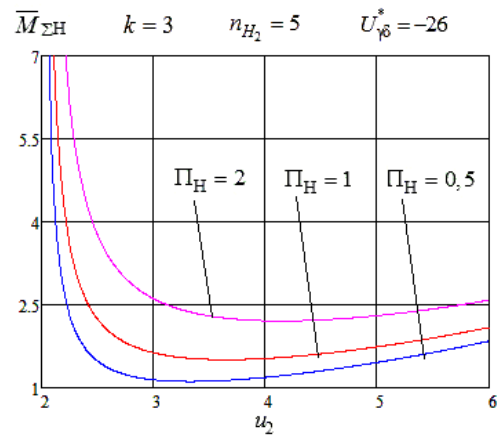


Рисунок 8 – Графики функции  $\bar{M}_{\Sigma H}(u_1, u_2)$  при различных значениях коэффициента  $\Pi_H$

С увеличением значения коэффициента  $\Pi_H$  при неизменных значениях остальных параметров функциональной зависимости вида (23) уменьшается значение передаточного отношения  $u_{1opt}$  и увеличивается значение передаточного отношения  $u_{2opt}$ , а также возрастает значение аналога массы  $\bar{M}_{\Sigma H}(u_1, u_2)$ .

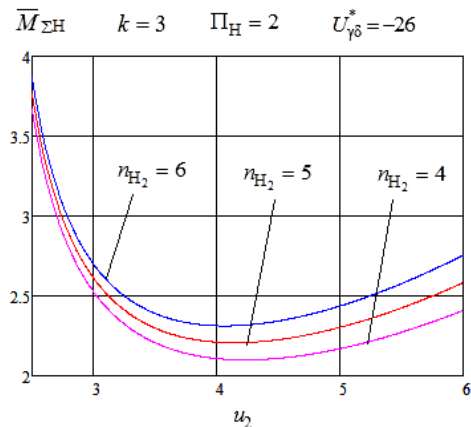


Рисунок 9 – Графики функции  $\bar{M}_{\Sigma H}(u_1, u_2)$  при различных значениях коэффициента  $n_{H_2}$

На рис. 9 показано влияние значения параметра  $n_{H_2}$  на положение минимума аналога суммарной массы  $\bar{M}_{\Sigma H}$  вида (23).

Оптимальные значения передаточных отношений  $u_{1opt}$  и  $u_{2opt}$  для зависимостей, показанных на рис. 9, были найдены так же, как и для зависимостей, показанных на рис. 8. В результате получены следующие результаты:  $u_{1opt} = 6,388$ ,  $u_{2opt} = 4,227$ ,  $\bar{M}_{\Sigma H} = 2,099$  при  $n_{H_2} = 4$ ;  $u_{1opt} = 6,525$ ,  $u_{2opt} = 4,138$ ,  $\bar{M}_{\Sigma H} = 2,207$  при  $n_{H_2} = 5$ ;  $u_{1opt} = 6,638$ ,  $u_{2opt} = 4,067$ ,  $\bar{M}_{\Sigma H} = 2,312$  при  $n_{H_2} = 6$ .

С увеличением значения коэффициента  $n_{H_2}$  при



неизменных значениях остальных параметров функциональной зависимости вида (23) увеличивается значение передаточного отношения  $u_{1opt}$  и уменьшается значение передаточного отношения  $u_{2opt}$ , а также возрастает значение аналога массы  $\overline{M}_{\Sigma H}(u_1, u_2)$ .

Влияние на положение минимума аналога суммарной массы  $\overline{M}_{\Sigma H}$  вида (23) в зависимости от значения числа спутников  $k$  показано на рис. 10.

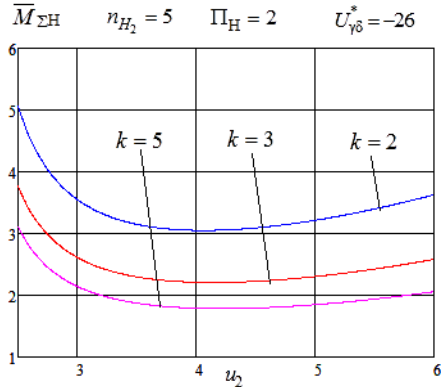


Рисунок 10 – Графики функции  $\overline{M}_{\Sigma H}(u_1, u_2)$  при различных значениях числа спутников  $k$

Оптимальные значения передаточных отношений  $u_{1opt}$  и  $u_{2opt}$  для зависимостей, изображенных на рис. 10, были найдены так же, как и для зависимостей, показанных на рис. 8, 9. Были получены следующие результаты:  $u_{1opt} = 6,676$ ,  $u_{2opt} = 3,985$ ,  $\overline{M}_{\Sigma H} = 3,204$  при  $k = 2$ ;  $u_{1opt} = 6,525$ ,  $u_{2opt} = 4,138$ ,  $\overline{M}_{\Sigma H} = 2,207$  при  $k = 3$ ;  $u_{1opt} = 6,429$ ,  $u_{2opt} = 4,2$ ,  $\overline{M}_{\Sigma H} = 1,594$  при  $k = 5$ .

Увеличение значения числа спутников  $k$  при неизменных значениях остальных параметров функциональной зависимости вида (23) приводит к уменьшению значения передаточного отношения  $u_{1opt}$  и увеличению значения передаточного отношения  $u_{2opt}$ , а также к уменьшению значения аналога массы  $\overline{M}_{\Sigma H}(u_1, u_2)$ . С ростом числа спутников  $k$  наблюдается смещение положения минимума функции  $\overline{M}_{\Sigma H}(u_1, u_2)$  в сторону верхней границы диапазона возможных значений передаточного отношения  $u_2$ .

**Изгибная прочность.** Условие изгибной прочности для внешних зацеплений  $Z_{ai} - Z_{gi}$  ( $i = 1, 2$ ) замкнутого планетарного механизма, образованного из двух одновенцовых простых планетарных механизмов типа **AI**, записывается в виде

$$b_{ai} d_{di}^2 \geq \frac{2M_{ai} \Omega_{Fi} (K_{F\beta} K_{Fv})_i Y_{FS_i} Z_{ai}}{k_i \sigma_{FP_i}}. \quad (26)$$

С учетом формулы (26) представим следующее отношения в виде

$$\frac{\rho_1 b_{a1} d_{a1}^2}{\rho_2 b_{a2} d_{a2}^2} = \frac{\rho_1 M_{a1} k_2 Z_{a1} \Omega_{F1} (K_{F\beta} K_{Fv})_1 Y_{FS_1} \sigma_{FP_2}}{\rho_2 M_{a2} k_1 Z_{a2} \Omega_{F2} (K_{F\beta} K_{Fv})_2 Y_{FS_2} \sigma_{FP_1}}. \quad (27)$$

Различие в изгибной прочности внешних зацеплений  $Z_{ai} - Z_{gi}$  замкнутого планетарного механизма определяем коэффициентом разнопрочности  $\Pi_F$  по формуле

$$\Pi_F = \left( \frac{\sigma_{FP}}{Y_{FS}} \right)_2 \left( \frac{Y_{FS}}{\sigma_{FP}} \right)_1 \frac{(K_{F\beta} K_{Fv})_1}{(K_{F\beta} K_{Fv})_2}. \quad (28)$$

С учетом формулы (28) и выражения для отношения модулей моментов  $M_{a1}/M_{a2} = p_2 + 1 = u_2$ , получим

$$\frac{\rho_1 b_{a1} d_{a1}^2}{\rho_2 b_{a2} d_{a2}^2} = \frac{\rho_1 k_2 Z_{a1} \Omega_{F1}}{\rho_2 k_1 Z_{a2} \Omega_{F2}} u_2 \Pi_F. \quad (29)$$

Формулу (11) с учетом формулы (29) преобразуем к виду

$$M_{\Sigma F} = \frac{\pi \rho_2}{4} b_{a2} d_{a2}^2 \left[ \left( 1 + k_2 \frac{b_{g2}}{b_{a2}} \left( \frac{u_2 - 2}{2} \right)^2 + \frac{b_{b2}}{b_{a2}} (u_2 - 1)^2 + n_{H_2} \frac{u_2^2}{4} \right) + \frac{\rho_1 k_2 Z_{a1} \Omega_{F1}}{\rho_2 k_1 Z_{a2} \Omega_{F2}} u_2 \times \right. \\ \left. \Pi_F \left( 1 + k_1 \frac{b_{g1}}{b_{a1}} \left( \frac{u_1 - 2}{2} \right)^2 + \frac{b_{b1}}{b_{a1}} (u_1 - 1)^2 \right) \right]. \quad (30)$$

Введем коэффициент массы  $C_{F2}$  при расчете на изгибную прочность внешнего зубчатого зацепления дифференциала  $Z_{a2} - Z_{g2}$

$$C_{F2} = \frac{\pi \rho_2}{2} (K_{F\beta} K_{Fv})_2 \left( \frac{Y_{FS_2}}{\sigma_{FP_2}} \right) \Omega_{F2} Z_{a2} M_{a2} = \\ = \frac{\pi \rho_2}{2} (K_{F\beta} K_{Fv})_2 \left( \frac{Y_{FS_2}}{\sigma_{FP_2}} \right) \Omega_{F2} Z_{a2} M_{\delta}. \quad (31)$$

В формуле (31) учтено соотношение между модулями моментов  $M_{a2}$  и  $M_{\delta}$ , которое было использовано при выводе формулы (29).

С учетом формулы (31) перепишем формулу (30) к безразмерному виду (аналогу массы)

$$\overline{M}_{\Sigma F} = \frac{M_{\Sigma F}}{C_{F2}} = \frac{Z_{a2}}{k_2 |U_{\gamma\delta}|} \left[ \left( 1 + k_2 \frac{b_{g2}}{b_{a2}} \left( \frac{u_2 - 2}{2} \right)^2 + \frac{b_{b2}}{b_{a2}} (u_2 - 1)^2 + n_{H_2} \frac{u_2^2}{4} \right) + \frac{\rho_1 k_2 Z_{a1} \Omega_{F1}}{\rho_2 k_1 Z_{a2} \Omega_{F2}} u_2 \times \right. \\ \left. \Pi_F \left( 1 + k_1 \frac{b_{g1}}{b_{a1}} \left( \frac{u_1 - 2}{2} \right)^2 + \frac{b_{b1}}{b_{a1}} (u_1 - 1)^2 \right) \right]. \quad (32)$$

Выполним анализ возможных случаев (пред-

ставлений записи) для формулы (32), как это было сделано применительно к формуле (19).

Условием (20) будет соответствовать следующее представление формулы аналога суммарной массы  $\overline{M}_{\Sigma F}$  исследуемого замкнутого планетарного механизма:

$$\begin{aligned} \overline{M}_{\Sigma F} = & \frac{Z_{a2}}{k_2 |U_{\gamma\delta}|} \left[ \left( 1 + k_2 \left( \frac{u_2 - 2}{2} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + (u_2 - 1)^2 + n_{H_2} \frac{u_2^2}{4} \right) + \frac{\rho_1 k_2 Z_{a1} \Omega_{F1}}{\rho_2 k_1 Z_{a2} \Omega_{F2}} u_2 \times \right. \\ & \left. \Pi_F \left( 1 + k_1 \left( \frac{u_1 - 2}{2} \right)^2 + (u_1 - 1)^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Если все зубчатые колеса изготовлены из одного и того же материала, т.е. имеет место равенство  $\rho = \rho_1 = \rho_2$ , то выражение (32) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \overline{M}_{\Sigma F} = & \frac{Z_{a2}}{k_2 |U_{\gamma\delta}|} \left[ \left( 1 + k_2 \left( \frac{u_2 - 2}{2} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + (u_2 - 1)^2 + n_{H_2} \frac{u_2^2}{4} \right) + \frac{k_2 Z_{a1} \Omega_{F1}}{k_1 Z_{a2} \Omega_{F2}} u_2 \times \right. \\ & \left. \Pi_F \left( 1 + k_1 \left( \frac{u_1 - 2}{2} \right)^2 + (u_1 - 1)^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

В случае, когда выполняется условие равенства сателлитов, т.е.  $k = k_1 = k_2$ , которое приводит к равенству  $\Omega_F = \Omega_{F1} = \Omega_{F2}$ , получим следующее представление аналога массы  $\overline{M}_{\Sigma F}$ :

$$\begin{aligned} \overline{M}_{\Sigma F} = & \frac{Z_{a2}}{k |U_{\gamma\delta}|} \left[ \left( 1 + k \left( \frac{u_2 - 2}{2} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + (u_2 - 1)^2 + n_{H_2} \frac{u_2^2}{4} \right) + \Pi_Z u_2 \times \right. \\ & \left. \Pi_F \left( 1 + k \left( \frac{u_1 - 2}{2} \right)^2 + (u_1 - 1)^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (35)$$

где  $\Pi_Z = \frac{Z_{a1}}{Z_{a3}}$  – коэффициент, характеризующий различие значений чисел зубьев солнечных колес замкнутого планетарного механизма.

На рис. 11 показан график зависимости вида (35), построенный при следующих значениях параметров:  $U_{\gamma\delta}^* = -26$ ;  $k = 3$ ;  $n_{H_2} = 5$ ;  $Z_{a2} = 18$ ;  $\Pi_Z = 1$ ;  $\Pi_F = 2$ . Независимая переменная  $u_2$  изменялась в диапазоне  $u_2 \in [2, 11]$ .

Как видно из графика, изображенного на рис. 11, положение минимума функции  $\overline{M}_{\Sigma F}(u_1, u_2)$  смещено ближе к правой границе диапазона возможных значе-

ний передаточного отношения простого планетарного механизма типа **АІ** с числом сателлитов, равным 3. Заметим, что с ростом числа сателлитов  $k$  указанная граница уменьшается [1].

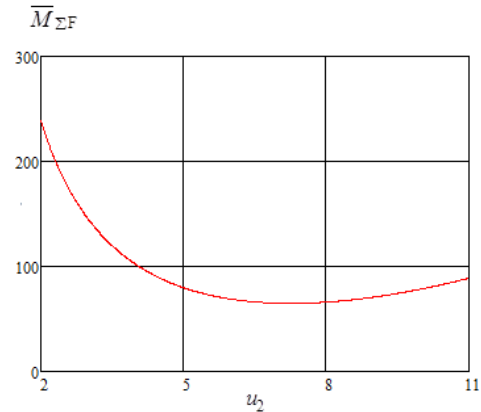


Рисунок 11 – График функции  $\overline{M}_{\Sigma F} = \overline{M}_{\Sigma F}(u_1, u_2)$

Функциональная зависимость вида (35) в диапазоне изменения передаточного отношения  $u_2 \in [2, 11]$  имеет точку минимума и является непрерывной функцией. При  $u_2 \rightarrow 0$  функция вида (35) стремится к  $+\infty$ , т.е. при  $u_2 = 0$  эта функция имеет разрыв.

Оптимальное значение передаточного отношения  $u_{2opt}$ , при котором значение функции аналога массы вида (35) будет минимальным, определялось таким же самым методом (способом), как и при минимизации функции вида (23).

На рис. 12 показан фрагмент документа программы Mathcad для решения задачи по определению оптимальных значений передаточных отношений  $u_{1opt}$  и  $u_{2opt}$ , минимизирующих функцию аналога массы вида (35).

Определение значений оптимальных передаточных отношений  $u_{1opt}$  и  $u_{2opt}$ , основанное на решении уравнения, полученного путем приравнивания к нулю производной целевой функции вида (35) по независимой переменной  $u_2$ , можно выполнить также в среде программы Mathcad, как это показано на рис. 7.

График производной целевой функции вида (35) по переменной  $u_2$ , построенный при изменении независимой переменной в диапазоне  $u_2 \in [2, 11]$ , показан на рис. 13. Данный график был получен при значениях параметров, которые были приняты для построения графика, изображенного на рис. 11.

Целевая функция вида (35) имеет шесть параметров:  $k$ ;  $U_{\gamma\delta}$ ;  $n_{H_2}$ ;  $Z_{a2}$ ;  $\Pi_Z$ ;  $\Pi_F$ . Численные значения этих параметров влияют на положение минимума функции вида (35).

Влияние на положение минимума аналога суммарной массы  $\overline{M}_{\Sigma F}$  вида (35) в зависимости от значения числа сателлитов  $k$  показано на рис. 14.

Оптимальные значения передаточных отноше-

ний  $u_{1opt}$  и  $u_{2opt}$  для зависимостей, изображенных на рис. 14, были найдены документом программы Mathcad, показанным на рис. 12. Получены следующие результаты:

$$u_{1opt} = 3,793, \quad u_{2opt} = 7,117, \\ \bar{M}_{\Sigma F} = 91,052 \text{ при } k = 2; \quad u_{1opt} = 3,723, \quad u_{2opt} = 7,252, \\ \bar{M}_{\Sigma F} = 64,816 \text{ при } k = 3; \quad u_{1opt} = 3,625, \quad u_{2opt} = 7,448 \\ \bar{M}_{\Sigma F} = 43,718 \text{ при } k = 5.$$

```

--- Минимизация функции аналога массы вида (35) ---
<--- Исходные данные --->
k := 3  U_{\gamma\delta} := -26  n_{H2} := 5  Za2 := 18  \Pi_Z := 1  \Pi_F := 2

<--- Целевая функция вида (34) --->
M_{\Sigma F}(u1, u2) := \frac{Za2}{k \cdot |U_{\gamma\delta}|} \cdot \left[ \left[ 1 + \frac{k}{4} \cdot (u2 - 2)^2 + (u2 - 1)^2 + \frac{n_{H2}}{4} \cdot u2^2 \right] \dots \right.
\left. + \Pi_Z \cdot u2 \cdot \Pi_F \cdot \left[ 1 + \frac{k}{4} \cdot (u1 - 2)^2 + (u1 - 1)^2 \right] \right]

<--- Минимизация целевой функции --->
u2 := 4  u1 := \frac{1 - U_{\gamma\delta}}{u2} <--- начальное приближение решения
Given
2.1 ≤ u2 ≤ 11
u1 · u2 = 1 - U_{\gamma\delta}
u_{opti} := Minimize(M_{\Sigma F}, u1, u2) <--- решение
u_{opti} = \begin{pmatrix} 3.723 \\ 7.252 \end{pmatrix} <--- u_{1opt}
<--- u_{2opt}

M_{\Sigma Fmin} := M_{\Sigma F}(u_{opti1}, u_{opti2}) = 64.816
    
```

Рисунок 12 – Нахождение оптимальных значений  $u_{1opt}$  и  $u_{2opt}$  при минимизации целевой функции вида (35). Вариант 1

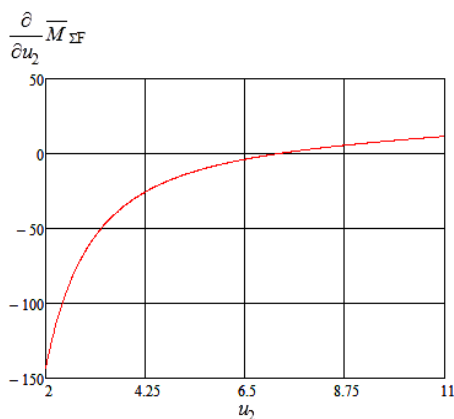


Рисунок 13 – График производной  $\frac{\partial}{\partial u_2} M_{\Sigma F}(u_1, u_2)$

Увеличение значения числа спутников  $k$  при неизменных значениях остальных параметров функциональной зависимости вида (35) приводит к уменьшению значения передаточного отношения  $u_{1opt}$  и увеличению значения передаточного отноше-

ния  $u_{2opt}$ , а также к уменьшению значения аналога массы  $\bar{M}_{\Sigma F}(u_1, u_2)$ .

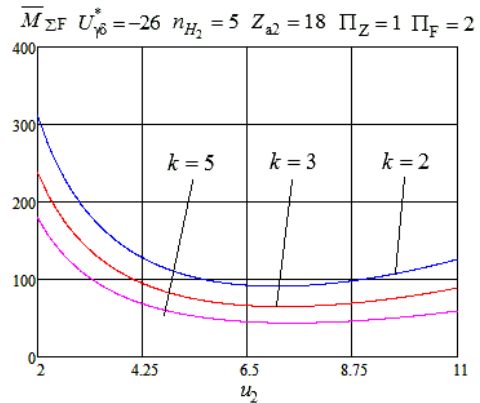


Рисунок 14 – Графики функции  $\bar{M}_{\Sigma F}(u_1, u_2)$  при различных значениях числа спутников  $k$

Изменение числа спутников  $k$  оказывает одно и тоже влияние на минимизацию целевых функций (23) и (35) соответственно.

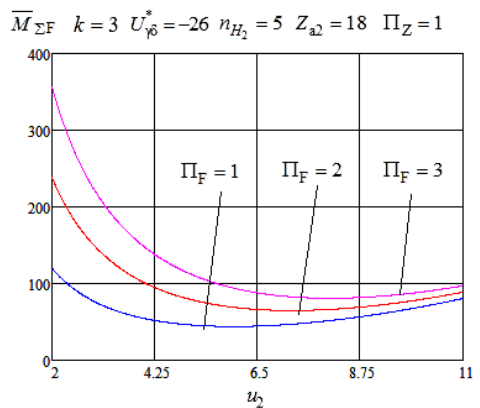


Рисунок 15 – Графики функции  $\bar{M}_{\Sigma F}(u_1, u_2)$  при различных значениях коэффициента  $\Pi_F$

Изменение положения минимума аналога суммарной массы  $\bar{M}_{\Sigma F}$  вида (35) в зависимости от значения коэффициента  $\Pi_F$  показано на рис. 15. С помощью программного документа (см. рис. 12) были получены следующие результаты:  $u_{1opt} = 4,545$ ,  $u_{2opt} = 5,94$ ,  $\bar{M}_{\Sigma F} = 43,988$  при  $\Pi_F = 1$ ;  $u_{1opt} = 3,723$ ,  $u_{2opt} = 7,252$ ,  $\bar{M}_{\Sigma F} = 64,816$  при  $\Pi_F = 2$ ;  $u_{1opt} = 3,336$ ,  $u_{2opt} = 8,094$ ,  $\bar{M}_{\Sigma F} = 80,844$  при  $\Pi_F = 3$ .

С увеличением значения коэффициента  $\Pi_F$  при неизменных значениях остальных параметров функциональной зависимости вида (35) уменьшается значение передаточного отношения  $u_{1opt}$  и увеличивается значение передаточного отношения  $u_{2opt}$ , а также возрастает значение аналога массы  $\bar{M}_{\Sigma F}(u_1, u_2)$ .

Изменение значения коэффициента  $\Pi_F$  оказыва-

ет такое же влияние на минимизацию целевой функции (35), как и на минимизацию целевой функции (23).

На рис. 16 показано влияние значения коэффициента  $\Pi_Z$  на положение минимума аналога суммарной массы  $\overline{M}_{\Sigma F}$  вида (35).

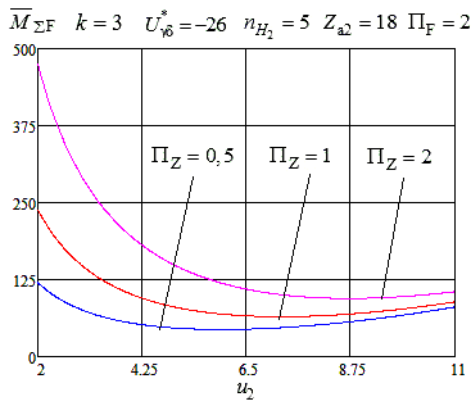


Рисунок 16 – Графики функции  $\overline{M}_{\Sigma F}(u_1, u_2)$  для различных значений коэффициента  $\Pi_Z$

С помощью программного документа (см. рис. 12) были получены следующие результаты:  $u_{1opt} = 4,545$ ,  $u_{2opt} = 5,94$ ,  $\overline{M}_{\Sigma F} = 43,988$  при  $\Pi_Z = 0,5$ ;  $u_{1opt} = 3,723$ ,  $u_{2opt} = 7,252$ ,  $\overline{M}_{\Sigma F} = 64,816$  при  $\Pi_Z = 1$ ;  $u_{1opt} = 3,108$ ,  $u_{2opt} = 8,687$ ,  $\overline{M}_{\Sigma F} = 94,412$  при  $\Pi_Z = 2$ .

С увеличением значения коэффициента  $\Pi_Z$  при неизменных значениях остальных параметров функциональной зависимости вида (35) уменьшается значение передаточного отношения  $u_{1opt}$  и увеличивает значение передаточного отношения  $u_{2opt}$ , а также возрастает значение аналога массы  $\overline{M}_{\Sigma F}(u_1, u_2)$ .

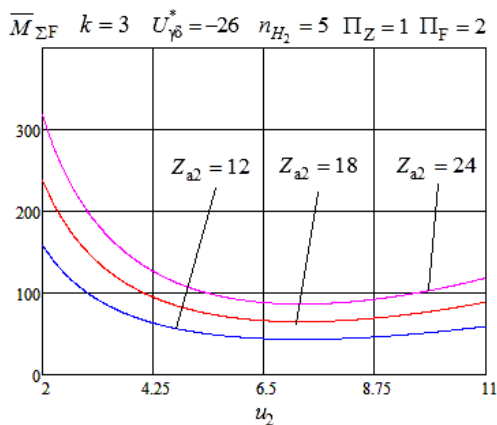


Рисунок 17 – Графики функции  $\overline{M}_{\Sigma F}(u_1, u_2)$  для различных значений параметра  $Z_{a2}$

На рис. 17 показано влияние значения параметра  $Z_{a2}$  на положение минимума аналога суммарной массы  $\overline{M}_{\Sigma F}$  вида (35).

С помощью программного документа (рис. 12)

были получены следующие результаты:  $u_{1opt} = 3,723$ ,  $u_{2opt} = 7,252$ ,  $\overline{M}_{\Sigma F} = 43,21$  при  $Z_{a2} = 12$ ;  $u_{1opt} = 3,723$ ,  $u_{2opt} = 7,252$ ,  $\overline{M}_{\Sigma F} = 64,816$  при  $Z_{a2} = 18$ ;  $u_{1opt} = 3,723$ ,  $u_{2opt} = 7,252$ ,  $\overline{M}_{\Sigma F} = 86,421$  при  $Z_{a2} = 24$ .

Анализ полученных результатов показал, что оптимальные значения передаточных отношений  $u_{1opt}$  и  $u_{2opt}$  не изменяются в зависимости от значения параметра  $Z_{a2}$ . Изменяется значение аналога суммарной массы  $\overline{M}_{\Sigma F}$ . Увеличение значения параметра  $Z_{a2}$  приводит к возрастанию значения минимума аналога суммарной массы  $\overline{M}_{\Sigma F}(u_1, u_2)$  и его уменьшению, если уменьшается значение параметра  $Z_{a2}$ .

Заметим, что символичный анализ формулы целевой функции вида (35), выполненный в программе Mathcad, показывает, что параметр  $Z_{a2}$  является только общим множителем дробного выражения функции вида (35). Поэтому его значение не влияет на значения передаточных отношений  $u_{1opt}$  и  $u_{2opt}$ . Этого нельзя сказать о передаточном отношении  $U_{\gamma\delta}$ . Его значение влияет на положение минимума целевых функций (23) и (35). Однако, этот параметр в нашем исследовании является задаваемой величиной и не подлежит варьированию.

**Сравнительный анализ масс планетарных механизмов.** Сравним массовые характеристики кинематических схем планетарных механизмов, образованных из двух простых планетарных механизмов типа **AI**, показанных на рис. 1 и рис. 18 соответственно.

Первая ступень планетарного механизма типа  $2 \times \text{AI}$  (рис. 18) образована зубчатыми колесами, обозначения которых такие же, как и у зубчатых колес дифференциала замкнутого планетарного механизма. Вторая ступень образована зубчатыми колесами, обозначения которых такие же, как и у зубчатых колес КЦЗ замкнутого планетарного механизма. Входной и выходной валы механизма обозначены символами  $\gamma$  и  $\delta$  соответственно.

Передаточные отношения сравниваемых механизмов имеют разные знаки. Знак «-» – у замкнутого планетарного механизма и знак «+», соответственно, – у рядно-планетарного. Обозначим эти передаточные отношения как  $U_{\gamma\delta}^j$ , где индекс «j» указывает на номер кинематической схемы сравниваемых механизмов. Механизму, показанному на рис. 1, соответствует индекс  $j=1$ , а показанному на рис. 18 – индекс  $j=2$ . Аналогично обозначим кинематические параметры простых планетарных механизмов типа **AI** через  $p_i^j$  (индекс  $i$  указывает на номер простого планетарного механизма).

Если кинематические параметры  $p_i^j$  удовлетворяют условиям  $p_1^1 = p_1^2$  и  $p_2^1 = p_2^2$ , то получим

следующее уравнение

$$U_{\gamma\delta}^1 = 1 - U_{\gamma\delta}^2. \quad (36)$$

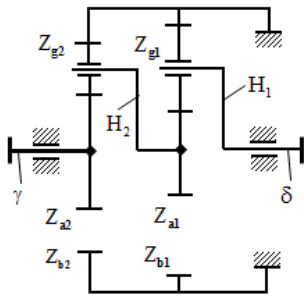


Рисунок 18 – Рядно–планетарный механизм типа  $2 \times \overline{\text{AI}}$

Функции аналогов массы при расчетах на контактную и изгибную прочность рядно-планетарного механизма типа  $2 \times \overline{\text{AI}}$  достаточно подробно исследованы в работах авторов настоящей статьи. Воспользуемся работой [3], в которой приводятся формулы для аналогов массы данного механизма.

Примем следующие допущения:  $k = k_1 = k_2$ ;  $n_M = n_{M_1} = n_{M_2}$ . Тогда выражение для функции аналога массы при расчете на контактную прочность примет вид:

$$\begin{aligned} \overline{M}_{\Sigma H} = & \frac{u_1}{k|U_{\gamma\delta}|(u_1-2)} \left[ 1 + k \left( \frac{u_1-2}{2} \right)^2 + n_M \frac{u_2^2}{4} + \right. \\ & \left. + \frac{(u_1-1)}{(u_2-1)} u_2 \Pi_H \left( 1 + k \left( \frac{u_2-2}{2} \right)^2 + n_M \frac{u_2^2}{4} \right) \right] \quad (37) \end{aligned}$$

В формуле (37) передаточные отношения первой и второй ступеней механизма обозначены как  $u_1$  и  $u_2$  соответственно.

С учетом принятых допущений, получим для функции аналога массы при расчете на изгибную прочность следующее выражение:

$$\begin{aligned} \overline{M}_{\Sigma F} = & \frac{Z_{a_2}}{k|U_{\gamma\delta}|} \left[ 1 + k \left( \frac{u_1-2}{2} \right)^2 + n_M \frac{u_2^2}{4} + \right. \\ & \left. + \frac{Z_{a_1}}{Z_{a_2}} u_1 \Pi_F \left( 1 + k \left( \frac{u_2-2}{2} \right)^2 + n_M \frac{u_2^2}{4} \right) \right]. \quad (38) \end{aligned}$$

В формуле (38) числа зубьев солнечных колес первой и второй ступеней механизма обозначены как  $Z_{a_2}$  и  $Z_{a_1}$  соответственно. В формулах (37), (38) имеется параметр, обозначенный через  $n_M$  (коэффициент приведения), физический смысл которого поясняется в [1]. Коэффициенты  $\Pi_H$  и  $\Pi_F$  из этих формул имеют такой же самый смысл, как и в формулах (23) и (33) соответственно.

Формулы (23) и (37), а также (33) и (38) по своей структуре записи являются похожими. Однако, это

разные математические модели суммарных масс механизмов.

Выполним анализ массовых характеристик (аналогов масс) при расчетах на контактную и изгибную прочность для вариантов конструкций сравниваемых механизмов.

Чтобы сравнение было корректным, примем еще два дополнительных допущения. Первое – на выходных валах механизмов действуют одинаковые моменты, равные  $M_\delta$ . Второе – несущая способность каждого из механизмов определяется прочностью и долговечностью внешнего зубчатого зацепления солнечного колеса и сателлита первого простого планетарного механизма типа  $\overline{\text{AI}}$ . Применительно к замкнутому планетарному механизму это зубчатое зацепление  $Z_{a_2} - Z_{g_2}$  дифференциала (рис. 1), а для рядно-планетарного механизма – зацепление  $Z_{a_2} - Z_{g_2}$  (рис. 18) первой ступени.

*Вариант 1.* Модули передаточных отношений  $U_{\gamma\delta}^j$  имеют одно и тоже числовое значение, равное 26. Это означает, что  $p_1^1 p_2^1 = 27$  и  $p_1^2 p_2^2 = 26$ . Для параметров функций аналогов массы механизмов приняты следующие значения:  $k = 3$ ;  $n_{H_2} = 5$ ;  $n_M = 5$ ;  $\Pi_H = 2$ ;  $\Pi_Z = 1$ ;  $\Pi_F = 2$ ;  $Z_{a_2} = 18$ .

На рис. 19 показаны графики аналогов массы при расчете на контактную прочность  $\overline{M}_{\Sigma H}(u_1, u_2)$  сравниваемых механизмов для рассматриваемого варианта. Положение минимумов сравниваемых характеристик на рисунке показаны символами кружочка на соответствующих кривых.

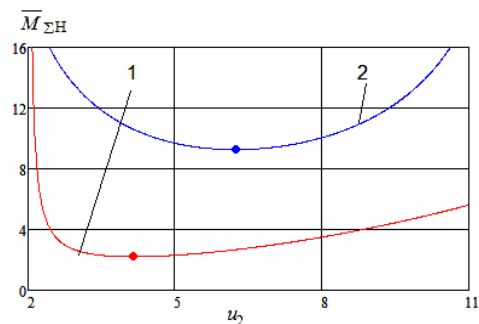


Рисунок 19 – Графики функции  $\overline{M}_{\Sigma H} = \overline{M}_{\Sigma H}(u_1, u_2)$  двух кинематических схем планетарных механизмов:  
1 – замкнутый планетарный механизм;  
2 – рядно-планетарный механизм типа  $2 \times \overline{\text{AI}}$

В качестве независимой переменной функций аналогов массы  $\overline{M}_{\Sigma H}(u_1, u_2)$  сравниваемых механизмов принята переменная  $u_2$ , соответствующая передаточному отношению простого планетарного механизма типа  $\overline{\text{AI}}$ , на базе которого образован дифференциал замкнутого планетарного механизма. Для функции аналога массы  $\overline{M}_{\Sigma H}(u_1, u_2)$  рядно-планетарного механизма независимая переменная  $u_2$  будет уже рассматриваться как передаточное отношение первой ступени данного механизма, т.е. перемен-

ной  $u_1$  в формуле (37).

Соотношения между независимой переменной  $u_2$  и аргументами функций аналогов массы  $\overline{M}_{\Sigma H}(u_1, u_2)$  приведены ниже:

$$u_2 = \text{var}, u_1 = \begin{cases} \frac{1-U_{j\delta}^1}{u_2}, & j=1 \\ u_2, & j=2 \end{cases}, u_2 = \frac{U_{j\delta}^2}{u_1} \Big|_{j=2}, \quad (39)$$

где  $j=1, 2$  – номер кинематической схемы сравниваемых механизмов.

Оптимальные значения передаточных отношений  $u_{1\text{opt}}$  и  $u_{2\text{opt}}$  для зависимостей, изображенных на рис. 19, определялись в среде программы Mathcad. Получены следующие результаты:  $u_{1\text{opt}} = 6,525$ ,  $u_{2\text{opt}} = 4,138$ ,  $\overline{M}_{\Sigma H} = 2,207$  для замкнутого планетарного механизма;  $u_{1\text{opt}} = 6,234$ ,  $u_{2\text{opt}} = 4,171$ ,  $\overline{M}_{\Sigma H} = 9,26$  для рядно-планетарного механизма.

Из рис. 19 видно, что замкнутого планетарный механизм легче рядно-планетарного механизма.

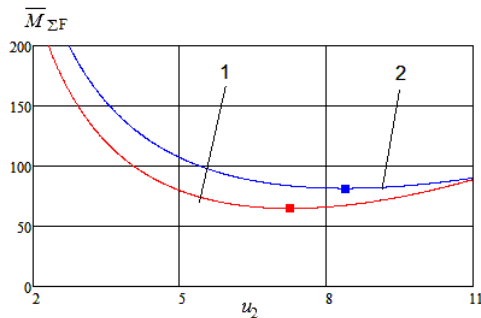


Рисунок 20 – Графики функции  $\overline{M}_{\Sigma F} = \overline{M}_{\Sigma F}(u_1, u_2)$  двух кинематических схем планетарных механизмов:  
1 – замкнутый планетарный механизм;  
2 – рядно-планетарный механизм типа  $2 \times \overline{AI}$

Графики аналогов массы при расчете на изгибную прочность показаны на рис. 20. Минимумы сравниваемых характеристик на рисунке показаны символами квадрата на соответствующих кривых.

Получены следующие результаты:  $u_{1\text{opt}} = 3,723$ ,  $u_{2\text{opt}} = 7,252$ ,  $\overline{M}_{\Sigma F} = 64,816$  для замкнутого планетарного механизма;  $u_{1\text{opt}} = 8,375$ ,  $u_{2\text{opt}} = 3,104$ ,  $\overline{M}_{\Sigma F} = 81,463$  для рядно-планетарного механизма.

Из рис. 20 видно, что замкнутый планетарный механизм легче рядно-планетарного механизма, а также то, что эти характеристики пересекаются. После пересечения легче будет уже рядно-планетарный механизм. Однако, пересечение происходит на верхней границе допустимого диапазона варьируемого передаточного отношения.

**Вариант 2.** Передаточные отношения механизмов удовлетворяют уравнению (36). Их значения равны  $U_{j\delta}^1 = -26$  и  $U_{j\delta}^2 = 27$ . Значения параметров функций аналогов массы механизмов такие же, как и

в первом варианте.

Оптимальные значения отношений  $u_{1\text{opt}}$  и  $u_{2\text{opt}}$  для замкнутого планетарного механизма остались такими же, как и в первом варианте. Для рядно-планетарного механизма найдены следующие значения:  $u_{1\text{opt}} = 6,469$ ,  $u_{2\text{opt}} = 4,174$ ,  $\overline{M}_{\Sigma H} = 9,292$ ;  $u_{1\text{opt}} = 8,602$ ,  $u_{2\text{opt}} = 3,139$ ,  $\overline{M}_{\Sigma F} = 82,663$ .

**Выводы.** Построена математическая модель оценки суммарной массы замкнутого планетарного механизма, образованного двумя простыми планетарными механизмами типа  $\overline{AI}$ , учитывающая их структурные схемы и условия контактной и изгибной прочностей внешних зубчатых зацеплений солнечных колес и сателлитов. Модель представляет собой параметрическую функцию двух переменных, в качестве которых приняты передаточные отношения простых планетарных механизмов типа  $\overline{AI}$ , определенные для структурных схем, когда у таких механизмов эпициклы неподвижные, а входными и выходными звеньями являются соответственно солнечные колеса и водила. В качестве параметров модели выбраны следующие характеристики конструкций простых планетарных механизмов типа  $\overline{AI}$ : числа сателлитов; коэффициенты приведения масс зубчатых колес и водила; коэффициенты неравнопрочности внешних зубчатых зацеплений солнечных колес и сателлитов; число зубьев одного из солнечных колес и коэффициент, характеризующий различие значений чисел зубьев солнечных колес; характеристики материалов зубчатых колес механизмов.

Исследованы дифференциальные свойства и особенности параметрической оптимизации созданных математических моделей в среде программы Mathcad.

Выполнен сравнительный анализ параметрических моделей оценки масс замкнутого планетарного механизма и рядно-планетарного. Определены условия, когда оценки масс сравниваемых механизмов будут одинаковыми.

При принятии соответствующих допущений математическая модель оценки суммарной массы замкнутого планетарного механизма переходит в математическую модель оценки массы рядно-планетарного механизма.

На основе результатов исследований моделей разработано алгоритмическое обеспечение методики оптимального проектирования по критерию минимальной суммарной массы конструкции замкнутых планетарных механизмов, образованных из двух простых планетарных механизмов типа  $\overline{AI}$ .

#### Список литературы

1. Ткаченко В. А. *Планетарные механизмы (оптимальное проектирование)*. Харьков: Нац. Аэрокосм. Ун-т «Харьк. Авиаци. Ин-т», 2003. 446 с.
2. Кирдяшев Ю. М. *Многопоточные передачи дифференциального типа*. Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1981. 223 с.
3. Абрамов В. Т., Гетья А. Н., Матусевич В. А., Шехов А. В. Методика оптимизации многоступенчатого планетарного механизма по критерию массы. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: *Машинознавство та САПР*. Харків, НТУ «ХПІ». 2009. Вип. 29. С. 45–52.

4. Шехов А. В. Оптимизация двухпоточного многоступенчатого планетарного механизма типа  $n \times \overline{AI}$  по критерию минимума массы. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Машинознавство та САПР*. Харків, НТУ «ХПІ». 2014. Вип. 31. С. 201–211.
  5. Rejman E., Rejman M. Gears weight equations - gear chain weight calculation methodology. *Scientific Proceedings VIII International Congress «Machines, Technologies, Materials»*. year XIX». 2011, vol. 2. P. 120–123.
  6. Höhn B.-R., Stahl K., Gwinner F. *Light-Weight Design for Planetary Gear Transmissions* [Light-Weight Design for Planetary Gear Transmissions]. URL: [http://www.geartechnology.com/articles/0913/Light-Weight\\_Design\\_for\\_Planetary\\_Gear\\_Transmissions/](http://www.geartechnology.com/articles/0913/Light-Weight_Design_for_Planetary_Gear_Transmissions/) (дата обращения: 1.08.2013).
  7. Jelena Stefanović-Marinović, Sanjin Troha, Miloš Milovančević. *An application of multicriteria optimization to the two-carrier two-speed planetary gear trains* [An application of multicriteria optimization to the two-carrier two-speed planetary gear trains]. URL: [https://www.researchgate.net/publication/316250507\\_An\\_application\\_of\\_multicriteria\\_optimization\\_to\\_the\\_two-carrier\\_two-speed\\_planetary\\_gear\\_trains](https://www.researchgate.net/publication/316250507_An_application_of_multicriteria_optimization_to_the_two-carrier_two-speed_planetary_gear_trains) (дата обращения: 1.04.2017).
  8. Nana Zhang, Yan Cao, Jiang Du, Qiang Li. *Epicyclic Gear Train Parametric Design Based on the Multi-objective Fuzzy Optimization Method* [Epicyclic Gear Train Parametric Design Based on the Multi-objective Fuzzy Optimization Method]. URL: <https://www.atlantispress.com/proceedings/isct-16/25866917> (дата обращения: 1.12.2016).
  9. Miloš Sedak, Božidar Rosić. *Multi-Objective Optimization of Planetary Gearbox width Adaptive Hybrid Particle Swarm Differential Evolution Algorithm* [Multi-Objective Optimization of Planetary Gearbox width Adaptive Hybrid Particle Swarm Differential Evolution Algorithm]. URL: <https://www.x-mol.com/paper/1354170059992260608> (дата обращения: 1.12.2021).
  10. Kaoutar Daoudi, El Mosthapha Boudi, Mohsine Abdellah. *Genetic Approach for Multiobjective Optimization of Epicyclic Gear Train* [Genetic Approach for Multiobjective Optimization of Epicyclic Gear Train]. URL: <https://www.hindawi.com/journals/mpe/2019/9324903/> (дата обращения: 04.11.2019).
  11. Harsha A. S., Rao K. M. *The optimization of two-stage planetary gear train based on genetic algorithm* [The optimization of two-stage planetary gear train based on genetic algorithm]. URL: <http://www.ijmetmr.com/olapril2017/ASriHarsha-KMallikarjunaRao-67.pdf> (дата обращения: 01.04.2017).
  12. Матусевич В. А., Шарабан Ю. В., Шехов А. В. Параметрическая оптимизация несущей способности замкнутого планетарного механизма, образованного двумя механизмами типа  $\overline{AI}$ . *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Машинознавство та САПР*. Харків, НТУ «ХПІ». 2020. №2(2020). С. 66–77.
- References (transliterated)**
1. Tkachenko V. A. *Planetarnye mekhanizmy (optimal'noe proektirovanie)* [Planetary mechanisms (optimal design)]. Kharkov: National Aerospace University «Khark. Aviat. In-t», 2003. 446 p.
  2. Kirdyashev Yu. M. *Mnogopotochnye peredachi differentsial'nogo tipa* [Multi-stream transmissions of differential type]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., Leningradskoeotdelenie, 1981. 223 p.
  3. Abramov V. T., Getya A. N., Matusевич V. A., Shekhov A. V. *Metodika optimizatsii mnogostupenchatogo planetarnogo mekhanizma po kriteriyu massy* [Methodology of optimization of multi-stage planetary mechanism on the criterion of mass]. *Visnik Natsional'nogo Tehnichnogo Universitetu «Kharkivskiy Politeh-*
  4. Shekhov A. V. Optimizatsiya dvukhpotochnogo mnogostupenchatogo planetarnogo mekhanizma tipa  $n \times \overline{AI}$  po kriteriyu minimuma massy [Optimization of double-flow multi-stage planetary mechanism of type of  $n \times \overline{AI}$  on the criterion of a minimum of mass]. *Visnik Natsional'nogo Tehnichnogo Universitetu «Kharkivskiy Politehnikhniy Institut». Seriya: Mashy'noznavatvo ta SAPR*. [Bulletin of the National Technical University "KhPI"]. Kharkiv, NTU «KhPI», 2009, no. 29, pp. 45–52.
  5. Rejman E., Rejman M. Gears weight equations - gear chain weight calculation methodology, *Scientific Proceedings VIII International Congress "Machines, Technologies, Materials" year XIX*, vol. 2, pp. 120–123 (2011).
  6. Höhn B.-R., Stahl K., Gwinner F. *Light-Weight Design for Planetary Gear Transmissions* [Light-Weight Design for Planetary Gear Transmissions]. URL: [http://www.geartechnology.com/articles/0913/Light-Weight\\_Design\\_for\\_Planetary\\_Gear\\_Transmissions/](http://www.geartechnology.com/articles/0913/Light-Weight_Design_for_Planetary_Gear_Transmissions/) (accessed 1.08.2013).
  7. Jelena Stefanović-Marinović, Sanjin Troha, Miloš Milovančević. *An application of multicriteria optimization to the two-carrier two-speed planetary gear trains* [An application of multicriteria optimization to the two-carrier two-speed planetary gear trains]. Available at: [https://www.researchgate.net/publication/316250507\\_An\\_application\\_of\\_multicriteria\\_optimization\\_to\\_the\\_two-carrier\\_two-speed\\_planetary\\_gear\\_trains](https://www.researchgate.net/publication/316250507_An_application_of_multicriteria_optimization_to_the_two-carrier_two-speed_planetary_gear_trains) (accessed 1.04.2017).
  8. Nana Zhang, Yan Cao, Jiang Du, Qiang Li. *Epicyclic Gear Train Parametric Design Based on the Multi-objective Fuzzy Optimization Method* [Epicyclic Gear Train Parametric Design Based on the Multi-objective Fuzzy Optimization Method]. Available at: <https://www.atlantispress.com/proceedings/isct-16/25866917> (accessed 1.12.2016).
  9. Miloš Sedak, Božidar Rosić. *Multi-Objective Optimization of Planetary Gearbox width Adaptive Hybrid Particle Swarm Differential Evolution Algorithm* [Multi-Objective Optimization of Planetary Gearbox width Adaptive Hybrid Particle Swarm Differential Evolution Algorithm]. Available at: <https://www.x-mol.com/paper/1354170059992260608> (accessed 1.12.2021).
  10. Kaoutar Daoudi, El Mosthapha Boudi, Mohsine Abdellah. *Genetic Approach for Multiobjective Optimization of Epicyclic Gear Train* [Genetic Approach for Multiobjective Optimization of Epicyclic Gear Train]. Available at: <https://www.hindawi.com/journals/mpe/2019/9324903/> (accessed 04.11.2019).
  11. Harsha A. S., K. M. Rao. *The optimization of two-stage planetary gear train based on genetic algorithm* [The optimization of two-stage planetary gear train based on genetic algorithm]. Available at: <http://www.ijmetmr.com/olapril2017/ASriHarsha-KMallikarjunaRao-67.pdf> (accessed 01.04.2017).
  12. Matusевич V. A., Sharaban Yu. V., Shekhov A. V. *Parametricheskaya optimizatsiya nesushchey sposobnosti zamknutogo planetarnogo mekhanizma, obrazovannogo dvumya mekhanizmami tipa  $\overline{AI}$*  [Parametric optimization of bearing capacity of the closed planetary mechanism formed by two mechanisms of type  $\overline{AI}$ ]. *Visnik Natsional'nogo Tehnichnogo Universitetu «Kharkivskiy Politehnikhniy Institut». Seriya: Mashy'noznavatvo ta SAPR*. [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series Engineering and CAD]. Kharkiv, NTU «KhPI», 2020, no. 2, pp. 66–77.

Поступила (received) 07.08.2021

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Матусевич Володимир Анатолійович (Матусевич Владимир Анатольевич, Matusевич Vladimir)** – головний конструктор-директор, ДП «ХАКБ», м. Харків, Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3108-9234>; e-mail: [khadb\\_chief@ukr.net](mailto:khadb_chief@ukr.net)

**Шарабан Юрій Володимирович (Шарабан Юрий Владимирович, Sharaban Jurij)** – заступник головного конструктора, ДП «ХАКБ», м. Харків, Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7295-0927>; e-mail: [suv-kharkov@ukr.net](mailto:suv-kharkov@ukr.net)

**Шехов Олександр Володимирович (Шехов Александр Владимирович, Shehov Aleksandr)** – Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», старший викладач кафедри теоретичної механіки, машинознавства і роботомеханічних систем, м. Харків, Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2312-0155>; e-mail: [shav01@ukr.net](mailto:shav01@ukr.net)