ISSN 2079-0775

УДК 621.833.6 doi: 10.20998/2079-0775.2020.2.08

В. А. МАТУСЕВИЧ, Ю. В. ШАРАБАН, А. В. ШЕХОВ

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ЗАМКНУТОГО ПЛАНЕТАРНОГО МЕХАНИЗМА, ОБРАЗОВАННОГО ДВУМЯ МЕХАНИЗМАМИ ТИПА $\overline{\mathbf{AI}}$

Исследованы зависимости несущей способности замкнутого планетарного механизма, образованного из двух простых планетарных механизмов типа $\overline{\mathbf{AI}}$ как функции двух кинематических параметров, определяющих передаточные отношения простых планетарных механизмов. Зависимости получены из условий обеспечения контактной и изгибной прочности внешних зубчатых зацеплений простых планетарных механизмов. Учтены влияния на выбор значения кинематического параметра простого планетарного механизма числа его сателлитов. Приведено условие, обеспечивающее одинаковую несущую способность замкнутого планетарного механизма с учетом обеспечения как контактной, так и изгибной прочности соответственно. Рассмотрены различные формулировки оптимизационной задачи определения значений кинематических параметров простых планетарных механизмов и методы ее решения. Приведен пример решения оптимизационной задачи в математическом пакете Mathcad.

Ключевые слова: простой планетарный механизм типа $\overline{\mathbf{AI}}$; замкнутый планетарный механизм; несущая способность; контактная прочность зубчатого зацепления; изгибная прочность зубчатого зацепления; оптимизационная задача; параметрическая оптимизация

В. А. МАТУСЕВИЧ, Ю. В. ШАРАБАН, О. В. ШЕХОВ

ПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ НЕСУЧОЇ ЗДАТНОСТІ ЗАМКНУТОГО ПЛАНЕТАРНОГО МЕХАНІЗМУ, УТВОРЕНОГО ІЗ ДВОХ МЕХАНІЗМІВ ТИПУ $\overline{\mathbf{AI}}$

Досліджено залежності несучої здатності замкнутого планетарного механізму, утвореного із двох простих планетарних механізмів типу $\overline{\mathbf{AI}}$, як функції двох кінематичних параметрів, що визначають передаточні відношення простих планетарних механізмів. Залежності отримані з умов забезпечення контактної і згинальної міцності зовнішніх зубчастих зачеплень простих планетарних механізмів. Враховано впливу на вибір значення кінематичного параметра простого планетарного механізму числа його сателітів. Наведена умова, що забезпечує однакову несучу здатність замкнутого планетарного механізму з урахуванням забезпечення як контактної, так і згинної міцності відповідно. Розглянуто різні формулювання оптимізаційної задачі визначення значень кінематичних параметрів простих планетарних механізмів і методи її вирішення. Наведено приклад рішення оптимізаційної задачі в математичному пакеті Mathcad.

Ключові слова: планетарний механізм типу $\overline{\mathbf{AI}}$; замкнутий планетарний механізм; несуча здатність; контактна міцність зовнішнього зубчастого зачеплення; згинальна міцність зовнішнього зубчастого зачеплення; оптимізаційна задача; параметрична оптимізація

V. MATUSEVICH, U. SHARABAN, A. SHEHOV

PARAMETRIC OPTIMIZATION OF THE BEARING CAPACITY OF THE CLOSED PLANETARY MECHANISM FORMED BY TWO MECHANISMS OF TYPE $\overline{\mathbf{AI}}$

The dependences of the bearing capacity of a closed planetary mechanism formed from two simple planetary mechanisms of the type $\overline{\mathbf{AI}}$ as a function of two kinematic parameters that determine the transmission ratios of simple planetary mechanisms are investigational. Dependences are obtained from the conditions of providing contact and bending strength of external gearing of simple planetary mechanisms. The influence of the number of its satellites on the choice of the kinematic parameter of a simple planetary mechanism is taken into account. A condition is given that provides the same bearing capacity of a closed planetary mechanism, taking into account both contact and bending strength, respectively. Various formulations of the optimization problem of determining the values of the kinematic parameters of simple planetary mechanisms and methods for solving it are considered. An example of decision of optimization task is made in the mathematical package Mathcad.

Keywords: simple planetary mechanism type $\overline{\mathbf{AI}}$; closed planetary mechanism; bearing capacity; contact strength of external gearing; bending strength of external gearing; optimization problem; parametric optimization

.

Введение. В конструкциях встроенных редукторов канатных лебедок широкое применение получила зубчатая планетарная передача на базе планетарного механизма типа $\overline{\mathbf{AI}}$. При этом можно выделить два разных варианта кинематических схем применения данного механизма. Первый вариант – многоступенчатая схема, образованная последовательным соединением простых планетарных механизмов типа $\overline{\mathbf{AI}}$ (схема типа $n\times\overline{\mathbf{AI}}$). Второй вариант – схема замкнутого планетарного механизма (замкнутого дифференциального механизма), образованная на базе двух или более простых планетарных механизмов типа $\overline{\mathbf{AI}}$.

Главное преимущества второго варианта кинематической схемы – возможность конструктивного исполнения корончатых колес непосредственно в конструкции барабана лебедки.

Недостатком второго варианта является циркулирующая мощность, которая приводит к снижению КПД встроенного редуктора.

С точки зрения конструирования (синтеза) замкнутого планетарного механизма для конструктора существенной проблемой является отсутствие методов выбора чисел зубьев подобных тем, которые применяют для простых планетарных механизмов. С другой стороны, конструктору часто приходится учитывать ограничения на возможные диаметральные размеры зубчатых колес, которые необходимо встроить в конструкцию барабана лебедки. Поэтому ему приходится выполнять перебор возможных вариантов чисел зубьев, на что уходит немало времени.

Чтобы не заниматься этим перебором, конструкторы часто выбирают кинематическую схему редуктора, в которой используются одинаковые по числам зубьев планетарные механизмы типа $\overline{\mathbf{AI}}$.

Такой выбор, безусловно, упрощает конструкцию редуктора, однако не всегда обеспечивает выполнение условий прочности и выносливости его зубчатых зацеплений.

Учитывая эти обстоятельства, практическую значимость приобретает задача выбора не только реализуемых значений передаточного отношения встроенных редукторов канатных лебедок, построенных по схеме замкнутого планетарного механизма, но и распределения общего передаточного отношения такого редуктора по его образующим планетарным механизмам с учетом обеспечения заданной несущей способности и конструктивных ограничений на диаметральные размеры зубчатых колес.

Цель статьи – разработка методики оптимизации несущей способности замкнутого планетарного механизма, образованного двумя простыми планетарными механизмами типа $\overline{\mathbf{AI}}$ с учетом возможных значений их передаточных отношений.

Анализ литературы. В работе [1] рассмотрены принципы оптимального проектирования различных планетарных механизмов. Замкнутые планетарные механизмы в этой работе рассмотрены только с позиций их строения (образования) и кинематического анализа. Теория и вопросы проектирования замкнутых многоступенчатых передач планетарно-дифференциального типа изложены в работе [2]. Но в этой работе вопросы анализа несущей способности рассматриваемых механизмов не представлены. В работах [3–6] освещены методы повышения нагрузочной способности конструкций планетарных зубчатых передач, образованных на основе кинематических схем простых планетарных механизмов. Замкнутые планетарные передачи в этих работах не рассматриваются, но методы, которые представлены в этих работах, могут быть применены для увеличения нагрузочной способности замкнутых планетарных передач. Анализ двухступенчатых планетарных передач с циркуляцией мощности в замкнутом контуре приведен в работе [7]. Оптимальное проектирование конструкции замкнутого планетарного механизма, основанное на его динамической модели, рассматривается в работах [8, 9]. В данных работах непосредственно несущая способность механизма не анализируется, однако, параметрическая оптимизация, предложенная авторами, преследует цель повышения несущей способности проектируемого механизма. Анализ несущей способности простого планетарного механизма типа $\overline{\mathbf{AI}}$ оптимального по критерию массы рассмотрен в работе [10]. Анализ несущей способности конструкции оптимальной по массе двухступенчатого планетарного механизма типа $2\times\overline{\mathbf{AI}}$ приведен в работе [11]. В работах [12, 13] рассматривается параметрическая оптимизация конструкций простого планетарного механизма типа $\overline{\mathbf{AI}}$, основанная на генетическом алгоритме поиска экстремума функции проектированию. Постановки оптимизационных задач в этих работах учитывают ограничения, связанные с контактной и изгибной прочностью зубчатых колес.

Материалы исследований. На рис. 1 показана кинематическая схема замкнутого планетарного механизма. Обозначения зубчатых колес и звеньев механизма использованы такие же, как и в работе [14].

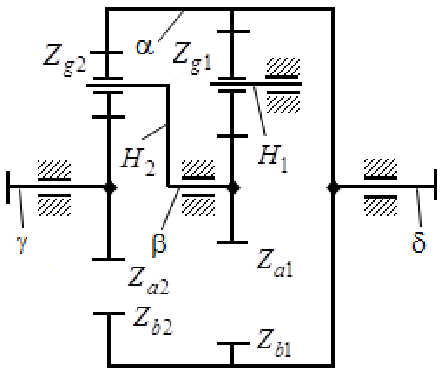

Рисунок 1 – Замкнутый планетарный механизм

Схема образования рассматриваемого замкнутого планетарного механизма изображена на рис. 2. Здесь утолщенными линиями показаны звенья механизмов, которые соединяются между собой.

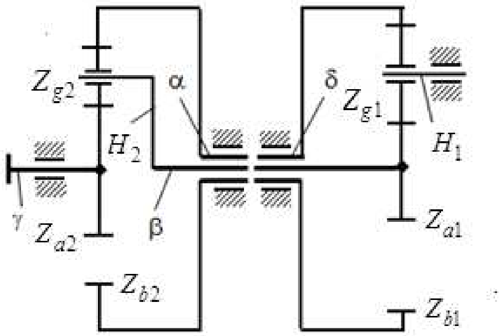

Рисунок 2 – Схема образования замкнутого планетарного механизма

Замкнутый планетарный механизм образован из двух одновенцовых простых планетарных механизмов типа $\overline{\mathbf{AI}}$. Первый механизм – дифференциальный, второй – планетарный, в котором заторможено водило H_1.

Механизм Z_{a1}-Z_{g1}-Z_{b1}-H_1 является кинематической цепью замыкания (КЦЗ) дифференциального механизма Z_{a2}-Z_{g2}-Z_{b2}-H_2.

Основные звенья дифференциального механизма, которые соединяются КЦЗ, обозначены как α и β.

Входной вал γ непосредственно связан с центральным подвижным колесом Z_{a2} дифференциального механизма. Выходной вал δ связан с центральным подвижным колесом Z_{b2} дифференциального механизма и центральным подвижным колесом Z_{b1} КЦЗ.

Передаточное отношение механизма от вала γ к валу δ, показанного на рис. 1, определяется по формуле [14]

$$U_{\gamma\delta} = 1 - (p_1+1)(p_2+1), \quad (1)$$

где $p_1 = \dfrac{Z_{b1}}{Z_{a1}}$, $p_2 = \dfrac{Z_{b2}}{Z_{a2}}$ – кинематические параметры КЦЗ и дифференциального механизма.

Для планетарного механизма типа $\overline{\mathbf{AI}}$ возможные значения кинематического параметра $p = Z_b / Z_a$ зависят от числа сателлитов Z_g. Примем возможные значения параметров p_1 и p_2 на интервале чисел [3, 7].

Рассмотрим передаточное отношение (1) как функцию двух переменных – параметров p_1 и p_2. На рис. 3 показан график функции $U_{\gamma\delta} = U_{\gamma\delta}(p_1, p_2)$, построенный на равномерной дискретной сетке параметров $(p_{1i}, p_{2i,j})$, где $i = \overline{1, N_1}$, и $j = \overline{1, N_2}$. Здесь N_1, N_2 – числа отсчетов соответственно параметра p_1 и p_2.

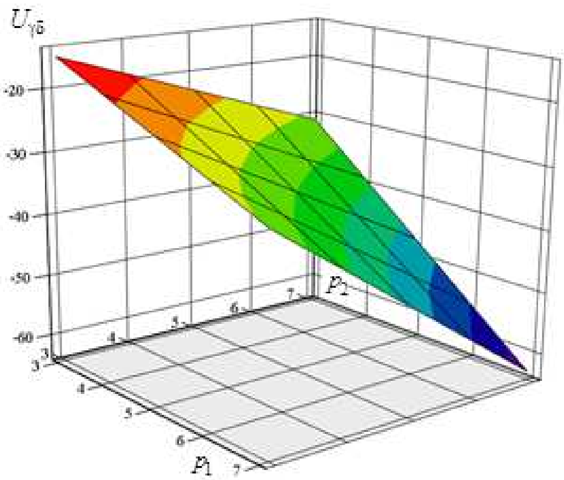

Рисунок 3 – График функции $U_{\gamma\delta} = U_{\gamma\delta}(p_1, p_2)$

Как видно из рис. 3, в заданном диапазоне изменения параметров p_1 и p_2 функция $U_{\gamma\delta}(p_1, p_2)$ является гладкой непрерывной поверхностью, которая не имеет локальных особенностей (разрывов, минимумов, максимумов).

Если считать, что заданы значения передаточного отношение $U_{\gamma\delta}$ и параметра p_1, то значение параметра p_2 можно найти с помощью следующей функции

$$p_2(U_x, p_x) = \frac{1-U_x}{p_x+1} - 1. \quad (2)$$

Здесь задаваемые значения передаточного отношения $U_{\gamma\delta}$ и параметра p_1 обозначены как U_x и p_x. При этом на параметры U_x и p_x наложены следующие ограничения: $3 \le p_x \le 7$; $-63 \le U_x \le -15$. Вид функции $p_2 = p_2(U_x, p_x)$ показан на рис. 4.

Однако, с учетом ограничений на аргументы функции $p_2(U_x, p_x)$, она не является однозначной функцией. Это означает, что заданному набору значений (U_x, p_x) соответствуют два значения параметра p_2, причем одно из них может не попадать в интервал чисел [3, 7].

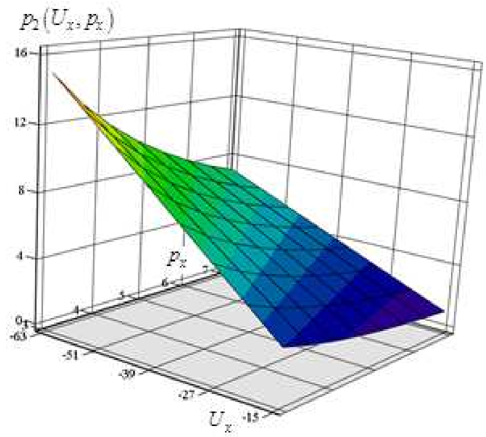

Рисунок 4 – График функции $p_2 = p_2(U_x, p_x)$

На рис. 5 показан график функции $p_2(U_x, p_x)$ с учетом ограничений, накладываемых на ее значения. Здесь плоскости 1 и 2, параллельные плоскости (U_x, p_x), ограничивают значения функции $p_2(U_x, p_x)$ в интервале чисел [3, 7]. Цифрой 3 указана то часть поверхности графика функции, которая является допустимой.

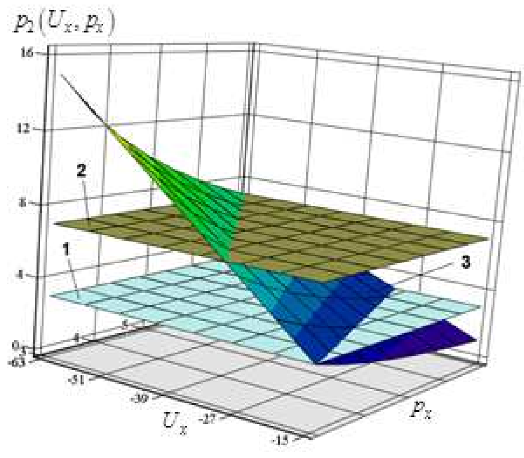

Рисунок 5 – График функции $p_2 = p_2(U_x, p_x)$ с учетом ограничений на ее значения

Запишем основные соотношения между моментами, действующими на основные звенья замкнутого планетарного механизма. Из [14] имеем следующие соотношения:

$$M_\gamma = M_{a2} = \frac{M_\delta}{(p_1+1)(p_2+1)-1}; \quad (3)$$

$$M_\alpha = M_{b2} = M_\delta \frac{p_2}{(p_1+1)(p_2+1)-1}; \quad (4)$$

$$M_\beta = M_{H2} = -M_{a1} = M_\delta \frac{p_2+1}{(p_1+1)(p_2+1)-1}; \quad (5)$$

$$M_{b1} = M_\delta \frac{p_1(p_2+1)}{(p_1+1)(p_2+1)-1}; \quad (6)$$

$$M_{H1} = -M_\delta \frac{(p_1+1)(p_2+1)}{(p_1+1)(p_2+1)-1}. \quad (7)$$

Введем следующие функции моментов (моментные функции):

$$M_{b1}(p_x, p_y, M) = M \frac{p_x(p_y+1)}{(p_x+1)(p_y+1)-1}; \quad (8)$$

$$M_{b2}(p_x, p_y, M) = M \frac{p_y}{(p_x+1)(p_y+1)-1}. \quad (9)$$

Здесь параметрами p_x, p_y и M обозначены соответственно p_1, p_2 и момент M_δ.

Для заданных значения передаточного отношения $U_{\gamma\delta} = U^*_{\gamma\delta}$, интервала возможных значений параметра p_1 и значения момента на выходном валу замкнутого планетарного механизма $M_\delta = M^*_\delta$, применяя функцию $p_2(U_x, p_x)$, можно построить параметрические зависимости функций вида (8) и (9).Пример такого построения показан на рис. 6, здесь зависимости были построены при следующих значениях: $U^*_{\gamma\delta} = -26{,}04$; $M^*_\delta = 1500$ Н·м. Линии, обозначенные цифрами 1 и 2, изображают соответственно зависимости $M_{b1}(p_x, p_y, M)$ и $M_{b2}(p_x, p_y, M)$, а линия 3 – величину M^*_δ.

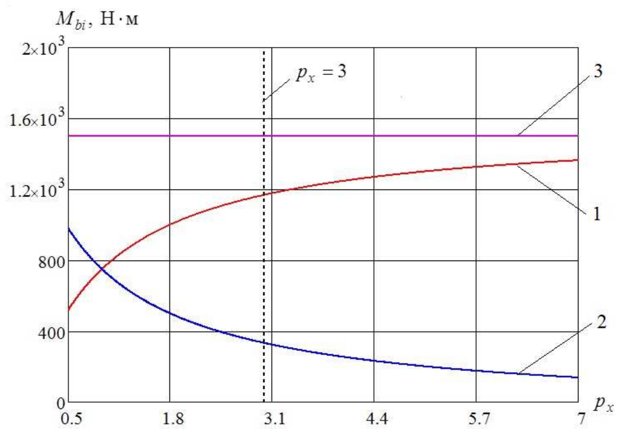

Рисунок 6 – Графики функций $M_{bi} = M_{bi}(p_x, p_y, M)$

Как видно из рис. 6, графики зависимостей (8) и (9) в интервале допустимых значений параметра p_1 непересекаются. Следовательно, отсутствует возможность реализации условия $M_{b1} = M_{b2} = M_\delta / 2$.

Это условие можно реализовать, если значение параметра p_1 будет меньше 1 (см. рис. 6), но такое невозможно для простого планетарного механизма. С другой стороны, если приравнять правые части соотношений (6) и (7) друг–другу, то получим условие вида:

$$p_1(p_2+1) - p_2 = 0, \quad (10)$$

из которого находим следующие соотношения между значениями параметров p_1 и p_2:

$$p_1 = \frac{p_2}{1+p_2}, \quad (11)$$

$$p_2 = \frac{p_1}{1-p_1}. \quad (12)$$

Из формулы (1) выразим значение параметра p_2 через значения других величин, входящих в эту формулу:

$$p_2 = -\frac{U_{\gamma\delta} + p_1}{p_1+1}. \quad (13)$$

Подставив выражение (13) в соотношение (11), получаем

$$p_1^* = \frac{U_{\gamma\delta}}{U_{\gamma\delta} - 2}. \quad (14)$$

Если воспользоваться формулой (12), в которую подставлена формула (14), то получим

$$p_2^* = -\frac{U_{\gamma\delta}}{2}. \quad (15)$$

Формулы (14) и (15) определяют значения параметров p_1 и p_2, при которых моменты M_{b1} и M_{b2} имеют равные значения. Если воспользоваться этими формулами применительно к ранее рассмотренному примеру, то получим $p_1^* = 0{,}9287$ и $p_2^* = 13{,}02$. Но такие значения не являются для нашего примера допустимыми.

Введем следующие функции моментов:

$$M_{a1}(p_x, p_y, M) = -M \frac{(p_y+1)}{(p_x+1)(p_y+1)-1}; \quad (16)$$

$$M_{a2}(p_x, p_y, M) = M \frac{1}{(p_x+1)(p_y+1)-1}. \quad (17)$$

Параметрические функции (16) и (17) соответствуют функциям (5) и (3) соответственно.

Вид функций (16) и (17) применительно к нашему примеру показан на рис. 7. На этом же рисунке пунктирной линией изображена зависимость отношения этих функций $m_{a1a2} = |M_{a1}| / M_{a2}$.

Введенные моментные параметрические функции позволяют конструктору оценить диапазон значений моментов, действующих на основные звенья замкнутого планетарного редуктора, построенного на основе кинематической схемы, показанной на рис. 1.

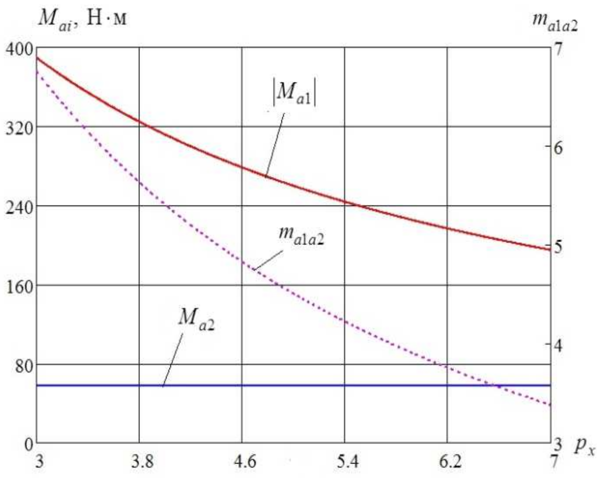

Рисунок 7 – Графики функций $M_{ai} = M_{ai}\left(p_x, p_y, M\right)$

Возвращаясь к нашему примеру, отметим следующее. Числовые значения моментных функций при $p_1 = p_2 = 4,2$ (случай использования двух одинаковых простых планетарных механизмов, имеющих равные передаточные отношения и одинаковые по числу зубьев соответствующие зубчатые колеса) равны: M_{b1}=1258,1 Н·м, M_{b2}=141,9 Н·м, M_{a1}=299,5 Н·м, M_{a2}=57,6 Н·м. При этом имеем такие отношения моментов: $m_{b1b2} = M_{b1}/M_{b2}$ =5,2; $m_{a1a2} = |M_{a1}|/M_{a2}$ = 5,2.

В общем случае из вышеприведенных формул получим отношения моментов, которые определяются по формулам:

$$m_{b1b2} = M_{b1}/M_{b2} = \frac{p_1\left(p_2+1\right)}{p_2}; \tag{18}$$

$$m_{a1a2} = |M_{a1}|/M_{a2} = p_2 + 1 . \tag{19}$$

Если $p_1 = p_2$, то эти формулы дают один и тот же результат.

Несущая способность планетарного замкнутого механизма задается величиной допускаемого момента, прикладываемого к выходному валу δ, которую обозначим как $\left[M_\delta\right]$. Допускаемые величины моментов M_{ai} и M_{bi} обозначим, соответственно, как $\left[M_{ai}\right]$ и $\left[M_{bi}\right]$, где $i=\overline{1,2}$. Эти значения определяются формулами (3), (5), (4) и (6) соответственно.

Несущая способность простого планетарного механизма типа $\overline{\mathbf{AI}}$ определяется несущей способностью его внешнего зацепления зубчатых колес Z_{ai} - Z_{gi}, где $i=\overline{1,2}$. Допускаемый момент для этого зацепления равен

$$\left[M_{agi}\right] = \frac{\left[M_{ai}\right]}{k_i}\Omega_{iH(F)}, \tag{20}$$

где $i=\overline{1,2}$ – номер планетарного механизма;

k_i – число сателлитов i-го планетарного механизма;

$\Omega_{H(F)i}$ – коэффициент неравномерности распределения нагрузки среди сателлитов при расчете на контакт (H) или изгиб (F) для i–го планетарного механизма.

Отношение допускаемых моментов (20) равно

$$\frac{\left[M_{ag1}\right]_{H(F)}}{\left[M_{ag2}\right]_{H(F)}} = \frac{k_2\Omega_{H(F)1}\left[M_{a1}\right]}{k_1\Omega_{H(F)2}\left[M_{a2}\right]} = \frac{k_2\Omega_{H(F)1}}{k_1\Omega_{H(F)2}}\left(p_2+1\right). \tag{21}$$

Как видно из формулы (21) в случае, когда первый множитель равен 1, отношение допускаемых моментов такое же, как и в формуле (19).

Рассмотрим контактную прочность зубьев внешних зацеплений зубчатых колес Z_{ai} - Z_{gi} ($i=\overline{1,2}$).

Запишем условие контактной прочности при действии максимальной нагрузки

$$\sigma_{H\max i} = \left(Z_E Z_H Z_\varepsilon\right)_i \sqrt{\frac{2M_i K_{Hi}\left(u_i+1\right)}{b_{wi}d_i^2 u_i}} \le \sigma_{HP\max i}, \tag{22}$$

где $i=\overline{1,2}$ – номер планетарного механизма;

$M_i = M_{agi}$ – момент, передаваемый зубчатым колесом Z_{ai} в зацеплении Z_{ai} - Z_{gi};

$u_i = \left|u_{agi}^{Hi}\right| = \dfrac{Z_{gi}}{Z_{ai}}$ – модуль передаточного отношение зацепления Z_{ai} - Z_{gi} при остановленном водиле H_i;

b_{wi}, d_i – рабочая ширина зубчатого венца и делительный диаметр зубчатого колеса Z_{ai} зацепления Z_{ai} - Z_{gi};

K_{Hi} – коэффициент нагрузки при расчете на контактную прочность зацепления Z_{ai} - Z_{gi}.

Обозначения не перечисленных параметров в этой формуле такие же, как принято в ГОСТ 21354-87.

Заметив, что

$$\left|u_{agi}^{Hi}\right| = \frac{Z_{gi}}{Z_{ai}} = \frac{Z_{bi}-Z_{ai}}{Z_{ai}} = \frac{p_i-1}{2},$$

получим

$$\sigma_{H\max i}=\left(Z_E Z_H Z_\varepsilon\right)_i\sqrt{\frac{2M_i K_{Hi}\left(p_i+1\right)}{b_{wi}d_i^2\left(p_i-1\right)}}. \qquad (23)$$

Величину допускаемого момента при расчете на контактную прочность, приложенного к зубчатому колесу Z_{ai}, получим, приравняв левую и правую части условия (22),

$$\left[M_i\right]_H=\frac{\sigma^2_{HP\max i}b_{wi}d_i^2\left(p_i-1\right)}{\left(Z_E Z_H Z_\varepsilon\right)_i^2 K_{Hi}2\left(p_i+1\right)}. \qquad (24)$$

Приравняв моменты $\left[M_{agi}\right]_H$ и $\left[M_i\right]$ друг–другу, получаем

$$\left[M_{ai}\right]=\frac{b_{wi}d_i^2 k_i\left(p_i-1\right)\sigma^2_{HP\max i}}{2\left(p_i+1\right)\Omega_{Hi}\left(Z_E Z_H Z_\varepsilon\right)_i^2 K_{Hi}}. \qquad (25)$$

Величина допускаемого момента $\left[M_\delta\right]$, прикладываемого к выходному валу δ, определяется из следующих соотношений:

$$\left[M_\delta\right]=\left[M_{a1}\right]\left(\left(p_1+1\right)\left(p_2+1\right)-1\right), \qquad (26)$$

$$\left[M_\delta\right]=\left[M_{a2}\right]\frac{\left(p_1+1\right)\left(p_2+1\right)-1}{p_2+1}. \qquad (27)$$

Из равенства левых частей формул (26) и (27) следует соотношение (19).

Перепишем соотношение (19) к следующему виду:

$$\frac{k_1\left(p_1-1\right)}{2\Omega_{H1}\left(p_1+1\right)}\Pi_{H1}=\frac{k_2\left(p_2-1\right)}{2\Omega_{H2}\left(p_2+1\right)^2}\Pi_{H2}, \qquad (25)$$

где $\Pi_{H1}=\dfrac{b_{w1}d_1^2\sigma^2_{HP\max 1}}{\left(Z_E Z_H Z_\varepsilon\right)_1^2 K_{H1}}$ – коэффициент прочности при расчете на контакт зацепления Z_{a1}-Z_{g1};

$\Pi_{H2}=\dfrac{b_{w2}d_2^2\sigma^2_{HP\max 2}}{\left(Z_E Z_H Z_\varepsilon\right)_2^2 K_{H2}}$ – коэффициент прочности при расчете на контакт зацепления Z_{a2}-Z_{g2}.

Формулу (28) перепишем к виду

$$\frac{k_1\Omega_{H2}\Pi_{H1}}{k_2\Omega_{H1}\Pi_{H2}}=\frac{\left(p_1+1\right)\left(p_2-1\right)}{\left(p_1-1\right)\left(p_2+1\right)^2}. \qquad (29)$$

Соотношение (29) определяет условие обеспечения максимальной несущей способности при расчете на контактную прочность замкнутого планетарного механизма, кинематическая схема которого показана на рис. 1.

Рассмотрим изгибную прочность зубьев внешних зацеплений зубчатых колес Z_{ai}-Z_{gi}.

Условие изгибной прочности внешнего зацепления зубчатых колес Z_{ai}-Z_{gi} при действии максимальной нагрузки имеет вид

$$\sigma_{F\max ai}=\frac{2M_i z_{ai}K_{Fi}\left(Y_{FS}\right)_{ai}}{b_{ai}d_{ai}^2}\le\sigma_{FP\max ai}, \qquad (30)$$

$$\sigma_{F\max gi}=\sigma_{F\max ai}\frac{b_{ai}\left(Y_{FS}\right)_{gi}}{b_{gi}\left(Y_{FS}\right)_{ai}}\le\sigma_{F\max gi}, \qquad (31)$$

где $i=\overline{1,2}$ – номер планетарного механизма;

$M_i=M_{agi}$ – момент, передаваемый зубчатым колесом Z_{ai} в зацеплении Z_{ai}-Z_{gi};

z_{ai} – число зубьев солнечного колеса Z_{ai};

d_{ai} – делительный диаметр солнечного колеса Z_{ai};

b_{ai}, b_{gi} – ширины зубчатых венцов солнечного колеса Z_{ai} и сателлита Z_{gi} соответственно.

Обозначения не перечисленных параметров в формулах (30) и (3) такие же, как принято в ГОСТ 21354-87.

Введем следующий параметр (отношение)

$$\frac{b\sigma_{FP\max}}{Y_{FS}}=\min\left(\left(\frac{b\sigma_{FP\max}}{Y_{FS}}\right)_{ai},\left(\frac{b\sigma_{FP\max}}{Y_{FS}}\right)_{gi}\right) \qquad (32)$$

.

Величина допускаемого момента, приложенного к зубчатому колесу Z_{ai}, при расчете на изгиб определяется по формуле

$$\left[M_i\right]_F=\frac{b\sigma_{FP\max}}{Y_{FS}}\cdot\frac{d_{ai}}{2K_{Fi}}. \qquad (33)$$

С учетом соотношения (20) получаем:

$$\left[M_{ai}\right]_F=\frac{b\sigma_{FP\max}}{Y_{FS}}\cdot\frac{k_i d_{ai}}{2\Omega_{Fi}K_{Fi}}. \qquad (34)$$

Величина допускаемого момента, прикладываемого к выходному валу δ при расчете на изгибную прочность, определяется из следующих соотношений:

$$\left[M_\delta\right]=\left[M_{a1}\right]_F\left(\left(p_1+1\right)\left(p_2+1\right)-1\right), \qquad (35)$$

$$\left[M_\delta\right]=\left[M_{a2}\right]_F\frac{\left(p_1+1\right)\left(p_2+1\right)-1}{p_2+1}. \qquad (36)$$

Приравнивая правые части выражений (35) и (36) и учитывая (34), получаем:

$$\left(\frac{b\sigma_{FP\max}}{Y_{FS}}\right)_1 \frac{k_1 d_{a1}}{\Omega_{F1} K_{F1}} = \\ = \left(\frac{b\sigma_{FP\max}}{Y_{FS}}\right)_2 \frac{k_2 d_{a2}}{\Omega_{F2} K_{F2}(p_2+1)} . \qquad (37)$$

Перепишем выражение (37) к виду

$$\frac{\Pi_{F1} k_1 \Omega_{F2}}{\Pi_{F2} k_2 \Omega_{F1}} = \frac{1}{p_2+1}, \qquad (38)$$

где $\Pi_{F1} = \left(\frac{b\sigma_{FP\max}}{Y_{FS}}\right)_1 \frac{d_{a1}}{K_{F1}}$ – коэффициент прочности зубчатого зацепления Z_{a1} - Z_{g1} при расчете на изгиб;

$\Pi_{F2} = \left(\frac{b\sigma_{FP\max}}{Y_{FS}}\right)_2 \frac{d_{a2}}{K_{F2}}$ – коэффициент прочности зубчатого зацепления Z_{a2} - Z_{g2} при расчете на изгиб.

Разнопрочности внешних зацеплений Z_{ai} - Z_{gi} при расчете на контактную и изгибную прочности характеризуются соответственно следующими коэффициентами:

$$\Pi_H = \Pi_{H1}/\Pi_{H2} , \qquad (39)$$

$$\Pi_F = \Pi_{F1}/\Pi_{F2} . \qquad (40)$$

Зависимости коэффициентов Π_H и Π_F от параметров p_1 и p_2 при заданном значении передаточного отношения $U^*_{\gamma\delta} = -26,04$, а также при условиях $k_1 = k_2$ и $\Omega_{H(F)1} = \Omega_{H(F)2}$, показаны на рис. 8.

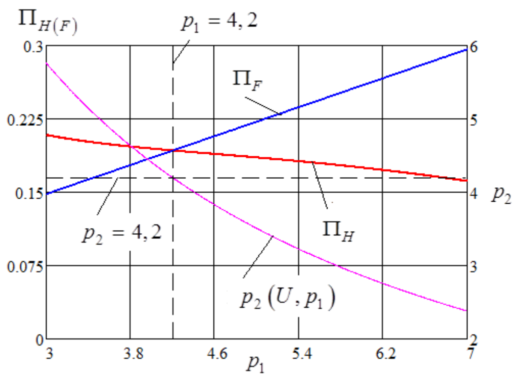

Рисунок 8 – Графики функций $\Pi_{H(F)} = \Pi_{H(F)}(p_1, p_2)$

На рис. 8 также изображен график функции $p_2 = p_2(U, p_1)$, которая определяется по формуле (2).

Из рис. 8 видно, что графики зависимостей коэффициентов $\Pi_H(p_1, p_2)$ и $\Pi_F(p_1, p_2)$ пересекаются при значениях параметров $p_1 = p_2 = 4,2$. Если приравнять правые части выражений (29) и (39) друг–другу, то получим:

$$\frac{(p_1+1)(p_2-1)}{(p_1-1)(p_2+1)} = 1,$$

откуда следует, что $p_1 = p_2$. Из (2) можно найти данное значение параметров, которое равно $\sqrt{1-U}-1$ (передаточное отношение U берется со своим знаком). Для зависимостей, показанных на рис. 8, имеем $U^*_{\gamma\delta} = -26,04$. что по формуле дает $p_1 = p_2 = 4,2$.

Уравнения (1). (29) и (39) позволяют найти значения параметров p_1 и p_2, при которых реализуется требуемое значение передаточного отношения $U^*_{\gamma\delta}$ и обеспечивается максимально возможная несущая способность замкнутого планетарного механизма при расчете на контактную или изгибную прочности в случае действия максимальной нагрузки.

Рассмотрим решение системы двух уравнений, образованных уравнениями (1) и (29). При этом считается заданными передаточное отношение $U_{\gamma\delta}$ и левая часть уравнения (29).

Решаемая система имеет вид

$$\left.\begin{aligned} 1-(p_1+1)(p_2+1) = U^*_{\gamma\delta} \\ \frac{(p_1+1)(p_2-1)}{(p_1-1)(p_2+1)^2} = k_{\Omega H}\Pi_H \end{aligned}\right\}, \qquad (41)$$

где $k_{\Omega H} = \frac{k_1 \Omega_{H2}}{k_2 \Omega_{H1}}$.

Систему (41) можно решить, как графическим, так и аналитическими методами.

На рис. 9 изображено решение системы (40) графическим методом для следующих исходных данных: $U^*_{\gamma\delta} = -26,04$; $k_{\Omega H} = 1$; $\Pi_H = 0,17$.

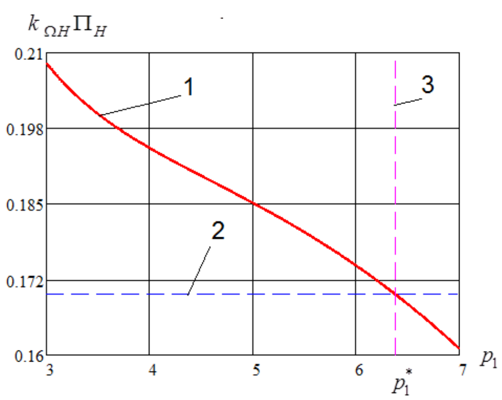

Рис. 9 – Графическое решение системы уравнений (41)

Строится график (линия 1) зависимости

ISSN 2079-0775

произведения $k_{\Omega H}\Pi_H$ от значений параметра p_1 (левая часть второго уравнения системы (41)). При этом значения параметра p_2 определяются функцией (2). Проводится горизонтальная линия 2, изображающая заданное значение произведения $k_{\Omega H}\Pi_H$. Эта линия пересекает линию 1 при значении параметра p_1^* (вертикальная линия 3). По значению параметра p_1^* вычисляется значение параметра p_2^* из первого уравнения системы уравнений (41). Для рассматриваемого примера имеем $p_1^* = 6,382$ и $p_2^* = 2,663$.

Аналитическое решение системы уравнений (41) основано на приведении исходной системы двух уравнений относительно двух неизвестных к одному алгебраическому уравнению относительно одного неизвестного.

Введем следующие переменные:

$$a = p_1 + 1,\ b = p_2 + 1 \qquad (42)$$

Перепишем исходную систему уравнений (41) к виду

$$\left.\begin{aligned} &1 - ab = U_{\gamma\delta}^* \\ &\frac{a(b-2)}{(a-2)b^2} = k_{\Omega H}\Pi_H \end{aligned}\right\}. \qquad (43)$$

Из первого уравнения системы (43) выразим переменную *a*через переменную *b*

$$a = \frac{1 - U_{\gamma\delta}^*}{b},$$

подставим это выражение во второе уравнение системы (43), тогда получим

$$\frac{(b-2)\left(1 - U_{\gamma\delta}^*\right)}{\left(1 - U_{\gamma\delta}^* - 2b\right)} = k_{\Omega H}\Pi_H .$$

Это выражение после ряда преобразований представим в виде кубического уравнения относительно переменной *b*

$$b^3 - \frac{1 - U_{\gamma\delta}^*}{2} b^2 + \frac{1 - U_{\gamma\delta}^*}{2k_{\Omega H}\Pi_H} b - \frac{1 - U_{\gamma\delta}^*}{k_{\Omega H}\Pi_H} = 0 . \qquad (44)$$

Решаем уравнение (44) любым методом (графическим, численным или аналитическим). Из трех корней этого уравнения выбираем тот, который удовлетворяет условиям, которые наложены на значения параметров p_i $(i = \overline{1,2})$. Обозначим этот корень как b^*. Затем находим $p_2^* = b^* - 1$ и соответственно p_1^*. Отметим, что корни уравнения (44) можно определить аналитическим методом, а именно по формуле Кардана. При решении этого уравнения в математическом пакете Mathcad применительно к нашему примеру было получено следующее значение корня уравнения (44) – $b^* = 3,663$. Значение переменной *a* составило $a^* = 7,282$. При этом значения параметров p_i^* – $p_1^* = 6,382$ и $p_2^* = 2,663$.

Если выразить переменную *b*через переменную *a*, то получим следующее кубическое уравнение

$$a^3 - \frac{1 - U_{\gamma\delta}^*}{2} a^2 + \frac{\left(1 - U_{\gamma\delta}^*\right)^2 k_{\Omega H}\Pi_H}{2} a - \left(1 - U_{\gamma\delta}^*\right)^2 k_{\Omega H}\Pi_H = 0 . \qquad (45)$$

Решение уравнения (45) приводит решение системы (43) к таким же результатам, что и решение уравнения (44).

Для случая обеспечения несущей способности замкнутого планетарного механизма при расчете на изгибную прочность при действии максимальной нагрузки система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &1 - (p_1 + 1)(p_2 + 1) = U_{\gamma\delta}^* \\ &\frac{1}{\mathrm{p}_2 + 1} = k_{\Omega F}\Pi_F \end{aligned}\right\}, \qquad (46)$$

где $k_{\Omega F} = \dfrac{k_1\Omega_{F2}}{k_2\Omega_{F1}}$.

Эта система решается просто. Из второго уравнения определяем параметр p_2^* по формуле:

$$p_2^* = \frac{1}{k_{\Omega F}\Pi_F} - 1 .$$

Из первого уравнения системы (46) находим параметр

$$p_1^* = \left(1 - U_{\gamma\delta}^*\right) k_{\Omega F}\Pi_F - 1 .$$

Пусть задано: $U_{\gamma\delta}^* = -26,04$; $k_{\Omega F} = 1$; $\Pi_F = 0,273$. Согласно вышеприведенным формулам, получим $p_1^* = 6,382$ и $p_2^* = 2,663$. Полученные решения можно было получить с помощью графиков, показанных на рис. 8 (графический метод решения системы уравнений (46)).

Рассмотрим более общую постановку решения задачи обеспечения несущей способности замкнутого планетарного механизма, кинематическая схема которого показана на рис. 1. Заданы следующие условия: требуемое значение передаточного отношения $U_{\gamma\delta}^*$; точность реализации требуемого передаточного отношения механизма $\pm\Delta U$; максимальное значение момента на выходном валу механизма $M_{\delta\max}^*$; ограничения на диаметральные размеры зубчатых колес с внутренними зубьями; числа сателлитов k_1 и k_2; значения коэффициентов $\Omega_{H(F)1}$ и $\Omega_{H(F)2}$; значения коэффициентов $\Pi_{H(F)1}$ и $\Pi_{H(F)2}$; точности выполнения условий обеспечения максимальной несущей способности при расчете на контакт $\pm\Delta_H$ и на изгиб $\pm\Delta_F$ соответственно; ограничения на значения параметров $p_{i\min}$ и $p_{i\max}$, где $i=\overline{1,2}$. Необходимо подобрать подходящие (оптимальные) значения параметров p_{1opt} и p_{2opt}.

Задача оптимального выбора значений параметров p_1 и p_2 состоит в том, чтобы при $p_1 \to p_{1opt}$ и $p_2 \to p_{2opt}$ выполнялись следующие условия:

$$\left.\begin{array}{l} p_{1\min} \le p_1 \le p_{1\max},\, p_{2\min} \le p_2 \le p_{2\max} \\ \left|1-(p_1+1)(p_2+1)-U^*_{\gamma\delta}\right| \le \Delta U \\ \left|\dfrac{(p_1+1)(p_2-1)}{(p_1-1)(p_2+1)^2}-k_{\Omega H}\Pi_H\right| \le \Delta_H \\ \left|\dfrac{1}{p_2+1}-k_{FH}\Pi_F\right| \le \Delta_F \end{array}\right\}. \qquad (47)$$

На рис. 10 изображена область поиска (выделена штриховкой) оптимальных значений параметров p_1 и p_2 для задачи, которая описывается условиями (47).

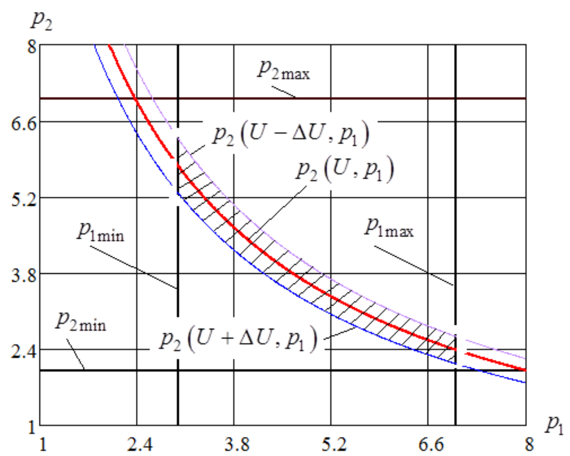

Рисунок 10 – Область поиска оптимальных значений параметров p_1 и p_2

Графики, показанные на рис. 10, были построены для следующих исходных данных: $U^*_{\gamma\delta}=-26{,}04$; $\Delta U=\pm 2$; $p_{1\min}=3$ и $p_{1\max}=7$; $p_{2\min}=2$ и $p_{2\max}=7$. Значение абсолютной ошибки $\Delta U=\pm 2$ было выбрано таким, чтобы показать на одном графике все границы допустимой области поиска оптимальных значений параметров p_1 и p_2.

Возможные три различных случая постановки оптимизационной задачи. Первый случай – это формулировка вида (47), т.е. когда имеются ограничения, записанные в виде неравенств. Второй случай – записываются три уравнения вида (1), (29) и (39). В этом случае имеем переопределенную систему уравнений. Третий случай – записываются как уравнения, так и неравенства (ограничения).

Решение оптимизационной задачи (47) просто реализовать в математическом пакете Mathcad. На рис. 11 показан фрагмент документа Mathcadрешения оптимизационной задачи (47), сформулированной на основе неравенств (первый случай). Результаты решения в значительной степени зависят от выбранных начальных приближений, значений задаваемых ошибок и выбранного метода решения (настройка внутренней функции *Find* программы Mathcad).

<---Исходные данные --->

$U_{\gamma\delta} := -26.04 \qquad \Pi_H := 0.17 \qquad \Pi_F := 0.273$

$\Delta U := 0.00001 \qquad \Delta_H := 0.00001 \qquad \Delta_F := 0.00001$

$p_1 := 6 \qquad p_2 := 3$ <--- Начальные приближения решения

Given

$3 \le p_1 \le 7$

$2 \le p_2 \le 7$

$\left|1-(1+p_1)\cdot(1+p_2)-U_{\gamma\delta}\right| \le \Delta U$

$\left|\dfrac{(p_1+1)\cdot(p_2-1)}{(p_1-1)\cdot(p_2+1)^2}-\Pi_H\right| \le \Delta_H$

$\left|\dfrac{1}{1+p_2}-\Pi_F\right| \le \Delta_F$

$Popt := Find(p_1, p_2) \qquad Popt = \begin{pmatrix} 6.382 \\ 2.663 \end{pmatrix}$ <--- Вектор решения

Рисунок 11 – Нахождение оптимальных параметров p_1 и p_2

Заметим, что для решения оптимизационной задачи (47), сформулированной в виде равенств (второй случай) надо использовать внутреннюю функцию *Minerr* программы Mathcad. Функции *Find* и *Minerr* следует использовать для третьего случая формулирования оптимизационной задачи вида (47).

На основе вышерассмотренных исследованиях предлагается алгоритм решения оптимизационной задачи вида (47) для замкнутого планетарного механизма кинематической схемы, показанной на рис. 1. На основе данного алгоритма может быть построена методика оптимального проектирования замкнутого планетарного механизма по критерию обеспечения наибольшей несущей способности.

Алгоритм включает следующие шаги.

1. Принимаются значения чисел сателлитов $k_1 = k_1^*$ и $k_2 = k_2^*$.

2. Для заданного значения передаточного отношения механизма $U^*_{\gamma\delta}$ определяется значения параметров $p_1^* = p_2^* = \sqrt{1-U^*_{\gamma\delta}}-1$. Такое решение, очевидно, выгодно с точки зрения конструктора, так как позволяет реализовать следующие конструктивные ограничения: $Z_{a1}=Z_{a2}$, $Z_{g1}=Z_{g2}$ и $Z_{b1}=Z_{b2}$. При

этом надо учесть соответствие выбранных параметров p_i^* значениям чисел сателлитов k_i^*, где $i = \overline{1,2}$. Если данные соответствия не выдерживаются, то надо внести изменения в числа сателлитов k_i^*.

Заметим, что с увеличением числа сателлитов простого планетарного механизма типа $\overline{\mathbf{AI}}$ более 3-х уменьшается наибольшее возможное значение параметра p_i^*.

3. Определяются значения коэффициентов $\Omega_{H(F)1}$ и $\Omega_{H(F)2}$ с учетом значений чисел сателлитов k_i^*.

4. Вычисляются значения коэффициентов $k_{\Omega H}$ и $k_{\Omega F}$.

5. По формуле (29) вычисляется значение коэффициента $\Pi_H = \Pi_H^* = 1/(p_1^* + 1) = 1/(p_2^* + 1)$.

6. По формуле (39) вычисляется значение коэффициента $\Pi_F = \Pi_F^* = 1/(p_1^* + 1) = 1/(p_2^* + 1)$.

7. Значения коэффициентов Π_H^* и Π_F^* используются при проектировании зубчатых колес в качестве ориентиров, которым должны удовлетворять отношения параметров зубчатых зацеплений Z_{ai} - Z_{gi}, которые определяют значения вышеназванных коэффициентов (см. формулы (28) и (38) соответственно).

8. Если вариант значений параметров p_i^*, принятый ранее (см. п.2) не позволяет реализовать максимальную несущую способность замкнутого планетарного механизма с учетом ограничений на диаметральные размеры зубчатых колес с внутренними зубьями, то следует перейти к постановке оптимизационной задачи вида (47).

9. Задаются следующие параметры – ограничения на значения параметров $p_{i\min}$ и $p_{i\max}$, точность реализации требуемого передаточного отношения механизма $\pm\Delta U$ и точности выполнения условий обеспечения максимальной несущей способности при расчете на контакт $\pm\Delta_H$ и на изгиб $\pm\Delta_F$.

10. Строятся графики следующих функций (зависимостей) (вид этих графиков показан на рис. 8):

$$fh(p_1, p_2) = \frac{(p_1+1)(p_2-1)}{(p_1-1)(p_2+1)^2}, \quad ff(p_1, p_2) = \frac{1}{p_2+1}.$$

11. На основе построенных графиков принимается решение, в какую сторону надо изменить значение параметра p_1 – в сторону $p_1 > \sqrt{1-U_{\gamma\delta}^*} - 1$ или в сторону $p_1 < \sqrt{1-U_{\gamma\delta}^*} - 1$. Задав новое значение параметра p_1, находят значения функций, построенных в п.10.

12. Вычисляются значения коэффициентов Π_H и Π_F по формулам:

$$\Pi_H = fh(p_1, p_2)/k_{\Omega H}, \quad \Pi_F = ff(p_1, p_2)/k_{\Omega F}.$$

13. Формулируется оптимизационная задача вида (47) в виде одного из возможных ее вариантов.

14. Решается сформулированная на предыдущем шаге оптимизационная задача. Решение данной задачи и будет представлять собой оптимальные значения параметров p_1 и p_2, т.е. $p_1^* = p_{1opt}$ и $p_2^* = p_{2opt}$.

Конструктивные ограничения на диаметральные размеры зубчатых колес Z_{b1} и Z_{b2} можно записать в виде неравенства

$$d_{bi} \le [d_{bi}], \tag{48}$$

где d_{bi} – задаваемый диаметр зубчатого колеса;

$[d_{bi}]$ – допускаемый диаметральный размер зубчатого колеса;

$i = \overline{1,2}$ – номер планетарного механизма.

Если в качестве задаваемого диаметра зубчатого колеса Z_{bi} выбрать делительный диаметр, то можем переписать условие (48) к следующему виду

$$p_i m_i Z_{ai} \le [d_{bi}], \tag{49}$$

где m_i – модуль зубчатых колес соответствующего планетарного механизма.

Из условия (49) видно, что с увеличением значения параметра p_i при неизменном числе зубьев Z_{ai} модуль m_i должен уменьшаться. При этом его значение должно удовлетворять условиям прочности зубчатых зацеплений планетарных механизмов.

На рис. 12 показана идея вышерассмотренного алгоритма (поиска оптимальных значений параметров p_1 и p_2). Здесь искомые значения параметров p_1 и p_2 показаны в виде высоты соответствующих столбцов. Начальная оценка требуемых значений параметров выполняется для случая, когда $p_1 = p_2 = \sqrt{1-U_{\gamma\delta}^*} - 1$. Если результат этой оценки отрицательный, то принимается решение об изменении параметра p_1 – на уменьшение или увеличение значения по сравнению с начальным значением. Значения параметра p_2, соответствующее новому значению, вычисляется по формуле (2). При этом изменяются значения соответствующих моментов, суммирование которых выполняется на выходном валу замкнутого планетарного механизма.

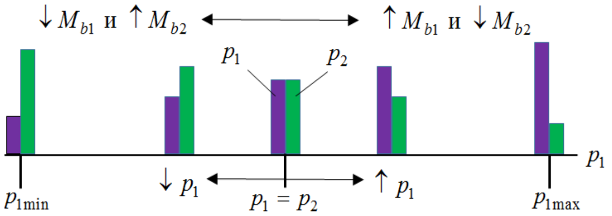

Рисунок 12 – Алгоритм поиска оптимальных значений параметров p_1 и p_2

Обратим внимание на постановку оптимизационной задачи вида (47), при которой ищется минимум некоторой квадратичной функции. Действительно, все величины из условий (47) являются безразмерными величинами. Поэтому три условия, записанные для соответствующих ошибок, можно представить через квадраты этих ошибок. При этом при оптимальных параметрах $p_1^* = p_{1opt}$ и $p_2^* = p_{2opt}$ функции квадратов ошибок будут достигать своего минимума.

Введем функцию вида

$$F_U(p_1, p_2) = \left(U_{\gamma\delta}^* - (1 - (p_1 + 1)(p_2 + 1))\right)^2. \quad (50)$$

Минимум функции (50) может быть найден любым методом поиска минимума, например, методом сопряженных градиентов. Средствами пакета Mathcad минимизация реализуется внутренней функцией *Minimize*.

Аналогично функции (50) введем еще две функции:

$$F_H(p_1, p_2) = \left(\Pi_H - \frac{(p_1+1)(p_2-1)}{(p_1-1)(p_2+1)^2}\right)^2, \quad (51)$$

$$F_F(p_1, p_2) = \left(\Pi_F - \frac{1}{p_2+1}\right)^2. \quad (52)$$

На основе функций (50)–(52) можно сформировать соответствующую целевую фикцию, минимум которой будет достигнут при оптимальных значениях параметров p_1 и p_2. Например, целевая функция представляет собой сумму функций (50)–(52).

Особенность оптимизационной задачи вида (47) и задачи минимизации функций вида (50)–(52) состоит в том, что решением этих задач является их локальный минимум. Эти задачи не имеют абсолютного минимума. При этом локальный минимум зависит от задаваемых величин $U_{\gamma\delta}^*$, Π_H и Π_F, а также от области возможных значений параметров p_1 и p_2 (области поиска оптимальных значений). На рис. 10 кривая зависимости $p_2 = p_2(U, p_1)$ является положением всех локальных минимумов вышеотмеченных оптимизационных задач.

Как правило, решения оптимизационных задач зависит от выбора метода поиска экстремума функции или функционала. Большинство этих методов предполагают задание начального положения экстремума. Поэтому от “неудачного” начального приближения возможен неправильный результат поиска.

В заключение отметим, что в функциональном отношении в рассмотренном алгоритме следует предусмотреть анализ КПД кинематической схемы замкнутого планетарного механизма, показанной на рис. 1, соответствующей текущим значениям кинематических параметров p_1 и p_2. Соответствующая формула приводится в [14]. Однако при задании КПД как функции двух кинематических параметров p_1 и p_2 необходимо задавать числа зубьев солнечных колес Z_{a1} и Z_{a2}, а также коэффициенты трения соответствующих зацеплений f_1 и f_2. На этапе проектирования кинематической схемы замкнутого планетарного механизма числа зубьев Z_{a1} и Z_{a2} определяют после принятия решения о значениях параметров p_1 и p_2. Однако, можно добавить еще одно конструктивное ограничение в виде наименьшего и наибольшего значений чисел зубьев Z_{a1} и Z_{a2}. Подобным образом можно поступить с коэффициентами трения зацеплений f_1 и f_2. После чего строится параметрическая функция КПД, как это было сделано при построении функции $U_{\gamma\delta}(p_1, p_2)$.

Для анализа циркулирующей мощности можно воспользоваться подходами, которые подробно рассмотрены в [1]. Там же показано, что кинематическая схема замкнутого планетарного механизма, показанная на рис. 1, свободна от циркулирующей мощности.

Выводы. Исследование зависимостей, определяющих несущую способность замкнутого планетарного механизма, образованного двумя простыми планетарными механизмами типа $\overline{\mathbf{AI}}$, как функций двух их кинематических параметров, позволило разработать алгоритм выбора значений этих параметров из условия обеспечения наибольшей несущей способности замкнутого планетарного механизма при действии максимальной нагрузки.

Реализация алгоритма может быть применима как при проектировании вышеназванного механизма, так и при оценке обеспечения максимальной несущей способности уже существующей конструкции такого механизма. Задача такой оценки, как правило, является актуальной при модификации существующей конструкции.

Возможность реализации отдельных шагов алгоритма как графическими, так и аналитическими методами обуславливает простоту как в плане идейного понимания алгоритма, так и при выборе конструктором инструментов его реализации. Особых затруднений не вызывает реализация алгоритма средствами математических пакетов, в частности, пакета Mathcad.

Список литературы

1. Ткаченко В. А. *Планетарные механизмы (оптимальное проектирование)*. Харьков: Нац. Аэрокосм. Ун-т «Харьк. Авиац. Ин-т», 2003. 446 с.
2. Кирдяшев Ю. М. *Многопоточные передачи дифференциального типа*.Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1981. 223 с., ил.
3. Берлова Е. А. Пути повышения нагрузочной способности и долговечности планетарных редукторов отечественного производства. *Научно-технический вестник*. СПб ГУИТМО. 2011. № 1(71). С. 24–28.
4. Плеханов Ф. И., Перминов Л. П. Нагрузочная способность рациональных конструкций зубчатых планетарных передач. *Вестник ИжГТУ*. 2014. № 3(63). С. 28–31.
5. Кобелева К. В., Туктамышев В. Р. Обзор методов повышения долговечности авиационных зубчатых передач. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника*. 2017. № 50. С. 128–137.
6. Капелевич А. Л., Ананьев В. М. Повышение энергоемкости авиационных редукторов. *Вестник двигателестроения*. 2012. №

2. С. 155–160.

7. Филипенков А. Л. Анализ двухступенчатых планетарных передач с циркуляцией мощности в замкнутом контуре. *Вісник Національного технічного університету "ХПИ"*. 2014. Вип. 31. С. 173-182.
8. Qilin Huang, Yong Wang, Zhipu Huo, Yudong Xie. Nonlinear Dynamic Analysis and Optimization of Closed-Form Planetary Gear System [*Nonlinear Dynamic Analysis and Optimization of Closed-Form Planetary Gear System*]. Режим доступу: https://www.hindawi.com/journals/ mpe/2013/149046/ref/.– Дата звертання: 17 червня 2013.
9. Lina Zhang, Young Wang, Kai Wu, Ruoyu Sheng, Qilin Huang. Dynamic modeling and vibration characteristics of a two-stage closed-form planetary gear train / Zhang Lina, Wang Young,Wu Kai, Sheng Ruoyu, Huang Qilin. *Mechanism and Machine Theory*, 2016, vol. 97, pp. 12–28,
10. Шехов А. В. Условия прочности и оценка несущей способности оптимальной по массе конструкции простого планетарного механизма типа $\overline{\mathrm{AI}}$. Вісник Національного технічного університету "ХПИ". 2015. Вип. 35. С. 145-157.
11. Матусевич В. А., Шарабан Ю. В., Шехов А В., Абрамов В. Т. Оценка несущей способности оптимальной по массе конструкции планетарного механизма типа $2\times\overline{\mathrm{AI}}$ из условия контактной равнопрочности. Вісник Національного технічного університету "ХПИ". 2015. Вип. 34. С. 93-102.
12. K. Daoudi, E. M. Boudi, M. Abdellah. *Geneticapproach for multiobjective optimization of epicyclical gear train* [*Geneticapproach for multiobjective optimization of epicyclical gear train*]. Режим доступу:https://www.hindawi.com/journals/mpe/2019/9324903/. Дата звертання: 04 листопаду 2019.
13. A. S. Harsha, K. M. Rao. *The optimization of two-stage planetary gear train based on genetic algorithm* [*The optimization of two-stage planetary gear train based on genetic algorithm*]. Режим доступу: https://www.hindawi.com/journals/mpe/2019/9324903/. – Датазвертання: 04 листопаду 2019.
14. *Планетарные передачи.* Справочник. Под ред. докторов техн. наук В. Н. Кудрявцева и Ю. Н. Кирдяшева. Л., «Машиностроение» (Ленингр. отд-ние), 1977. 536 с.

References (transliterated)

1. Tkachenko V. A. *Planetarnye mekhanizmy (optimal'noe proektirovanie)* [Planetary mechanisms (optimal design)]. Kharkov: National Aerospace University «Khark. Aviat. In-t», 2003. 446 p.
2. Kirdyashev Yu. M. *Mnogopotochnye peredachi differentsial'nogo tipa* [Multi-stream transmissions of differential type]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., Leningradskoeotdelenie, 1981. 223 p.
3. Berlova E. A. Puti povyshenija nagruzochnoj sposobnosti i dolgovechnosti planetarnyh reduktorov otechestvennogo proizvodstva [Ways of increase of loading ability and durability of planetary gearboxes of home production]. *Nauchno-Tehnicheskii Vestnik Informatsionnykh Tekhnologii, Mekhanik ii Optiki* [Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics]. St. Petersburg, ITMO University, 2011, no. 1(71), pp. 24–28.
4. Plehanov F. I., Perminov L. P. *Nagruzochnaja sposobnost' racional'nyh konstrukcij zubchatyh planetarnyh peredach* [Loading ability of rational constructions of the planetary gearing]. *VestnikIzhGTUimeni M. T. Kalashnikova* [Bulletin of Izhevsk State Technical University]. Izhevsk, Izhevsk State Technical University, 2014, no. 3(63), pp. 28–31.
5. Kobeleva K. V., Tuktamyshev V. R. *Obzor metodov povyshenija dolgovechnosti aviacionnyh zubchatyh peredach* [Methods of increasing the load ability on aeronautical gear transmissions]. *Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politehnicheskogo universiteta. Ajerokosmicheskaja tehnik* [Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Aerospace engineering]. Perm, Perm National Research Polytechnic University, 2017, no. 50, pp. 128–137.
6. Kapelevich A. L., Anan'ev V. M. *Povyshenie jenergoemkosti aviacionnyh reduktorov* [Maximization of transmission density of aviation gearboxes]. *Vestnik dvigatelestroenija* [Herald of Aeroenginebuilding]. Zaporizhzhia, Zaporizhzhia Polytechnic National University, 2012, no. 2, pp. 155–160.
7. Filipenkov A. L. *Analiz dvukhstupenchatykh planetarnykh peredach s tsirkulyatsiey moshchnosti v zamknutom kontur e*[Analysis of two-stage planetary gear wish the circulation of power in a closed loop]. *Visnik Natsional'nogo tekhnichnogo universitetu"KhPI"* [Bulletin of the National Technical University "KhPI"]. Kharkov, NTU "KhPI" Publ., 2014, no. 31, pp. 173–182.
8. Qilin Huang, Yong Wang, Zhipu Huo, Yudong Xie. *Nonlinear Dynamic Analysis and Optimization of Closed-Form Planetary Gear System* [Nonlinear Dynamic Analysis and Optimization of Closed-Form Planetary Gear System]. Available at: https://www.hindawi.com/journals/ mpe/2013/149046/ref/. (accessed 20.12.2019)
9. Lina Zhang, Young Wang, Kai Wu, Ruoyu Sheng, Qilin Huang. Dynamic modeling and vibration characteristics of a two-stage closed-form planetary gear train. Mechanism and Machine Theory. 2016, vol. 97, pp. 12–28
10. Shehov A. V. *Uslovija prochnosti i ocenka nesushhej sposobnosti optimal'noj po masse konstrukcii prostogo planetarnogo mehanizma tipa* $\overline{\mathbf{AI}}$ [Terms of strength and estimation of the loading ability of optimal on mass construction of simple planetary mechanism of type $\overline{\mathrm{AI}}$]. *Visnik Nacional'nogo tehnichnogo universitetu "KhPI"* [Bulletin of the National Technical University "KhPI"]. Kharkov, NTU "KhPI" Publ., 2015, no. 35, pp. 145–157.
11. Matusevich V. A., Sharaban Ju. V., Shehov A V., Abramov V. T. *Ocenka nesushhej sposobnosti optimal'noj po masse konstrukcii planetarnogo mehanizmatipa* $2\times\overline{\mathrm{AI}}$ *iz uslovija kontatnoj ravnoprochnosti* [Evolution of loading ability of optimal on mass construction of planetary mechanism of type $2\times\overline{\mathrm{AI}}$ from conditions of contact balances]. *Visnik Nacional'nogo tehnichnogo universitetu "KhPI"* [Bulletin of the National Technical University "KhPI"]. Kharkov, NTU "KhPI" Publ., 2015, no. 34, pp. 93–102.
12. K. Daoudi, E. M. Boudi, M. Abdellah. *Geneticapproach for multiobjective optimization of epicyclical gear train* [*Geneticapproach for multiobjective optimization of epicyclical gear train*]. Availableat: https://www.hindawi.com/journals/mpe/2019/9324903/. (accessed 20.12.2019).
13. A. S. Harsha, K. M. Rao. *The optimization of two-stage planetary gear train based on genetic algorithm* [*The optimization of two-stage planetary gear train based on genetic algorithm*]. Availableat: https://www.hindawi.com/journals/mpe/2019/9324903/. (accessed 20.12.2019)
14. Kudryavtsev V. N., Kirdyashev Yu. N. *Planetarnye peredachi. Spravochnik* [Planetary transfers. Reference book]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., Leningradskoeotdelenie, 1977. 536 p.

Поступила (received) 05.07.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах /About the Authors

Матусевич Володимир Анатольович (***Матусевич Владимир Анатольевич, Matusevich Vladimir***) **–** головний конструктор-директор, ДП «ХАКБ», м. Харків, Україна; ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3108-9234; e-mail: khadb_chief@ukr.net

Шарабан Юрій Володимирович (Шарабан Юрий Владимирович, Sharaban Jurij) – заступник головного конструктора, ДП «ХАКБ», м. Харків, Україна;ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7295-0927; e-mail: suv-kharkov@ukr.net

Шехов Олександр Володимирович (Шехов Александр Владимирович, Shehov Aleksandr) **–** Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», старший викладач кафедри теоретичної механіки, машинознавства і робототехнічних систем, м. Харків, Україна; ORCID: http://orcid.org/0000-0003-2312-0155; e-mail: shav01@ukr.net