

**М. М. ТКАЧУК, А. В. ГРАБОВСЬКИЙ, Н. Б. СКРІПЧЕНКО, М. А. ТКАЧУК, Г. А. КРОТЕНКО,
М. С. САВЕРСЬКА**

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ СКЛАДНОПРОФІЛЬНИХ ТІЛ ЗА НАЯВНОСТІ МІЖ НИМИ ПРОМІЖНИХ ШАРІВ ІЗ НЕЛІНІЙНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

У роботі описані методи аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл за наявності між ними проміжних шарів із нелінійними властивостями. Ці задачі зводяться до фізично та структурно нелінійних задач. Описано моделі, які базуються на варіаційних формулюваннях типу принципу Калькера. Дискретизація здійснена методом граничних елементів, також описані чисельні методи розв'язання системи нелінійних розв'язувальних рівнянь та нерівностей. Вони базуються на методах типу Ньютона–Рафсона або на розвитку методів мінімізації опуклих функціоналів на множині, яка задана системою нерівностей. Крім того, розроблені методи зведення фізично та структурно нелінійних задач до послідовності структурно нелінійних, проте фізично лінійних задач. Це – метод додаткових зазорів та метод змінних параметрів податливості. Описано розв'язання низки тестових задач. Це продемонструвало схожимість та точність отримуваних розв'язків задач. Також описано розв'язання серії прикладних задач. Здійснено аналіз закономірностей зміни розподілів контактного тиску у спряженні складнопрофільних тіл при варіюванні геометричних параметрів та фізико–механічних властивостей матеріалів проміжних шарів. Крім того, запропоновані нові характеристики для опису балансу переміщень у зоні контактної взаємодії складнопрофільних тіл.

Ключові слова: контактна механіка, контактна взаємодія, складнопрофільне тіло, проміжний шар, варіаційний принцип Калькера, метод додаткових зазорів, метод змінних параметрів податливості

**Н. Н. ТКАЧУК, А. В. ГРАБОВСКИЙ, Н. Б. СКРИПЧЕНКО, Н. А. ТКАЧУК, Г. А. КРОТЕНКО,
М. С. САВЕРСКАЯ**

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СЛОЖНОПРОФИЛЬНЫХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ МЕЖДУ НИМИ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ СЛОЕВ С НЕЛИНЕЙНЫМИ СВОЙСТВАМИ

В работе описаны методы анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел при наличии между ними промежуточных слоев с нелинейными свойствами. Эти задачи сводятся к физически и структурно нелинейным задачам. Описаны модели, основанные на вариационных формулировках типа принципа Калькера. Дискретизация осуществлена методом граничных элементов, также описаны численные методы решения системы нелинейных разрешающих уравнений и неравенств. Они базируются на методах типа Ньютона–Рафсона или на развитии методов минимизации выпуклых функционалов на множестве, заданном системой неравенств. Кроме того, разработаны методы приведения физически и структурно нелинейных задач к последовательности структурно нелинейных, однако физически линейных задач. Это – метод дополнительных зазоров и метод переменных параметров податливости. Описано решение ряда тестовых задач. Это продемонстрировало схожимость и точность получаемых решений задач. Также описано решение серии прикладных задач. Осуществлен анализ закономірностей изменения распределений контактного давления в сопряжении сложнопрофильных тел при варьировании геометрических параметров и физико–механических свойств промежуточных слоев. Кроме того, предложены новые характеристики для описания баланса перемещений в зоне контактного взаимодействия сложнопрофильных тел

Ключевые слова: контактная механика, контактное взаимодействие, сложнопрофильное тело, промежуточный слой, вариационный принцип Калькера, метод дополнительных зазоров, метод переменных параметров податливости

**М. М. ТКАЧУК, А. ГРАБОВСКИЙ, Н. СКРИПЧЕНКО, М. А. ТКАЧУК, Г. КРОТЕНКО,
М. САВЕРСКА**

CONTACT INTERACTION OF COMPLEX–PROFILE BODIES IN EXISTENCE BETWEEN THEM INTERMEDIATE LAYERS WITH NONLINEAR PROPERTIES

The methods of analysis of contact interaction of complex–profile bodies in the presence of intermediate layers with non–linear power–systems are described in this work. These tasks are reduced to physically and structurally nonlinear problems. The models, based on variational formulations of the Kalker principle type, are described. Discretization is made using the method of boundary elements. Numerical methods for solving the system of nonlinear equations and inequalities are also described. They are based on Newton–Ruffson–type methods or on the development of methods for minimizing convex functionals on a set given by a system of inequalities. In addition, methods of reduction physically and structurally nonlinear problems to a sequence of structurally nonlinear, but physically linear problems are developed. There are a method of additional gaps and a method of variable compliance parameters. A solution for a number of test tasks is described. It demonstrated the convergence and accuracy of the problem solving. Also the solution for a series of applied tasks is described. An analysis of change regularities for the contact pressure distribution in the conjugation of geometrically-complex bodies during the variation of geometrics, physical and mechanical properties of transitional layer materials is carried out. In addition, new characteristics are proposed for describing the displacement balance in the contact area of geometrically-complex bodies.

Keywords: contact mechanics, contact interaction, geometrically-complex body, transitional layer, Kalker variational principle, method of additional gaps, method of variable compliance parameters

Вступ. Існує широкий клас пружних тіл, які здійснюють силову контактну взаємодію, по–перше, уздовж поверхонь близької форми, а, по–друге, – за наявності нелінійних проміжних шарів між ними. Це, наприклад, робочі поверхні зубчастих передач, роликопідшипників, елементів двигунів внутрішнього згоряння та гідропередач, система «снаряд – ствол танкової гармати», механізм нахилу плавильної печі тощо. У таких машинобудівних конструкціях реалізується прагнення до контактної взаємодії складнопрофільних тіл (СПТ) на поверхнях якомога більш близької геометричної форми. У цих умовах початковий геометричний зазор між такими тілами у навантаженому стані вибирається при навантаженні за рахунок переміщень, які викликаються двома складовими: 1) пружні переміщення контактуючих деталей, що моделюються гладкими тілами; 2) пружні

рофільних тіл (СПТ) на поверхнях якомога більш близької геометричної форми. У цих умовах початковий геометричний зазор між такими тілами у навантаженому стані вибирається при навантаженні за рахунок переміщень, які викликаються двома складовими: 1) пружні переміщення контактуючих деталей, що моделюються гладкими тілами; 2) пружні

© М. М. Ткачук, А. В. Грабовський, Н. Б. Скрипченко,
М. А. Ткачук, Г. А. Кротенко, М. С. Саверська, 2019

переміщення за рахунок обтискання фізично нелінійних проміжних шарів (шорсткість та хвилястість поверхонь деталей, плівки, напилення, покриття тощо). Характерною особливістю є те, що вклад цих складових у загальний баланс переміщень на контактуючих поверхнях є сумірним один із одним. Тому у моделі контактної взаємодії не можна нехтувати жодною компонентою. Відповідно, для аналізу таких тіл потрібно удосконалювати такі моделі, які враховують, на відміну від традиційних, перелічені чинники.

Такі ж аргументи можна віднести також і до елементів біологічних об'єктів, наприклад, суглобів скелета людини, сегментів хребта тощо. На додаток до цього множина подібних об'єктів поповнюється біомеханічними об'єктами, зокрема, із ендо- та екзопротезами.

Усі перелічені об'єкти потребують розвитку моделей контактної взаємодії складнопрофільних тіл у частині урахування усіх значущих чинників. Крім того, розв'язувальні системи рівнянь та нерівностей вимагають нових методів дискретизації розв'язувальних співвідношень, а також методів розв'язання одержаних співвідношень, описаних у цій роботі.

Аналіз існуючих моделей та методів дослідження контактної взаємодії. Механіка контактної взаємодії [1] є надзвичайно розгалуженою областю механіки деформованого твердого тіла. Це викликано тим, що самі досліджувані об'єкти володіють значним різноманіттям за формою та фізично-механічними властивостями матеріалів контактуючих тіл. Крім того, для формування та для дискретизації розв'язувальних рівнянь та нерівностей застосовуються різні методи [1–6]: метод скінченних елементів (МСЕ), варіаційні формулювання, граничні інтегральні рівняння тощо. Серед цих методів особливу увагу привертає варіаційний принцип Калькера [5, 6], який формулюється відносно контактного тиску. Така форма є достатньо плідною стосовно подальшого розвитку та удосконалення. Відповідно, вона була визначена як база при формуванні розв'язувальних співвідношень аналізу СПТ за наявності між ними проміжних шарів із нелінійними властивостями.

Окремим напрямком досліджень є моделі властивостей шорсткості, яка є одним із найбільш розповсюджених видів проміжних шарів між контактуючими тілами. Зокрема, як відзначається у роботі [7], урахування впливу шорсткості на характер контактної взаємодії далеке від повного вирішення. Перші спроби побудувати модель контакту шорстких тіл пов'язані із застосуванням теорії Герца до окремих вершин нерівностей. Однак отримані таким чином теоретичні оцінки не узгоджувалися із експериментально встановленим законом пропорційності між величиною притискного зусилля P і площею плями контакту A . Протириччя полягало у тому, що з ростом навантаження не тільки збільшується площа існуючих контактних площадок, а й виникають нові [8]. Для вирішення проблеми запропоновано наближення, згідно з яким на нерівностях розташовуються мікронерівності, на яких, у свою чергу, присутні ще менші мікронерівності. Така модель зі зро-

станням числа ступенів збільшення у граничному значенні давала шукану пропорційність. Наступні уточнення теорії шорсткого контакту мали на меті отримання не тільки якісно вірних, а й кількісно точних оцінок поведінки. Для цього були задіяні методи статистичного осереднення. Вичерпна теорія, що описує статистичні властивості випадкових поверхонь, запропонована у роботі [9]. Однак ще до її появи Грінвуд і Вільямсон розробили модель контакту, засновану на спрощених припущеннях щодо розподілу характеристик нерівностей [10]. Зокрема, форма тіл була прийнята сферичною, так що при навантаженні контакт здійснюється на кругових областях, а кривизна – постійна для всіх вершин незалежно від висоти. На розвиток цієї моделі, запропонованої у роботі [11], враховується випадковий розподіл кривизн вершин нерівностей. У подальшому окремі положення моделі були переглянуті у [12]. Запропоновано використовувати двопараметричний розподіл Вейбулла для опису висот нерівностей [13]. У оригінальній теорії Грінвуда–Вільямсона контакт окремих нерівностей враховувався незалежно. Було враховано взаємний вплив від деформацій, викликаних прикладанням контактних зусиль у сусідніх вершинах [14]. Окремі моделі містять режим пластичних деформацій [15, 16]. Наявність цих деформацій зазвичай заперечується тим, що нерівності не збільшують значення максимального контактного тиску відносно середнього значення настільки сильно, щоб це призводило до істотних пластичних деформацій. Крім того, навіть у разі виникнення пластичних деформацій є всі підстави вважати, що всі наступні навантаження після декількох циклів змінання найбільш навантажених ділянок поверхні відбуватимуться пружно. Недоліки моделей поведінки проміжних шарів, які описані у роботах [8–13], полягають у тому, що у них не враховується взаємний вплив від деформацій сусідніх мікронерівностей. Деяке просування у напрямках взаємного впливу нерівностей запропоноване у [14].

Надалі розвиток теорії шорсткого контакту пов'язано із фрактальною природою геометрії тіл. Результати теоретичних досліджень [17] показали значимість впливу масштабного ефекту топографії поверхонь на прогнозовану контактну поведінку. Перссон розробив детальну модель, у якій обґрунтував обернено-потенціальну залежність значення контактного тиску від величини середнього зазору між притискуваними поверхнями. Така поведінка очікується при помірному притисканні поверхонь, коли зближення призводить до розвитку контакту на великому числі вершин нерівностей, але далеко від установлення повного контакту. Для перевірки основних положень цієї теорії було проведено чисельне моделювання, яке підтвердило якісно і в цілому також кількісно основні оцінки.

Ще однією величиною, що відображає властивості шорсткого контакту, є контактна жорсткість. У [18] розглянута пряма аналогія між задачею пружного контакту і електричною провідністю, вона безпосередньо пов'язана з опором контактуючих тіл [10, 19]. Відповідно до теорії Грінвуда–Вільямсона, так само як і теорії Перссона, контактна жорсткість прямо пропорційна притиск-

ному зусиллю. Однак у низці інших досліджень вказується ступенева залежність із показником від 0.5 до одиниці [20]. Ключовим параметром, що впливає на точне його значення, є фрактальна розмірність поверхні, що знайшло вираження в аналітичній оцінці [21].

Фрактальна природа геометрії реальних деталей урахована у роботі [17]. Проте положення робіт [14, 17] застосовне тільки для помірного тиску. На розвиток теоретичних положень у роботах [10, 18–21] запропоновані ступеневі залежності між переміщеннями точок поверхневих шарів та контактним тиском. Окремим випадком є контакт із шорсткістю та адгезією, що відрізняється принципово іншим законом поверхневої взаємодії [22, 23].

Застосування будь-якої із вище зазначених теорій у практиці інженерного аналізу вимагає істотних змін засобів моделювання, що наразі використовуються. МСЕ [1, 2] та метод граничних елементів (МГЕ) [1, 3, 4] мають обмежені можливості для моделювання нелінійних властивостей проміжних шарів. Варіаційний принцип Калькера [5] також потребує для випадку нелінійно пружних тіл розвитку та адаптації. При цьому з огляду на різноманіття нелінійних моделей шорсткості є бажаним, щоби нове формулювання було універсальним, тобто передбачало довільний закон залежності змінних стану всередині проміжного шару. У роботі [6] було запропоновано додатковий член у варіаційному функціоналі Калькера, який враховує у загальному вигляді внесок лінійної податливості шорстких поверхонь. У подальшому цей підхід було застосовано для побудови макромоделей контактної взаємодії та реалізовано із використанням авторських методів розв'язання системи контактних рівнянь та нерівностей, описаних у роботах [22, 24–28].

Таким чином, здійснений аналіз існуючих моделей та методів дослідження контактної взаємодії дає підстави для інтегрування мікромеханічних моделей жорсткості у варіаційні формулювання на основі принципу Калькера. Відповідно, надалі запропоновано формувати розв'язувальні співвідношення, відштовхуючись від зазначених принципів.

Мета і завдання досліджень. Із урахуванням зазначених обставин актуальною і важливою науково-практичною проблемою є вдосконалення та розробка нових моделей і чисельних методів визначення напружено-деформованого стану складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій із урахуванням їх контактної взаємодії як гладких або шорстких тіл. Вирішення цієї проблеми є метою цієї роботи.

Зокрема, у роботі поставлена та розв'язана задача про розробку математичних моделей взаємодії гладких і шорстких тіл, а також тіл із нелінійним пружним шаром між ними. Задача зводиться до граничного інтегрального рівняння або варіаційної задачі. Дискретизація шуканого контактного тиску здійснена за допомогою методу граничних елементів. Вплив шорсткості чи інших шарів моделюється за допомогою нелінійного вінклерового пружного шару. У кінцевому підсумку, отримується система структурно-фізично нелінійних співвідношень. Для їх розв'язання розроблені нові іте-

раційні методи, що зводять розв'язання структурно-фізично нелінійної задачі до послідовності структурно-нелінійних, але фізично лінійних задач.

Формування системи розв'язувальних співвідношень для аналізу контактної взаємодії з урахуванням фізично та структурно нелінійної поведінки поверхневих шарів взаємодіючих тіл. Математична модель напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл із урахуванням їх контактної взаємодії може будуватися, як це зазначалося вище, на основі різних постановок. Ця задача зводиться до проблеми мінімізації функціоналу повної внутрішньої енергії системи взаємодіючих тіл на множини переміщень, які відповідають умові їх непроникнення одне в одне. Крім того, можлива постановка на основі граничних інтегральних рівнянь, а також правомірна постановка на основі узагальнення варіаційного принципу Калькера.

У першому випадку приходимо до проблеми [29, 30]

$$I(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \rightarrow \min, \mathbf{u} \in K, \quad (1)$$

де $\mathbf{u} = \bigcup_{\alpha} u^{(\alpha)}$ – множина полів переміщень точок контактуючих тіл, а $\alpha = 1, 2, \dots, N_{\alpha}$ – номери контактуючих тіл;

$$I = \sum_{\alpha} I^{(\alpha)}(u^{(\alpha)}, u^{(\alpha)}) - \quad (2)$$

функціонал повної внутрішньої енергії системи взаємодіючих тіл;

$$I(u, v) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} a^{(\alpha)}(u^{(\alpha)}, v^{(\alpha)}) - \sum_{\alpha} L(v^{(\alpha)}); \quad (3)$$

$$a^{(\alpha)}(u^{(\alpha)}, v^{(\alpha)}) = \int_{\Omega^{(\alpha)}} (\sigma_{ij}(u^{(\alpha)}) - \varepsilon_{ij}(v^{(\alpha)})) d\Omega -$$

білінійна форма на полях $u^{(\alpha)}, v^{(\alpha)}$;

$\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – компоненти тензорів напружень і деформацій відповідно;

$$L(v^{(\alpha)}) = \int_{\Omega^{(\alpha)}} f_{\Omega}^{(\alpha)} v^{(\alpha)} d\Omega + \int_{S^{(\alpha)}} f_S v dS -$$

лінійна форма на полях переміщень $v^{(\alpha)}$.

Множина K визначається наступною умовою:

$$K = \left\{ u : u_{v^{(\alpha_1)}}^{(\alpha_1)} + u_{v^{(\alpha_2)}}^{(\alpha_2)} \leq \delta^{(\alpha_1, \alpha_2)} \right\},$$

де $v^{(\alpha)}$ – вектори нормалі до тіл на поверхнях $S^{(\alpha)}$, а $\delta^{(\alpha_1, \alpha_2)}$ – початкові (у ненавантаженому стані) зазори у сполученні тіл α_1 і α_2 .

За наявності фізичної нелінійності «напруження – деформації» у I замість квадратичного доданка з'являється опуклий функціонал $I^{(\alpha)}(u^{(\alpha)})$.

У другому випадку приходимо до проблеми мінімізації функціоналу

$$\Phi(p) = \frac{1}{2} a(p, p) + L(p) + \Phi_n(p), \quad (4)$$

де $a(p, p)$, $L(p)$ – квадратична та лінійна форма від контактної тиску p , а $\Phi_n(p)$ – нелінійна частина функціонала, що відповідає нелінійному вкладу проміжних шарів.

У цьому випадку, як впливає з аналізу постановки, представлені у роботах [5, 6, 21–28], при використанні базисних функцій для апроксимації контактної тиску p у вигляді кусково–лінійних пірамідальних розподілів на трикутній регулярній сітці (з шестикутною основою та вузловими значеннями p_m , рис. 1), отримуємо для випадку гладких тіл систему співвідношень

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta = 0, \text{ вузол } J_n - \text{ в контакті, } n \in J; \\ \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta > 0, \text{ вузол } J_n - \text{ поза зоною} \\ \text{контакту, } n \notin J; \\ p_m \geq 0, m \in J; p_m = 0, m \notin J; \\ \sum_m \sqrt{3} c^2 p_m / 2 = P. \end{array} \right. \quad (5)$$

При введенні між контактуючими тілами (рис. 1) лінійно–пружного шару всі співвідношення (5) залишаються у силі, за винятком заміни коефіцієнтів матриці жорсткості C на коефіцієнти модифікованої матриці

$$C^\Sigma = C + \text{diag}(\lambda), \quad (6)$$

де λ – вузлова контактна податливість (в загальному випадку – нерівномірна у вузлах, на відміну від рівномірної (тобто коли $C^\Sigma = C + \lambda E$, а E – одинична матриця).

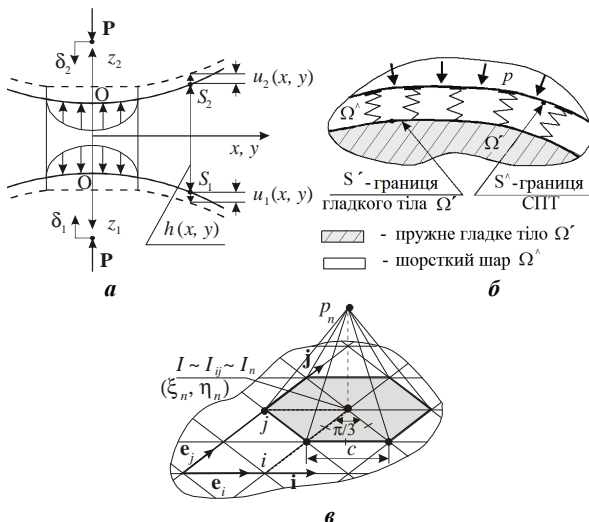


Рисунок 1 – Подання локального зору між контактуючими тілами, деформація тіл і утворення контактної площадки під дією нормального зусилля (а), схема контакту за наявності проміжного лінійно-пружного шару (б) та кусково-лінійна апроксимація контактної тиску за допомогою подання у вигляді лінійної комбінації пірамідальних елементів тиску на регулярній трикутній сітці (в)

Для варіанту використання варіаційної постановки (на базі принципу Калькера) із застосуванням пев-

них квадратурних формул [31] отримана система співвідношень відповідає (5) з урахуванням (6). Як зауваження слід зазначити, що співвідношення (5), модифіковані з урахуванням (6), як уже зазначалося, зберігають структуру не тільки для рівномірного розподілу податливості λ , але і при її нерівномірному розподілі на контактній площадці. У цьому випадку маємо покомпонентно співвідношення (6) у вигляді:

$$C_{nm}^\Sigma = C_{nm} + \lambda_n \delta_{nm}, \quad (7)$$

де λ_n – "вузлова" податливість, тобто податливість у вузлі з номером n .

Ці співвідношення впливають як із дискретизації прямого варіанта методу граничних інтегральних рівнянь, так із варіаційного принципу Калькера. Дійсно, квадратична складова функціоналу (4), що мінімізується,

$$a(p, p) = \int_{(S)} \lambda(S) p^2 dS \quad (8)$$

при її наближенні квадратурними формулами [31] із точками інтегрування, які збігаються з вузлами введеної на S триангуляції, породжує складові, пропорційні квадратам вузлових контактних тисків і вузловим податливостям λ_n . Це після мінімізації дає такі ж співвідношення для C^Σ , як і для (7).

На розвиток цього формулювання можна поширити використовуваний підхід і на випадок ненульової розподільчої здатності лінійно пружного шару. У цьому випадку замість (7) отримуємо:

$$C_{nm}^\Sigma = C_{nm} + \lambda_{nm}, \quad (9)$$

де компоненти матриці λ_{nm} визначають переміщення у вузлі n при дії базисного зусилля у вузлі m (тільки за рахунок деформування проміжного шару).

Наведені зауваження визначають напрямки розвитку відомих постановок без зміни загальної структури розв'язувальних співвідношень. У той же час представлені співвідношення у цілому не вичерпують постановку контактної задачі. Йдеться про те, що, виходячи з мікромеханіки контактної взаємодії шорстких тіл типу $w = kp^n$ (w – переміщення точок проміжного шару, p – контактний тиск, k і n – деякі коефіцієнти), приходимо у загальному випадку до фізично нелінійної залежності в описі зміни нормальних переміщень w від контактної тиску p . До такого типу нелінійності призводять також фізично нелінійні моделі тонких плівок, напилень, прокладок тощо. Таким чином, потрібна розробка більш сучасних постановок, які враховують нелінійність у залежностях «нормальні переміщення – контактний тиск».

При аналізі контактної взаємодії СПТ із проміжним нелінійно пружним шаром пропонується провести розвиток раніше запропонованих методів і моделей для випадку гладких або шорстких тіл із лінійно-пружним вінклеровим шаром між ними.

Модель контакту тіл із розташованим між ними

нелінійним вінклеровим шаром. Моделі, запропоновані раніше [1, 32, 33], а також описані у роботах [6, 22, 24, 27, 28, 34, 35], мають, серед інших, ще й деяку додаткову цінну якість, що дає можливість «нарошувати» початкове ядро, доповнюючи його відповідно до нових враховуваних чинників. Це зумовлено тим, що прийняті за основу співвідношення є нічим іншим, як умовами сумісності переміщень точок взаємодіючих у контакті тіл. Ці геометричні співвідношення у вихідному вигляді не залежать від фізико–механічних властивостей контактуючих тіл і виконуються в актуальному стані для будь–якої досліджуваної системи об'єктів. Вплив же пружних властивостей взаємодіючих тіл проявляється у кожному випадку у вигляді залежності переміщень точок їх поверхні від контактного тиску. Таким чином, з огляду на ті чи інші фізичні співвідношення, що зв'язують нормальні переміщення точок поверхонь із контактним тиском та іншими величинами (наприклад, описують вплив мастила, швидкості взаємного руху, температури тощо), можна істотно модифікувати вихідну математичну модель. При цьому не зачіпаються вихідний принцип і структура моделі самого «нижнього» рівня (для випадку гладких тіл). Модель нібито «обростає» новими компонентами, що у деяких випадках змінюють її якісно (за наповненням), але зі збереженням успадкованої початкової форми.

Так, для моделювання поведінки шорсткості або іншого пружного шару між контактуючими тілами можна застосувати не тільки лінійну модель, але і модель загального вигляду (що випливає із аналізу мікромеханіки контакту [36, 37])

$$w \equiv u_z^{\wedge} = u_z^{\wedge}(p) \equiv w(p). \quad (10)$$

Зокрема, у низці робіт [1, 36] описана ступенева залежність переміщень від контактного тиску (для урахування властивостей шорсткості). Можливі, доречні та реалізовані також й інші залежності, аби вони тільки адекватно описували властивості шорсткості, прокладок, напильника, плівок чи інших шарів між контактуючими тілами.

Тоді отримуємо, доповнюючи, наприклад, співвідношення (5), наступну систему у розгорненому і матричному вигляді відповідно:

$$\left. \begin{cases} \sum_{m_c \in N_c} C_{n_c, m_c} p_{m_c} + w(p_{m_c}) - \delta = -h_{n_c}, \quad n_c \in N_c; \\ \sum_{m_c \in N_c} \sqrt{3} / 2 \cdot c^2 p_{m_c} = P; \quad p_{m_c} \geq 0; \\ Cp + D(p) + h = \delta; \\ \delta^- p = \frac{2\sqrt{3}}{3c^2} P; \quad p \geq 0. \end{cases} \right\} \quad (11)$$

Тут $D(p)$ – діагональна матриця з компонентами $w(p)$, C – матриця коефіцієнтів впливу, а $\delta^- = \{1; 1; \dots; 1\}$ – одиничний вектор–рядок.

Таким чином, вихідна система (11), що містить у лівій частині умов сумісності переміщень раніше тільки лінійні члени, приростає нелінійними складовими

$w(p)$. Іншими словами, структурна нелінійність доповнюється фізичною, і в записі співвідношень верхнього рядка (11) провести пряму лінеаризацію, як прийнято у відомих постановках [38, 39], у загальному випадку не уявляється можливим. У цьому – принципова відмінність цієї моделі, у роботі названої структурно–фізично нелінійною, від традиційних структурно нелінійних, але фізично лінійних.

Співвідношення (11) або їм аналогічні можуть бути отримані також із узагальнення варіаційного принципу Калькера (4):

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi(p) &= \frac{1}{2} \int_{(S)} p u_z dS + \\ &+ \int_{(S)} p(h - \delta) dS + \int_{(S)} \left[\int_0^p w(p) dp \right] dS \rightarrow \min; \quad (12) \\ p(\xi, \eta) &\geq 0 \text{ в } S. \end{aligned} \right.$$

Тут третій доданок у виразі $\Phi(p)$ описує енергію деформування нелінійно пружного шару $\Phi_n(p)$ у (4) (для окремого випадку лінійно пружного шару маємо для цього вираз $\frac{1}{2} \int_{(S)} \lambda p^2 dS$). Застосовуючи ту ж, що і

вище, квадратурну формулу [31], отримуємо співвідношення, аналогічні (11).

Таким чином, можна запропонувати досить універсальний спосіб побудови математичної моделі контактної взаємодії системи складнопрофільних тіл за наявності нелінійно деформівних проміжних шарів. Він полягає у формуванні функціоналу $\Phi(p)$, що містить енергію пружного деформування усіх компонентів системи. У силу адитивності функціоналу $\Phi(p)$ така процедура не становить значної складності. При цьому кожний додатковий доданок $\Phi_n(p)$ може привносити нові види нелінійності. Це буде проявлятися на етапі застосування гранично–елементної апроксимації та квадратурних формул для обчислення дискретизованого аналога цього функціоналу. Після накладання вимоги мінімізації вже дискретизованого функціоналу $\Phi(p)$ можна або отримати умови у вузлах дискретизації, або запропонувати процедуру мінімізації на невід'ємних значеннях вузлових величин контактного тиску.

Запропонований підхід до побудови математичної моделі контактної взаємодії володіє не тільки універсальністю, але і математичною строгістю, причому на всіх етапах досліджень. Він оперує із проблемою мінімізації варійованого функціоналу $\Phi(p)$ на опуклій множині невід'ємних вузлових значень контактного тиску p . Цим самим обходяться всі проблеми обґрунтування існування та єдиності розв'язку задач, їх збіжності та точності при використанні дискретизованих моделей [38, 39].

Модифікація запропонованих підходів до тіл скінченних розмірів. Підхід, розроблений і описаний вище для випадку контакту напівнескінченних тіл (тобто тіл, площа плями контакту яких набагато менше розмірів

контактуючих тіл), може бути розширений і на випадок контактування відносно великого (напівнескінченного) тіла з тілом скінченних розмірів. На рис. 2 представлена схема такої взаємодії. Тут тіло Ω_1 закріплене, а між ним і напівнескінченим тілом Ω_2 міститься нелінійно пружний шар Ω_3 . До такої системи застосовано запропонований вище підхід із тією лише різницею, що змінюється спосіб подання функціоналу (12):

$$\Phi(p) = \Phi_1(p) + \Phi_2(p) + \Phi_3(p), \quad (13)$$

де $\Phi_i(p)$ – функціонали, відповідні вкладкам компонент Ω_i :

$$\Phi_1(p) = \frac{1}{2} \int_{(S)} p u_z^{(1)} dS; \quad (14)$$

$$\Phi_2(p) = \frac{1}{2} \int_{(S)} p u_z^{(2)} dS + \int_{(S)} p(h - \delta) dS; \quad (15)$$

$$\Phi_3(p) = \int_{(S)} \left[\int_0^p w(p) dp \right] dS. \quad (16)$$

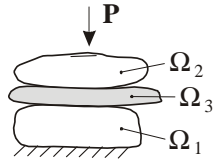


Рисунок 2 – Контакт із тілом скінченних розмірів

З огляду на, що тіло Ω_1 закріплене, нормальне переміщення його поверхні лінійно залежить від контактних навантажень, а функціонал $\Phi_1(p)$ є квадратичним. Однак, на відміну від аналітичного виразу для випадку напівпростору [1, 40], має місце більш складна залежність [40]:

$$u_z^{(1)}(x, y) = \int_{(S)} p(\xi, \eta) \cdot G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (17)$$

де $G(x, y, \xi, \eta)$ – функція Гріна для крайової задачі визначення напружено–деформованого стану тіла Ω_2 , що визначає переміщення його точок на поверхні як функцію зосередженого навантаження у точці з координатами (ξ, η) .

Таким чином, у цьому випадку втрачається аналітичний зв'язок $u_z^{(1)}$ і p , оскільки для тіла в загальному випадку довільної форми побудова функції Гріна – складне завдання. Для вирішення цієї проблеми у роботі пропонується підхід, заснований на твердженні, що при дискретизації, аналогічній використовуваній вище, функціонал $\Phi_1(p)$ набуває вигляду:

$$\Phi_1(p) = \frac{1}{2} \sum C_{nm}^{(1)} p_n p_m, \quad (18)$$

де $C_{nm}^{(1)}$ – коефіцієнти впливу, що визначають перемі-

щення у вузлі n від дії тиску із розподілом базисної функції, що відповідає вузлу m .

Таким чином, втрачається простота обчислення компонент матриці коефіцієнтів впливу «за шаблоном». Однак сама структура матриці зберігається.

Залишається проблема обчислення цих самих коефіцієнтів впливу $C_{nm}^{(1)}$. Пропонується для цих цілей використовувати процедуру МСЕ. Дійсно, якщо на контактну поверхню S тіла 1 нанести трикутну сітку аналогічно нанесеній гранично–елементній сітці, а далі згенерувати сітку призматичних або тетраедральних скінченних елементів, які «заощують» область Ω_1 (рис. 3), то при прикладанні навантаження у вузлі з індексом m можна зафіксувати за підсумками розв'язання за допомогою методу скінченних елементів нормальне переміщення у вузлі n .

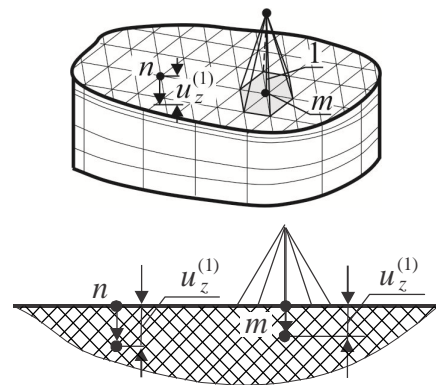


Рисунок 3 – До визначення коефіцієнтів впливу $C_{nm}^{(1)}$

Це легко здійснити, зберігши обернену матрицю жорсткості МСЕ:

$$K \cdot X = f \Rightarrow X = K^{-1} f, \quad (19)$$

де K – матриця жорсткості скінченно–елементного ансамблю, яка описує поведінку тіла Ω_1 під вузловими навантаженнями f .

Якщо у другому виразі у (19) взяти компоненту вузлового навантаження f , відповідну базисному одиничному розподілу тиску p (див. рис. 3), то для компонент вузлових переміщень, які відповідають нормальним переміщенням у вузлах n , отримуємо можливість визначення

$$C_{nm}^{(1)} = \kappa_m^{(n)} = K_{(n)(m)}^{-1} \cdot f_{(m)}. \quad (20)$$

Сукупність $\kappa_m^{(n)}$ формує матрицю впливу $C^{(1)}$.

Якщо ж у силу будь–яких міркувань застосування сітки скінченних елементів, що збігається із регулярною розбивкою S на трикутники, недоцільне, то можна застосувати розв'язок на іншій, відмінній від "породжуваної" описаним вище способом скінченно–елементній моделі, а потім коефіцієнти впливу можуть бути обчислені шляхом апроксимації отриманих результатів на трикутну сітку граничних елементів на границі S .

Для обчислення же матриці коефіцієнтів впливу $C_{nm}^{(2)}$ застосовна звичайна процедура, використана вище.

Таким чином, у результаті отримуємо матрицю коефіцієнтів впливу

$$C^v = C^{(2)} + C^{(1)}, \quad (21)$$

а співвідношення (11) зберігають свій вигляд за винятком заміни C на C^v .

У результаті отримуємо узагальнення запропонованого в роботі підходу на більш широкий клас контактуючих тіл. Аналогічно цей підхід може бути поширений і на випадок контакту системи тіл скінченних розмірів з нелінійно пружними шарами між ними.

Методи розв'язання структурно та фізично нелінійних задач контактної взаємодії. У роботі (див. вище) описана нова математична модель напружено-деформованого стану і контактної взаємодії складнопрофільних тіл – гладких, шорсткуватих і тіл за наявності між ними у загальному випадку нелінійних пружних шарів. При цьому у результаті отримуємо структурно-фізично нелінійну систему співвідношень. Для розв'язання цієї системи співвідношень необхідно розробити нові методи, оскільки традиційні орієнтовані на розв'язання контактних задач із лінійно пружними компонентами.

Якщо, як приклад, не знижуючи загальності, прийняти нелінійну модель пружного шару, що моделює шорсткість контактуючих тіл або нелінійність проміжного шару, вигляду [36]

$$w = \bar{\lambda} \cdot p^s, \quad (22)$$

де $\bar{\lambda}, s$ – деякі емпіричні або обчислювані параметри, то, як зазначалося вище, зміниться сам вигляд рівнянь сумісності переміщень точок контактуючих поверхонь взаємодіючих тіл (із лінійних вони перетворяться у нелінійні).

Таким чином, структурні нелінійності, тобто умови контактної взаємодії у вигляді умов непроникнення взаємодіючих тіл одне в одне, які у першому наближенні традиційно містять тільки лінійні функції від переміщень [32, 41], доповнюються у разі моделі (22) (чи іншої) нелійними складовими (див. вище). У результаті формально співвідношення сумісності можна звести до системи нелінійних рівнянь. Таким чином, виникає задача розробки методів розв'язання таких задач, що і складає, як уже зазначалося, мету даного дослідження.

Метод додаткових зазорів. Якщо записати співвідношення сумісності переміщень, що входять у систему (11), у вигляді підсистеми

$$C p = \delta - h - \bar{\lambda} q; \quad q = \{p_1^s, p_2^s, \dots, p_N^s\}^T, \quad (23)$$

то формально її можна подати як

$$C p = \delta - \bar{h}. \quad (24)$$

Тоді співвідношення (24) формально повторюють лінійні співвідношення в (11), але в яких початковий

зазор h доповнений деякими компенсаційними складовими $\Delta h(p)$. За аналогією з методом додаткових навантажень [42] ці складові можна назвати додатковими зазорами.

Рівняння (24) є нелінійним операторним рівнянням, для якого дійсний розподіл контактної тиску є нерухомою точкою оператора повної системи рівнянь $K\{h, \delta\}^T = \{h, P\}^T$ за умов $p \geq 0$. Таким чином, можна організувати ітераційний процес:

$$\begin{cases} \tau = 0 & (*) \\ p^{(0)} = 0 & (**) \\ q^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} p_1^{(0)} \\ \vdots \\ p_N^{(0)} \end{bmatrix} \delta \right\}^T; & (***) \\ \Delta h^{(0)} = \bar{\lambda} q^{(0)}; & (^\wedge) \\ \bar{h}^{(0)} = h^{(0)} + \Delta h^{(0)}; & (^\wedge^\wedge) \\ \{p^{(0)}, \delta^{(0)}\}^T = K^{-1} \left\{ \bar{h}^{(0)}; P \right\}^T; & (^\wedge^\wedge^\wedge) \\ \tau = \tau + 1. & (:) \end{cases} \quad (25)$$

У (25) величини P, q, h, δ беруть участь у ітераційному уточненні розв'язку $(^\wedge^\wedge^\wedge)$. При цьому $h^{(0)}$ – вектор початкових (номінальних) зазорів між поверхнями контактуючих тіл. Ітерації здійснюються у межах циклу $(***) \rightarrow (:) \rightarrow (***)$. Умовою закінчення цього процесу може бути або критерій щодо уточнення додаткових зазорів, або – тиску:

$$\begin{cases} \Delta h^{(\tau)} = \left\| \Delta h^{(\tau)} - \Delta h^{(\tau-1)} \right\| / \left\| \Delta h^{(\tau)} \right\| \leq \varepsilon_h; \\ \Delta p^{(\tau)} = \left\| \Delta p^{(\tau)} - \Delta p^{(\tau-1)} \right\| / \left\| \Delta p^{(\tau)} \right\| \leq \varepsilon_p. \end{cases} \quad (26)$$

Тут $\Delta h^{(\tau)}, \Delta p^{(\tau)}$ – контрольовані параметри збіжності процесу, $\varepsilon_h, \varepsilon_p$ – наперед задані порогові значення відповідно для $\Delta h^{(\tau)}, \Delta p^{(\tau)}$, після досягнення яких згаданий ітераційний процес припиняється; а $\|\bullet\|$ – деяка норма (наприклад, евклідова або чебишевська) для оцінки величин векторів.

Крім того, можна також контролювати ітераційний процес за швидкістю зміни $\delta^{(\tau)}$:

$$\Delta \delta^{(\tau)} = \left| \delta^{(\tau)} - \delta^{(\tau-1)} \right| / \left| \delta^{(\tau)} \right| \leq \varepsilon_\delta, \quad (27)$$

де зміст величин відповідає введеним у (26).

Таким чином, розв'язок поставленої задачі еквівалентний розв'язку задачі (11) для контакту гладких тіл, але зі скоригованим розподілом зазорів.

Природно, що сама область контакту внаслідок введення нелінійного пружного шару змінюється, тому задоволення у ході ітераційного уточнення вимагають не тільки умови типу рівності для переміщень у області контакту і тиску – поза нею, а й умови типу нерівності для тиску всередині області контакту і щодо переміщень – поза областю. У (11) всі вони сформульовані щодо шуканих p_n . У ході цього процесу змінюється

відповідно множина $J^{(\tau)}$ вузлів, які відповідають умовам (11) на τ -му кроці ітераційного процесу. Таким чином, уточнюється і сама область контакту $S^{(\tau)}$. Саме по собі зрозуміле виконання рівняння $\sqrt{3}/2 \cdot c^2 \sum_m p_m = P$.

Розв'язання задачі визначення контактних тисків по алгоритму (25) вимагає обернення матриці із підматрицею C . Для підвищення чисельної стійкості у деяких випадках може бути доцільно модифікувати розв'язувальну систему рівнянь шляхом додавання у ліву і праву частини співвідношень (24) додаткових лінійних доданків. У цьому випадку результуюча система співвідношень, а також ітераційна процедура (25) залишаються незмінними.

Метод змінних коефіцієнтів впливу. Подавши рівняння сумісності переміщень в системі (11) за наявності на границі тіл вінклерова шару (22) у вигляді:

$$C p + (\bar{\lambda} p^{(s-1)}) \cdot p = \delta - h, \quad (28)$$

і ввівши позначення $\bar{\lambda}(p) = \bar{\lambda} p^{(s-1)}$, за аналогією із методом змінних параметрів пружності [42] рівняння (28) можна переписати у вигляді:

$$\bar{C} p = \delta - h, \quad (29)$$

де $\bar{C}(p) = C + \bar{\lambda} \cdot E$ (E – одинична матриця).

Для розв'язання (29) можна організувати ітераційний процес:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta := 0; \quad (*) \\ \bar{C}^{(\beta)} := C; \quad (**) \\ K^{(\beta)} = K \left(\bar{C}^{(\beta)} \right); \quad (***) \\ \Pi^{(\beta)} = \{ p^{(\beta)}, \delta^{(\beta)} \}^T = (K^{(\beta)})^{-1} \cdot H = \\ = (K^{(\beta)})^{-1} \cdot \{ h, P \}^T; \quad (\wedge) \\ J^{(\beta)} : \{ p_n \geq 0 \forall n \in J^{(\beta)}; p_n = 0 \forall n \notin J^{(\beta)}; \} \quad (\wedge\wedge) \\ \Delta_n = 0 \forall n \in J^{(\beta)}; \Delta_n \geq 0 \forall n \notin J^{(\beta)}; \} \\ \bar{C}^{(\beta)} := C + \bar{\lambda} [p^{(\beta)}]^{(s-1)} \cdot E; \quad (\wedge\wedge\wedge) \\ \beta := \beta + 1. \quad (\dot{)} \end{array} \right. \quad (30)$$

У (30) ітераційний процес йде у послідовності $(***) \rightarrow (\dot{)} \rightarrow (***)$. При цьому етап $(***)$ означає складання матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь $K^{(\beta)}$ за скоригованою на етапі $(\wedge\wedge)$ підматрицею $\bar{C}^{(\beta)}$ (тобто аналогічно K у (25), але з підматрицею \bar{C} замість C), причому множина контактуючих вузлів $J^{(\beta)}$ уточнюється на етапі $(\wedge\wedge)$.

Припинення ітераційного процесу (29) можна здійснювати за умовою стабілізації ітераційного наближення множина вузлів, у яких реалізується контакт:

$$J^{(\beta)} = J^{(\beta-1)}. \quad (31)$$

Представлений алгоритм (30) відрізняється від алгоритму (25) тим, що перебудові піддається не права частина системи рівнянь при незмінній за структурними компонентами підматрицею C , а, навпаки, змінюється сама матриця, у той час як права частина – постійна.

Запропонований підхід можна трактувати як узагальнення (7), а саме: у ході розв'язання (29) за алгоритмом (30) визначається такий розподіл на вузлах сітки коефіцієнтів податливості λ_n ($n \in J$) лінійно пружного вінклерова шару з нерівномірною за площею контакту жорсткістю, що розв'язок задачі з матрицею

$$C : C_{nm} = C_{nm} + \lambda_n \cdot \delta_{nm}, \quad \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n \end{cases} \quad (32)$$

дає той же розподіл контактного тиску, що і в разі нелінійно пружного шару (22).

Зауваження: а) зазначена тут для обох методів незмінність матриці або правої частини дотримується у межах незмінності множини контактуючих вузлів. У іншому випадку перебудові піддаються всі компоненти підматриці впливу і відповідного підвектора правих частин; б) запропоновані вище методи додаткових зазорів і змінних коефіцієнтів впливу є всього лише окремими випадками розв'язання задачі про контактну взаємодію двох шорсткуватих тіл, модельованих півпростором із нелінійним вінклеровим шаром, розташованим на границі: описані лише два частинних методи із множини можливих до застосування для розв'язання систем нелінійних рівнянь; при цьому необхідно відзначити, що вони мають явне фізичне трактування, яке не завжди наявне при використанні інших методів; використана лише ступенева модель для опису властивостей шару шорсткості на контактуючих поверхнях, хоча у літературі міститься багато інших залежностей «переміщення – контактний тиск»; тут доречно, однак, відзначити, що ступенева залежність досить часто застосовується для розв'язання множини прикладних задач [36] зі збереженням прийнятної точності; також можна повторно відзначити, що такий вибір у вигляді ступеневої залежності $w(p)$ не знижує загальності підходу.

Слід зауважити, що збіжність алгоритмів (25), (30) залежить від властивостей нелінійно-пружного шару (тут – від параметрів $\bar{\lambda}, s$ у (22)). Аналіз умов збіжності є окремою задачею [43] і буде розглянутий у подальших дослідженнях. Проте, запропонований підхід у принципі природним чином може бути узагальнений за кожним із двох зазначених напрямків із точки зору розширення застосовності.

Розглянемо врешті загальну постановку задачі про контактування шорсткуватих тіл, модельованих напівпростором. Відволікаючись від виду залежності « $w-p$ », її у загальному випадку можна подати у вигляді:

$$w = w(p). \quad (33)$$

Ця залежність може мати складний характер у зв'язку із урахуванням різних чинників, бути найрізноманітнішою за способом використовуваних статистичних моделей для опису форми мікронерівностей або за

використовуваним типом моделі одиничної мікронерівності у контакті, а також впливати з обробки масиву експериментальних даних тощо [36, 37, 44, 45]. Ці залежності не вичерпують усієї множини типів співвідношень (33), а лише ілюструють їх різноманіття. Тоді система розв'язувальних рівнянь, дискретизованих за методом граничних елементів, може бути подана у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_m C_{mm} p_m + w(p_n) = \delta - h_n, \quad n \in J; \quad m \in J; \quad (i) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} c^2 \sum_n p_n = P, \quad n \in J; \quad (ii) \\ p_n \geq 0, \quad n \in J; \quad (iii) \\ p_n = 0, \quad n \notin J; \quad (iiii) \\ \sum_m C_{mm} p_m < \delta - h_n, \quad n \notin J; \quad (iiiii) \end{array} \right. \quad (34)$$

Цю систему співвідношень можна трактувати як нелінійну систему рівнянь (i), (ii) щодо вектора невідомих $\{p, \delta\}^T = \Pi$ за обмежень (iii), (iiii), (iiiii), що одночасно формують і кількість вузлів J , що контактують, а з ним – і компоненти підвектора p . Звідси, переписавши (34), отримуємо:

$$U(\Pi_J) = 0; \quad V(\Pi_J) \geq 0. \quad (35)$$

Тут U – оператор нелінійної системи рівнянь (i, ii) у (34), а V – оператор обмежень, записаних у (34) нижче.

Тоді для відшукування розв'язку (35) можна застосувати, наприклад, процедуру Ньютона–Рафсона [43]

$$Cp + D(p) + h = \delta \quad (p \geq 0). \quad (36)$$

Перевагами постановки (34) і алгоритму Ньютона–Рафсона є загальність, універсальність, стійкість і збіжність. Разом із тим втрачається наочність фізичного трактування (25) і (29).

Взагалі-то ключові співвідношення сумісності переміщень містять два типи нелінійностей: у $D(p)$ зосереджена фізична нелінійність, а у $p \geq 0$ – структурна. Традиційні методи задовільно «працюють» з одним або іншим типом нелінійностей окремо. Проблема якраз полягає в поєднанні ефективності у рамках єдиного підходу. Часткове вирішення цієї проблеми запропоновано вище у підрозділі. Можливі також й інші підходи. Зокрема, це – релаксаційні процедури для мінімізації функціоналу, що збігаються із методами типу методу послідовної верхньої релаксації з проекцією для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Модифікація методів мінімізації функціоналу Калькера при аналізі контактної взаємодії складнопрофільних тіл. Підхід до визначення контактного тиску як до задачі мінімізації квадратичного функціоналу Калькера $\Phi(p)$ на опуклій множині обмежень $p_n \geq 0$ дає можливість застосувати релаксаційні методи з проекцією. Це стає особливо актуальним із зростанням розмірності задачі, оскільки призводить до необхідності вирішувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

(СЛАР) із щільно заповненою матрицею. Застосування ж релаксаційних процедур не вимагає обернення всієї матриці СЛАР.

Варіант 1. При здійсненні релаксаційної процедури за методом послідовної верхньої релаксації (МПВР) маємо:

$$p_m^{(k+1)} = p_m^{(k)} + \omega \cdot (\Delta_m^{(k)} / C_{mv}), \quad (37)$$

де $\Delta_m^{(k)}$ – вузлова нев'язка m -го рядка систем рівнянь сумісності переміщень, а $\omega =]0; 2[$ – параметр прискорення процесу.

Проекція розв'язку проводиться в межах кожного кроку за умовою

$$\text{if } (p_m^{(k+1)} < 0) \Rightarrow p_m := 0. \quad (38)$$

Таким чином, у рамках єдиного процесу об'єднуються релаксаційні поліпшення розв'язку і виконання обмеження типу нерівностей, тобто пошук границь контакту.

Варіант 2. Застосування МПВР з проекцією (див. вар. 1) передбачає перехід на кожному кроці ітераційного процесу з деякої вихідної точки (на рис. 4 – точка 1) залежно від значення параметра прискорення релаксаційного процесу до будь-якої внутрішньої точки з інтервалу 1–2–3 (див. рис. 4), де точка 2 відповідає мінімуму $\Phi(p)$ у обраному його перетині, а точка 3 симетрична точці 1 щодо точки 2. У цьому випадку можливі кілька ситуацій: при малому ω отримуємо наступну точку 6, і вона приймається за наступне наближення; при $\omega=1$ – точка 2 з тим же результатом; при зростанні ω можемо потрапити в точку 5 і прийняти її за наступне наближення. При подальшому зростанні можливе попадання в точку 7, і в такому випадку наближенням буде призначена точка 4 як проекція точки 7 на систему обмежень.

Ідея блочної релаксації полягає в одночасному русі за декількома, а не за одним, напрямками (рис. 5). При цьому можливий більш широкий спектр ситуацій, ніж у попередньому випадку (див. вар. 1), при різних ω . Так, крок у точку 4 за напрямком 1–2–3 (де точка 2 відповідає мінімуму $\Phi(p)$ в цьому перетині, а точка 3 симетрична вихідній точці 1 щодо точки 2) є остаточним. Крок у точку 5 передус проекції на обмеження $p_m \geq 0$, тобто перехід до точки 6. Крок до точки 7 призводить до проектування на точку 8.

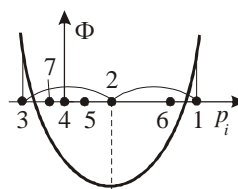


Рисунок 4 – Процедура методу послідовної верхньої релаксації з проекцією

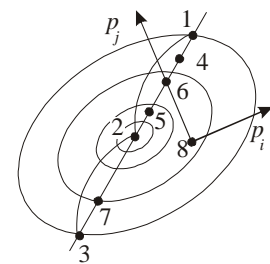


Рисунок 5 – Крок блочної релаксації з проекцією

Формально блочна релаксація полягає у виділенні

у векторі $\mathbf{p} = \{p_1; p_2; \dots; p_N\}^T$ блоків (підвекторів) $\mathbf{p} = \{q_1; q_2; \dots; q_{N_q}\}^T$. Відповідно, матриця C підрозділяється на блоки Λ_{lm} . Тоді $(k+1)$ -й крок релаксації полягає у процедурі:

$$q_r^{(k+1)} = q_r^{(k)} + \omega \cdot \Lambda_{rr}^{-1} \cdot \bar{\Delta}_r^{(k)}, \quad (39)$$

де $\bar{\Delta}_r^{(k)}$ – блок нев'язки, що відповідає блоку q_r , ω – параметр прискорення релаксаційного процесу.

Незважаючи на те, що у (39), на відміну від (37), з'являється операція обернення матриці, проте ця матриця Λ має, як правило, менший порядок, ніж C . Таким чином, виникає задача оптимізації розбиття p на блоки, оскільки при цьому є сусідніми дві тенденції: скорочення кількості кроків при охопленні процедурою релаксації всього вектора \mathbf{p} , з одного боку, збільшення кількості кроків за рахунок зростання операцій з обернення підматриць. Супутньою проблемою при цьому є оптимізація параметра прискорення ω . Підсумовуючи, можна зробити висновок, що алгоритм блочної релаксації може привести до підвищення швидкості збіжності релаксаційного процесу.

Варіант 3. Застосування традиційної процедури блочної релаксації передбачає розбивку \mathbf{p} на блоки будь-яким чином. Однак ніщо не перешкоджає більш гнучкому розбиттю на блоки, коли замість принципів неперетинання між собою ($q_i \cap q_j = \emptyset$) і охоплення всього масиву вузлових значень тиску \mathbf{p} ($\mathbf{p} = \bigcup_j q_i$)

можна ввести принципи допустимості перетинів ($q_i \cap q_j \neq \emptyset$) при збереженні – охоплення. Більш того, від кроку до кроку склад блоків може змінюватися, тобто порушується ще один принцип – стабільності розбивки. Природно, що апіорно досить важко вказати процедуру вибору схеми розбивки \mathbf{p} на блоки. Це можна зробити на основі розв'язання ряду тестових задач або шляхом коригування цієї розбивки за швидкістю збіжності релаксаційного процесу вже у ході обчислень.

У кінцевому підсумку вибір варіанта організації релаксаційного процесу може призводити до комбінації запропонованих методів. Усі зусилля при цьому спрямовані на прискорення всього процесу розв'язання. Важливо зауважити, що на кожному кроці проводиться суміщення процедур уточнення поточного наближення і уточнення зони контакту. Узагальнення релаксаційних алгоритмів на випадок добавки нелінійних доданків у функціонал, що мінімізується, відбувається природним способом, тому що функціонал залишається опуклим, а вимагає уточнення лише вибір ω .

Аналіз розроблених методів. Підсумовуючи у цілому аналіз запропонованих методів розв'язання контактних задач, слід зазначити, що у підрозділі поставлені нові проблеми, запропоновані нові підходи і методи для дослідження контактної взаємодії складнопрофільних шорсткуватих тіл. При цьому враховані такі особливості: нелінійність пружних властивостей вінклерового шару, що моделює шорсткість, а також різних

прокладок, плівок, напилень тощо; можливість зведення задачі до описаних раніше постановок для гладких і шорстких тіл із лінійною моделлю заміщуваного вінклерового шару; пристосованість до розв'язання прямих задач аналізу розподілу контактного тиску.

Представлені результати дають підставу для наступних висновків.

1. Розроблено метод додаткових зазорів, що дає можливість звести контактну задачу за наявності нелінійного пружного шару до ітераційної послідовності розв'язань задач про контактну взаємодію гладких тіл, але зі скоригованими (порівняно із дійсним) розподілом початкових зазорів між контактуючими тілами.

2. Як один з варіантів розв'язання задач аналізу контактної взаємодії розроблений метод змінних коефіцієнтів впливу (МЗКВ), або метод змінних параметрів податливості (МЗПП), за допомогою якого задача із нелінійно пружним вінклеровим шаром зводиться до ітераційної послідовності задач із введенням пружного шару, проте із нерівномірним розподілом характеристик жорсткісних властивостей на площадці контакту. При цьому жорсткісні характеристики цього шару уточнюються у процесі розв'язання на кожному циклі ітераційного процесу.

3. Для розв'язання задачі аналізу контактної взаємодії шорстких тіл і тіл з нелінійним проміжним шаром у загальному випадку запропоноване формулювання, яким передбачається застосування різних методів розв'язання системи нелінійних рівнянь із обмеженнями типу рівностей і нерівностей. Зокрема, запропоновано використання для цих цілей методу Ньютона-Рафсона.

4. Для випадків великої розмірності сітки граничних елементів запропоновані релаксаційні схеми для мінімізації функціоналу Калькера на основі модифікації методу послідовної верхньої релаксації з проекцією.

5. Для розширення спектру застосування методів мінімізації функціоналу Калькера розроблені варіанти методу блочної релаксації з проекцією. При цьому запропонована, на відміну від традиційних жорстких процедур розбивки масиву невідомих на блоки, гнучка розбивка, що перебудовується і адаптується в ході розв'язання.

Перевагою запропонованих постановок, розглянутих моделей і розроблених методів є свобода від будь-яких спрощуючих припущень, крім адекватності властивостей «глобальної» податливості контактуючих тіл на поверхнях можливого контакту властивостям напівпросторів або тіл скінченних розмірів, а також про плавність повороту нормалі при обході цих поверхонь за довільними шляхами. При цьому «локальна» податливість, що описує властивості шорсткості, прокладок або плівок, моделюється нелінійними співвідношеннями «зближення – контактний тиск».

Важливою обставиною при цьому є та особливість, що відрізняє і систему розв'язувальних рівнянь, і розроблені методи їх розв'язання, що, на противагу звичайним нелінійним рівнянням, сам склад множини невідомих, щодо яких сформовані ці розв'язувальні співвідношення, є змінним (поповнюваним або урізваним). Уже в силу цих особливостей застосування традиційних методів є складним. З урахуванням тільки цього чинника розробка

нових методів розв'язання є актуальним завданням. Крім того, спонукальним додатковим мотивом є можливість поєднання в єдиному циклі і процесу ітераційного уточнення поточного наближення розв'язку, і процесу коригування складу активних обмежень, а з ним – і самої множини шуканих змінних і області контакту. Саме таким вимогам відповідають запропоновані у роботі методи додаткових зазорів і змінних параметрів податливості. У поєднанні із природним фізичним змістом, властивим цим методам, ця методологічна особливість становить новизну, яка має відмінність і перевагу перед традиційними методами розв'язання систем нелінійних рівнянь і нерівностей.

Також природне трактування мають розроблені варіанти на основі методу послідовної верхньої релаксації з проекцією. Вони реалізують зв'язок задачі про пошук мінімуму квадратичного (у загальному випадку – опуклого) функціоналу за наявності обмежень типу нерівностей, з одного боку, і МПВР для розв'язання породжуваної СЛАР, доповненого проекцією розв'язку на обмеження, – з іншого. Методологічною новизною при цьому є метод виділення окремих блоків з масиву змінних, для компонентів яких проводиться черговий крок ітераційного процесу уточнення поточного розв'язку.

У цілому розроблені методи розв'язання виникаючих задач аналізу контактної взаємодії СПТ із нелінійно пружним проміжним шаром пристосовані для розв'язання розв'язувальних систем рівнянь і нерівностей. Це визначає їх перевагу перед відомими традиційними методами розв'язання систем нелінійних рівнянь.

Розв'язання тестових задач. Розроблені методи та моделі аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл за наявності нелінійного пружного проміжного шару вимагають апробації на прикладах розв'язання тестових задач. Зокрема, проблемним місцем є питання збіжності чисельного рішення із використанням розроблених ітераційних процедур. У силу цього було запропоновано вирішити задачі про контакт двох тіл, обмежених параболоїдами обертання з розміщеними між ними нелінійними пружними шарами (рис. 6).

Варіюваними тут є пружні характеристики, тобто залежності $w(p)$. При цьому, зокрема, були розглянуті наступні типи нелінійностей (див. рис. 6): пружно-жорстка характеристика (рис. 6, а); «коренева» характеристика типу $w = \bar{\lambda}\sqrt{p}$ (рис. 6, б); білінійна характеристика (рис. 6, в).

На рис. 7 представлені розподіли контактних тисків залежно від зміни порога переходу на горизонтальну ділянку залежності $w(p)$ (див. рис. 6, а). Поріг виставляється за значенням коефіцієнта $\alpha_a = p_{кр} / p_{\max}^\lambda$, де p_{\max}^λ – максимальний контактний тиск у розподілі, отриманий під час розв'язання задач без обмежень $p_{кр}$ (випадок $\alpha_a = 0$ відповідає контакту гладких тіл).

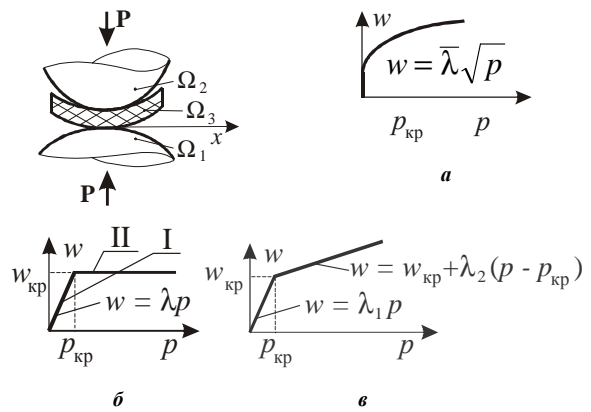


Рисунок 6 – Розрахункова схема взаємодії параболоїдів Ω_1, Ω_2 із розміщеним між ними нелінійним шаром та варіанти нелінійних характеристик $w(p)$

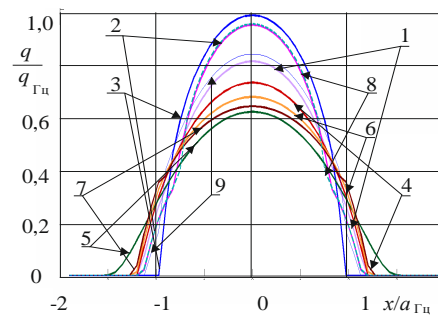


Рисунок 7 – Розподіл контактних тисків, віднесеного до максимального тиску за моделлю Герца, в осьовому перерізі: 1 – білінійна залежність, $\alpha_a = \arctg 0,5$ (див. рис. 6, в); 2 – пружно-жорстка залежність $w(p)$, $\alpha_a = 1/2$; 3 – контакт гладких параболоїдів; 4 – контакт параболоїдів з лінійно-пружним вінклеровим шаром, $\lambda = 10 C_{mn}$; 5 – "коренева" залежність $w(p)$ (див. рис. 6, б); 6 – білінійна залежність, $\alpha_a = \arctg 1,5$ (див. рис. 6, в); 7 – білінійна залежність, $\alpha_a = \arctg 2$ (див. рис. 6, в); 8 – пружно-жорстка залежність $w(p)$, $\alpha_a = 1/2$; розв'язок отримано МЗПП; 9 – білінійна залежність, $\alpha_a = \arctg 1,5$ (див. рис. 6, в); розв'язок отримано МЗПП

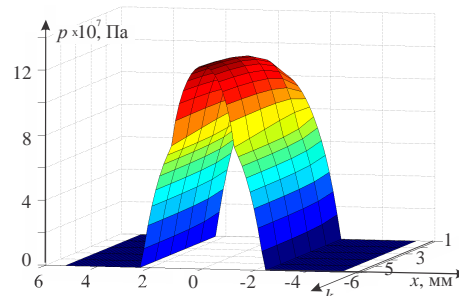


Рисунок 8 – Зміна картин розподілення контактних тисків в осьовому перерізі в ході ітераційного процесу їх уточнення для пружно-жорсткої моделі проміжного шару (див. рис. 6, а) при $\alpha_a = 0,6$

Як видно із представлених розподілів, спостерігається плавна їх видозміна при варіюванні коефіцієнта α_a в інтервалі $[0; 1]$ (рис. 8, k – номер ітерації).

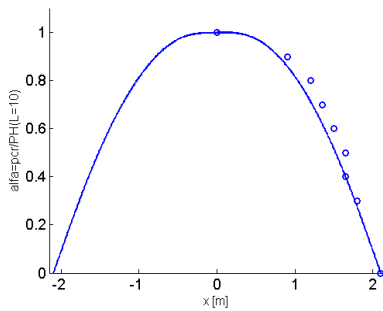


Рисунок 9 – Лінія переходу між пружною і «жорсткою» ділянкою залежності $w(p)$ (див.рис. 6, а) при зміні параметра $\alpha_a \in [0;1]$

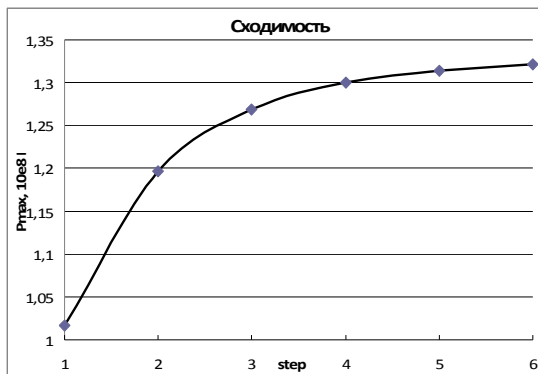


Рисунок 10 – Зміна відносного максимального контактного тиску у ході ітераційного процесу

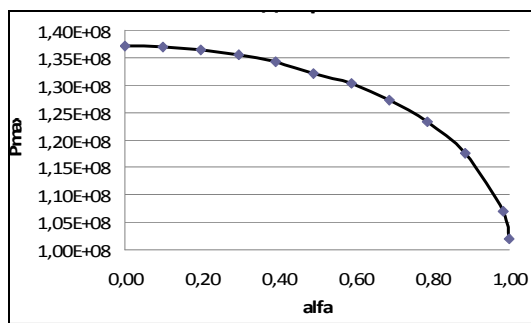


Рисунок 11 – Зміна відносного максимального контактного тиску у залежності від параметра α_a (див. рис. 6, а)

Чітко видно зону переходу між областями I і II (рис. 9). В зоні $\alpha_a \approx 0,5$ спостерігається різна картина розподілів контактного тиску q в областях I і II , а між ними – перехідна зона. При наближенні α_a до 0 або 1 розподіли q наближаються до граничних (відповідно, при $\alpha_a=0$, $\alpha_a=1$).

На рис. 10 проілюстровано зміну відносного максимального контактного тиску в ході ітераційного процесу, а на рис. 11 – відносного максимального контактного тиску залежно від параметра α_a (див. рис. 6, а). Видно, що ітераційний процес сходиться досить швидко. Крім того, при варіюванні α_a рівень контактного тиску змінюється плавно, проте в досить широких межах.

На рис. 12–14 наведено зміну картин розподілів

контактного тиску у осьовому перерізі залежно від номера ітерації (номер ітерації – у полі рисунка) за різних значень P_{kp} (позначення кривих – як на рис. 7).

На рис. 15, 16 проілюстровано зміни розподілу контактного тиску при зміні параметра α_a . Помітна еволюція картин розподілів контактного тиску, а також перехідні зони між реалізаціями гілок I і II залежності $w(p)$ (див. рис. 6, а).

На рис. 17, 18 наведені картини розподілу контактного тиску при реалізації «кореневої» залежності $w(p)$ (див. рис. 6, б). Відстежується коефіцієнт $\alpha_\delta = p_{\max}^\lambda / p_{\max}^\lambda$, де p_{\max}^λ – максимальний контактний тиск при «кореновому» розподілі $w(p)$, p_{\max}^λ – те ж, але для лінійного вінклерового шару. Видно, що «коренева» модель породжує більш плавний розподіл контактного тиску, особливо в зоні периферії, в якій рівень тиску різко знижується.

На рис. 7 також представлені розподіли контактного тиску при варіюванні коефіцієнта $\alpha_\delta = \arctg(\lambda_2 / \lambda_1)$ (див. рис. б). Як впливає з аналізу отриманих розподілів, при наближенні α_δ до нуля розподіл контактного тиску прагне до такого ж для пружно–жорсткої моделі (див. рис. б). При наближенні до $\pi/2$ отримуються розподіли контактного тиску, що мають більш низький рівень в середній частині, а, відповідно, ширші площадки контакту. Тут же (див. рис. 7) представлені розподіли контактного тиску, отримані не тільки методом додаткових зазорів, а й методом змінних параметрів податливості. Видно, що отримані різними методами результати в цілому збігаються.

Таким чином, як видно з отриманих результатів, коефіцієнти α_a , α_δ , α_δ досить сильно впливають і на характер розподілу контактного тиску, і на їх рівень. З цього випливає, що, варіюючи ці коефіцієнти, можна відчутно впливати на напружено-деформований стан контактуючих тіл.

Також необхідно відзначити, що при розв'язанні тестових задач в досліджених випадках не можна звернутися ні до відомих аналітичних розв'язків, ні до розв'язків, отриманих чисельно (наприклад, за допомогою методу скінченних елементів). Важко проводити порівняння з експериментальними даними в силу того, що залежності $w(p)$ для того чи іншого шару можуть бути отримані зі значною похибкою. У зв'язку з цим пропонується оцінювати точність розв'язку за рівнем нев'язки рівнянь.

Для цього обчислюється повузлова нев'язка для розв'язуваної системи співвідношень, а потім оцінюється їх відносний рівень. Наприклад, для рівнянь

$$\sum C_{nm} p_m + w(p_n) - \delta + h_n = 0, \quad (40)$$

рівень нев'язки визначається як

$$\bar{\Delta}_n = \left[\sum C_{nm} p_m + w(p_n) - \delta + h_n \right] / \delta, \quad (41)$$

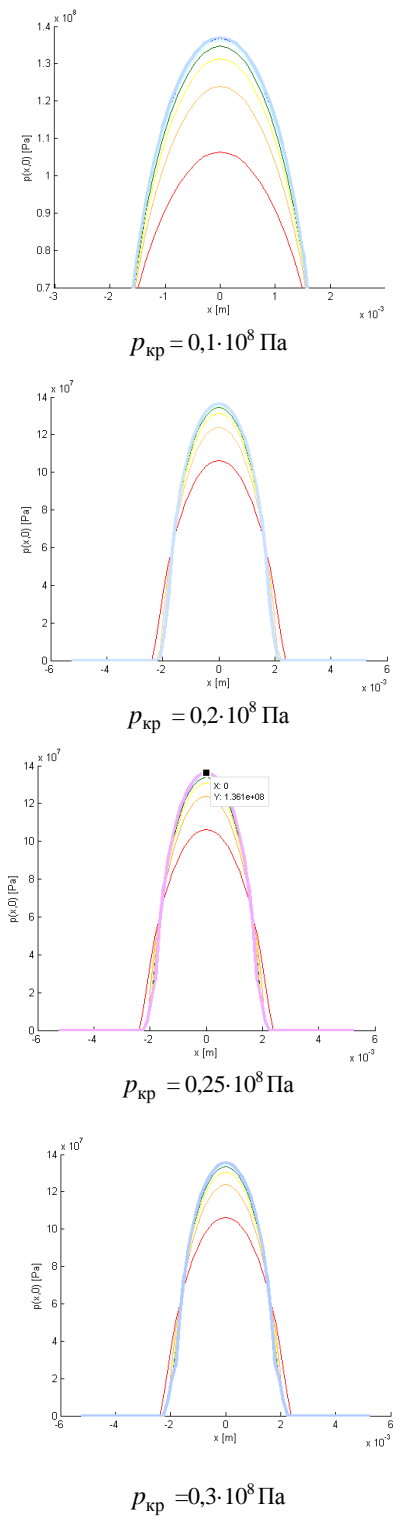


Рисунок 12 – Зміна картин розподілів контактної тиску в осьовому перерізі залежно від номера ітерації (номер ітерації – в полі рисунка) при різних значеннях $P_{кр}$

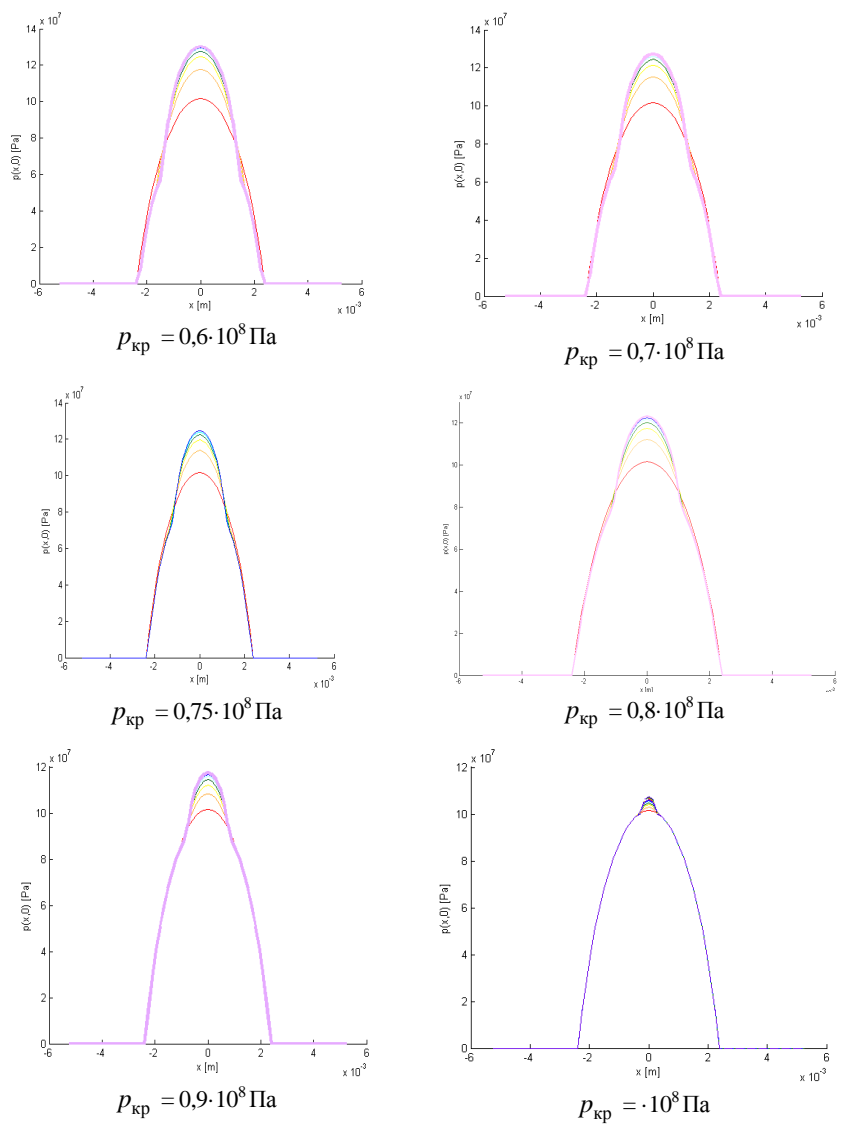


Рисунок 13 – Картина розподілів контактної тиску в осьовому перерізі залежно від номера ітерації (номер ітерації – в полі рисунка) при різних значеннях $P_{кр}$

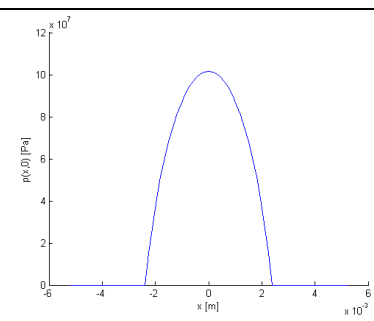


Рисунок 14 – Картина розподілів контактної тиску в осьовому перерізі залежно від номера ітерації (номер ітерації – в полі рисунка) при різних значеннях $P_{кр} = 1,02 \cdot 10^8 \text{ Па}$

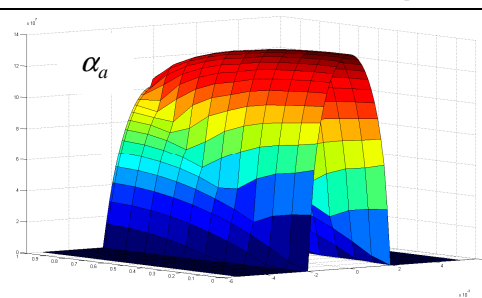


Рисунок 15 – Зміна картини розподілу контактної тиску в осьовому перерізі при варіюванні параметра α_a (див. рис. 6, а) (в ізометрії)

де δ – зближення тіл. Так, на рис. 19, 20 представлені розподіли нев'язки Δ_n для випадку моделі, представленої на рис. 6, а при $\alpha_a = 0,5$ (отримано методом

додаткових зазорів). Видно, що досягається досить точний розв'язок (рівень нев'язки – до 0,1% після сьомої ітерації). На рис. 21 – зміна характеру розподілу контактної тиску при ітераційному уточненні

розв'язку. Очевидне різке уточнення отриманих результатів відразу після 3–4 ітерацій. На рис. 22, 23 представлений характер зміни невязки – максимуму ϵ в центральній точці контакту. Видно, що спостері-

гається лінійна збіжність розв'язку до точного, що прийнятно для багатьох прикладних задач з помірною за розмірами гранично-елементною сіткою.

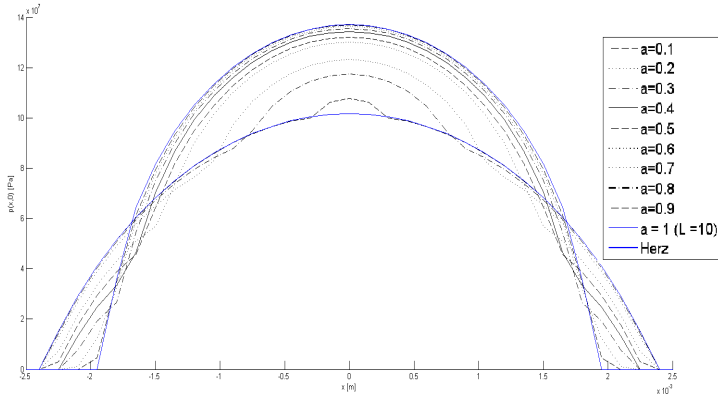


Рисунок 16 – Зміна картини розподілу контактного тиску в осьовому перерізі при варіюванні параметра α_d (див. рис. 6, а)

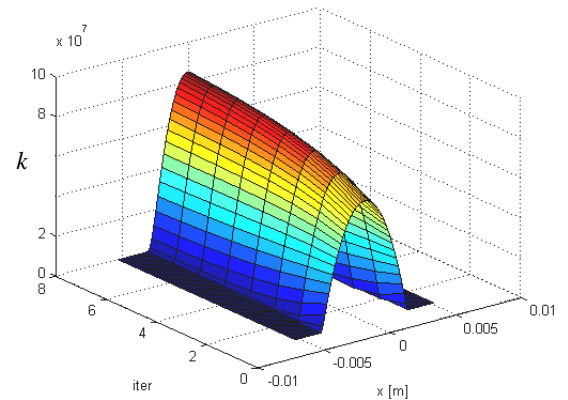


Рисунок 18 – Зміна картини розподілу контактного тиску при «кореневій» залежності $w(p)$ (див. рис. 6, б) залежно від номера k ітераційного процесу (в ізометрії)

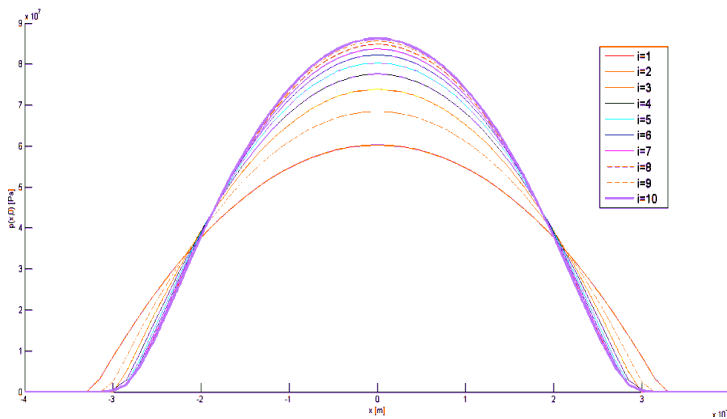


Рисунок 17 – Зміна картини розподілу контактного тиску при "кореневій" залежності $w(p)$ (див. рис. 6) залежно від номера k ітераційного процесу

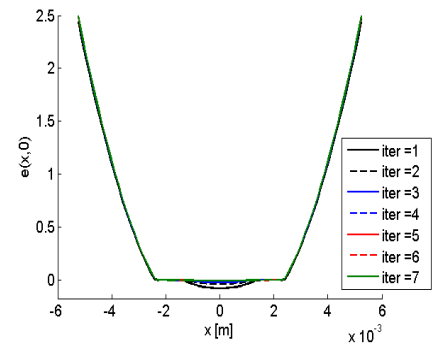


Рисунок 19 – Розподіл невязки рівнянь сумісності переміщень (центральна частина – область контакту, периферія – поза контактом) за ітераціями (iter =1÷7)

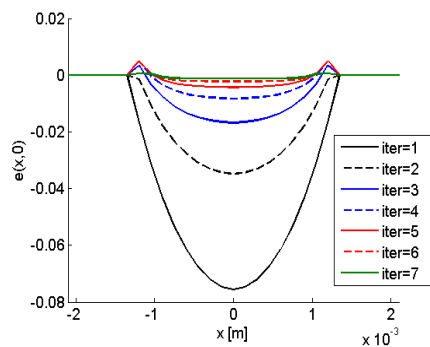


Рисунок 20 – Розподіл невязки рівнянь сумісності переміщень в області контакту за ітераціями (iter =1÷7)

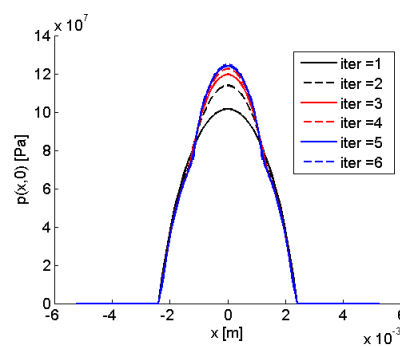


Рисунок 21 – Розподіл контактного тиску при ітераційному уточненні розв'язку (див. рис. 16, 17), номер ітерації (iter =1÷6)

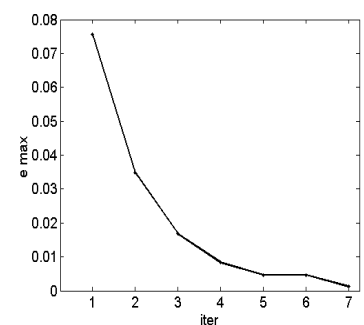


Рисунок 22 – Зміна максимальної невязки розв'язку контактної задачі в зоні контакту

Таким чином, можна зробити висновок, що розроблені методи розв'язання розв'язувальної системи співвідношень продемонстрували досить високу точність. Це дає можливість переходити до розв'язання прикладних задач із застосуванням методів додаткових зазорів та змінних параметрів податливості, а також інших запро-

понованих методів.

Висновки. У роботі описані нові моделі та методи розв'язання структурно-фізично нелінійних задач.

Аналіз отриманих результатів дає підґрунтя для наступних висновків.

1. Задача про контактну взаємодію лінійно пружних

тіл із нелінійно пружним шаром між ними за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь і варіаційного принципу Калькера зведена до структурно-фізично нелінійної задачі. Побудована математична модель, на відміну від традиційних постановок, зводиться до системи рівнянь і нерівностей, що складають умови сумісності переміщень, у яких містяться нелінійні доданки відносно невід'ємного контактного тиску. Таким чином, структурна нелінійність, математично відображена у співвідношеннях типу нерівностей, доповнюється фізичною, що породжує наявність нелінійних доданків у рівняннях сумісності. Це, у свою чергу, ускладнює математичну модель, проте робить її більш адекватною, що точніше описує поведінку реальних об'єктів. З іншого боку, це з неминучістю вимагає розробки нових методів розв'язання побудованої системи розв'язувальних співвідношень.

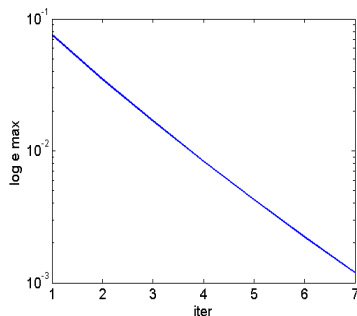


Рисунок 23 – Зміна нев'язки в центральній точці контакту в процесі ітераційного уточнення розв'язку (в напівлогарифмічному масштабі)

2. Для побудови математичних моделей про контактну взаємодію пружних тіл з нелінійно пружними шарами між ними, а також з урахуванням інших чинників запропоновано новий підхід, заснований на поступовому ускладненні їх структури відповідно зі введенням у розгляд того чи іншого чинника. Початковим ядром у цій послідовності є рівняння сумісності переміщень точок поверхонь гладких тіл (в актуальному стані) відносно контактної тиску. Далі на це ядро нарощуються компоненти, які відповідають за вплив того чи іншого чинника. У результаті отримується система співвідношень, що описує вплив різних чинників у сукупності.

3. Альтернативним (і досить ефективним) способом побудови математичної моделі про контактну взаємодію системи тіл і шарів є використання варіаційної постановки. При цьому, крім компонент початкового рівня (енергії деформування пружних гладких тіл), поступово можуть бути додані складові, що описують внесок інших компонент. Після їх вичерпання або застосовується пряма процедура мінімізації функціоналу, або будується система рівнянь і нерівностей із умов мінімуму і вимог обмежень, відповідно.

4. Для дискретизації математичної моделі використовується підхід, заснований на залученні гранично-елементних апроксимацій шуканого контактної тиску на регулярній трикутній сітці. У результаті задача зводиться до мінімізації опуклої функції на опуклій множині вузлових значень контактної тиску.

5. Для розв'язання сформованих структурно-

фізично нелінійних співвідношень розроблено метод додаткових зазорів. Він полягає у зведенні структурно-фізично нелінійної задачі до послідовності структурно нелінійних, проте фізично лінійних задач, але зі спеціально підібраним розподілом фіктивних додаткових зазорів. Оскільки для таких задач раніше розроблені ефективні ітераційні алгоритми розв'язання, то це дає можливість розв'язувати фізично нелінійні задачі, причому досить оперативно і точно.

6. На додаток до методу додаткових зазорів розроблений метод змінних параметрів податливості. Його ідея – зведення фізично нелінійної задачі до послідовності фізично лінійних, але зі спеціально скоригованою нерівномірно розподіленою на площі контакту податливістю лінійного вінклерового шару.

7. Як узагальнення, на додаток до методів додаткових зазорів і змінних параметрів податливості розроблений загальний підхід до розв'язання структурно-фізично нелінійних контактних задач, заснований на модифікації методу Ньютона-Рафсона. На відміну від традиційних варіантів цього методу, на кожному кроці модифікованого методу може змінюватися сама множина розв'язувальних співвідношень. Це викликано зміною поточної множини активних обмежень у процесі ітераційного уточнення розв'язку. Таким чином, на етапах розв'язання змінюються і поточне рішення, і масив шуканих вузлових значень контактної тиску.

8. Для мінімізації опуклого функціоналу Калькера на опуклій множині вузлових значень розроблені модифікації методу послідовної верхньої релаксації для системи лінійних алгебраїчних рівнянь (рівнянь сумісності переміщень) із проекцією на множину обмежень. На доповнення до відомих варіантів вузлової та блочної релаксації розроблений варіант «плаваючого», «адаптивного», «кориговного» розбиття масиву змінних на блоки. Це становить потенційну можливість прискорення релаксаційного процесу уточнення шуканого розв'язку.

9. Розв'язання тестових задач про контактну взаємодію пружних тіл зі структурно-фізично нелінійними шарами між ними продемонструвало точність, збіжність і високу оперативність розроблених методів.

10. Виявлено нові закономірності у розподілі контактної тиску між складнопрофільними тілами для різних варіантів залежностей $w(p)$. Для випадку «пружно-жорсткої» характеристики властивостей проміжного пружного шару встановлено, що отримувані розподіли контактної тиску мають дві характерні ділянки з перехідною зоною. При цьому зміна «порога» переходу від пружної до жорсткої гілки цієї характеристики призводить до безперервної зміни одержуваних розподілів контактної тиску. Для варіанту «кореневої» характеристики, що описує властивості проміжного пружного шару, визначено, що отримувані розподіли контактної тиску мають більш плавний перехід до нульового розподілу поза зоною актуального контакту порівняно із випадком лінійного пружного шару.

Підсумовуючи одержані результати, можна зробити висновок, що у роботі запропоновані нові методи, підходи і моделі для аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл із нелінійним проміжним шаром між

ними. Одержані структурно-фізично нелінійні співвідношення розв'язуються за допомогою зведення до низки структурно нелінійних, але фізично лінійних задач. При цьому встановлені якісно нові ефекти впливу виду фізичної нелінійності на розподіл контактного тиску. Виявлено, що шляхом варіювання певних параметрів, що визначають ті чи інші фізичні нелінійності, можна істотно впливати на вигляд розподілу контактного тиску, а також на його максимальні значення. Це дає підставу для висновку про можливість, доречність, доцільність та ефективність розв'язання задач синтезу у розрізі відновлення геометричної форми поверхонь контактуючих тіл і обґрунтування властивостей матеріалу проміжного шару за деякими критеріями, причому у зв'язній постановці.

Список літератури

- Johnson K. L. *Contact Mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1987. 464 p.
- Wriggers P. *Computational Contact Mechanics*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. 518 p. doi: 10.1007/978-3-540-32609-0
- Yastrebov V. A. *Numerical methods in contact mechanics*. John Wiley & Sons, 2013. doi: 10.1002/9781118647974
- Александров В. М., Пожарский Д. А. Трехмерные контактные задачи при учете трения и нелинейной шероховатости. *Прикладная математика и механика*. 2004. № 68(3). С. 516–527.
- Kalker J. J. Variational Principles of Contact Elastostatics. *IMA Journal of Applied Mathematics*. 1977. № 20, 2. P. 199–219. doi: 10.1093/imamat/20.2.199
- Ткачук Н. Н. Контактное взаимодействие сложнопрофильных элементов машиностроительных конструкций с кинематически сопряженными поверхностями. Харьков: ФОП Панов А.Н., 2017. 188 с.
- Tkachuk M. M., Skripchenko N., Tkachuk M. A., Grabovskiy A. Numerical Methods for Contact Analysis of Complex-Shaped Bodies with Account for Non-Linear Interface Layers. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. № 5/7(95). P. 22–31.
- Archard JF. Elastic deformation and the laws of friction. *In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society*. 1957. № 243. P. 190–205. doi: 10.1098/rspa.1957.0214
- Nayak P. R. Random Process Model of Rough Surfaces. *Journal of Lubrication Technology*. 1971. № 93(3). P. 398–407. doi: 10.1115/1.3451608
- Greenwood JA., Williamson JB. Pl. Contact of nominally flat surfaces. *In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society*. 1966. № 295. P. 300–319. doi: 10.1098/rspa.1966.0242
- Bush A. W., Gibson R. D., Thomas T. R. The elastic contact of a rough surface. *Wear*. 1975. vol. 35(1). P. 87–111. doi: 10.1016/0043-1648(75)90145-3
- Greenwood J. A. A simplified elliptic model of rough surface contact. *Wear*. 2006. № 261(2). P. 191–200. doi: 10.1016/j.wear.2005.09.031
- John I. McCool. Non-gaussian effects in microcontact. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*. 1992. № 32(1-2). P. 115–123. doi: 10.1016/0890-6955(92)90068-R
- Paggi M., Ciavarella M. The coefficient of proportionality κ between real contact area and load, with new asperity models. *Wear*. 2010. № 268(7). P. 1020–1029. doi: 10.1016/j.wear.2009.12.038
- Demkin N. B., Udalov S. V., Alekseev V. A., Izmaylov V. V., & Bolotov A. N. Contact between rough wavy surfaces allowing for the mutual effect of the asperities. *Journal of Friction and Wear*. 2008. № 29(3). P. 76–181.
- Demkin N. B., & Izmailov V. V. The relation between the friction contact performance and the microgeometry of contacting surfaces. *Journal of Friction and Wear*. 2010. № 31(1). P. 48–55.
- Persson BNJ. Elastoplastic contact between randomly rough surfaces. *Physical Review Letters*. 2001. № 87(11). 116101. doi: 10.1103/PhysRevLett.87.116101
- Barber J. R. Bounds on the electrical resistance between contacting elastic rough bodies. *In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, The Royal Society*. 2003. № 459 P. 53–66. doi: 10.1098/rspa.2002.1038.
- Ragnar Holm. Electric contacts: theory and application. *Springer Science & Business Media*. 2013. 482p. doi: 10.1007/978-3-662-06688-1
- Paggi M., Barber J. R. Contact conductance of rough surfaces composed of modified rmd patches. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2011. № 54(21). P. 4664–4672. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2011.06.011
- Pohrt R., Popov V. L. Contact mechanics of rough spheres: Crossover from fractal to hertzian behavior. *Advances in Tribology*, 2013, 974178. doi: 10.1155/2013/974178
- Tkachuk M. A numerical method for axisymmetric adhesive contact based on Kalker's variational principle. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. № 3, 7 (115) P. 34–41. doi: 10.15587/1729-4061.2018.130996.
- Goryacheva I. G., & Makhovskaya Y. Y. Elastic contact between nominally plane surfaces in the presence of roughness and adhesion. *Mechanics of Solids*. 2017. № 52(4). P. 435–443.
- Ткачук Н. Н., Скрипченко Н. Б., Ткачук Н. А. Решение задач о контактном взаимодействии шероховатых тел с применением модели нелинейного винклеровского слоя. *Механіка та машинобудування*. 2016. №1. С. 3–14.
- Tkachuk M., Bondarenko M., Grabovskiy A., Sheychenko R., Graborov R., Posohov V., Lunyov E., Nabokov A., Vasiliev A. Thin-walled structures: analysis of the stressed-stained state and parameter validation. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. № 1, 7 (91) P. 18–29. doi: 10.15587/1729-4061.2018.120547
- Atroshenko O., Tkachuk M., Ustinenko O., Bondarenko O., Diomina N. A numerical analysis of non-linear contact tasks for the system of plates with a bolted connection and a clearance in the fixture. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2016. № 1, 7 (79). P. 24–29. doi: 10.15587/1729-4061.2016.60087
- Atroshenko O., Tkachuk M., Martynenko O., Tkachuk M., Saveriska M., Hrechka I., Khovansky S. The study of multicomponent loading effect on thin-walled structures with bolted connections *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. (in print).
- Ткачук Н. Н., Скрипченко Н. Б., Ткачук Н. А., Грабовский А. В. Контактное взаимодействие сложнопрофильных деталей машиностроительных конструкций с учетом локальной податливости поверхностного слоя. Харьков: ФОП Панов А.Н., 2017. 148 с.
- Кравчук А. С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. Москва: Изд-во Московской государственной академии приборостроения и информатики, 1997. 339 с.
- Мартьяняк Р. М. Взаимодействие упругих полуплоскостей при неполном механическом контакте. *Мат. методы и физ.-мех. поля*. 1985. Вып. 22. С. 89–92.
- Николюский С. М. Квадратурные формулы. Москва: Изд-во Наука, 1974. 226 с.
- Кравчук А. С. К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров. *Прикладная математика и механика*. Том 41. 1977. С. 329–337.
- Martins J. A. C., Oden J. T. Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws. *Non-linear analysis, theory, methods and applications*. 1987. Vol. 11. P.407–428.
- Скрипченко Н. Б. Контактное взаимодействие сложнопрофильных деталей машиностроительных конструкций с учетом локальной податливости поверхностного слоя: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.02.09 – Динаміка та міцність машин. Харьков, 2016. 20 с.
- Ткачук М. М. Аналіз контактної взаємодії складнопрофильних елементів машинобудівних конструкцій з кінематично спряженими поверхнями. Дис. кандидата технічних наук: 05.02.09. Харків, 2011. 203 с.
- Решетов Д. Н., Портман В. Т. *Точность металлорежущих станков*. Москва: Машиностроение, 1986. 336 с.
- Демкин Н. Б. *Контактирование шероховатых поверхностей*. Москва: Наука, 1970. 227 с.
- Сеза Ж. *Оптимизация. Теория и алгоритмы*. Москва: Мир, 1973. 244 с.
- Гловинский Р., Лионс Ж. Л., Тремольер Р. *Численное исследование*

- вариационных неравенств. Москва: Мир, 1979. 574 с.
40. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 712 с.
 41. Кравчук А. С. *Вариационные и квазивариационные неравенства в механике*. Москва: Изд-во Московской государственной академии приборостроения и информатики, 1997. 339 с.
 42. *Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в трех томах / Под общей ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко*. Москва: Машиностроение, 1968.
 43. Трауб Дж. *Итерационные методы решения уравнений*. Москва: Мир, 1985. 264 с.
 44. *Трение, изнашивание и смазка: справочник в 2-х кн. Кн. 1.* / Под ред. И.В. Крагельского, В.В. Алисина. Москва: Машиностроение, 1978. 400 с.
 45. *Ткачук А. Н. Методы анализа конструкционной прочности элементов машин при термомеханическом контакте: дисс... канд. техн. наук: спец. 05.02.09 – динамика и прочность машин*. Харьков, 2010. 180 с.
- References (transliterated)**
1. Johnson K. L. *Contact Mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press Publ., 1987. 464 p.
 2. Wriggers P. *Computational Contact Mechanics*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag Publ., 2006. 518 p. doi: 10.1007/978-3-540-32609-0
 3. Yastrebov V. A. *Numerical methods in contact mechanics*. John Wiley & Sons Publ., 2013. doi: 10.1002/9781118647974
 4. Aleksandrov V. M., Pozharskiy D. A. Trehmernye kontaktnye zadachi pri uchete treniya i nelinejnoj sherohovatosti [Three-dimensional contact problems taking into account friction and nonlinear roughness]. *Prikladnaja matematika i mehanika*, 2004, no 68(3), pp. 516–527.
 5. Kalker J. J. Variational Principles of Contact Elastostatics. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1977, no 20, 2, pp. 199–219. doi: 10.1093/imamat/20.2.199
 6. Tkachuk N. N. *Kontaktnoe vzaimodejstvie slozhnoprofil'nyh jelementov mashinostroitel'nyh konstrukcij s kinematičeski soprjazhennymi poverhnostjami* [Contact interaction of complex profile elements of machine-building structures with kinematically coupled surfaces]. Har'kov: FOP Panov A.N. Publ., 2017. 188 p.
 7. Tkachuk M. M., Skripchenko N., Tkachuk M. A., Grabovskiy A. Numerical Methods for Contact Analysis of Complex-Shaped Bodies with Account for Non-Linear Interface Layers. *Eastern-European Journal of Enterprise Technology*, 2018, no 5/7(95), pp. 22–31.
 8. Archard JF. Elastic deformation and the laws of friction. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society*, 1957, no 243, pp. 190–205. doi: 10.1098/rspa.1957.0214
 9. Nayak P. R. Random Process Model of Rough Surfaces. *Journal of Lubrication Technology*, 1971, no 93(3), pp. 398–407. doi: 10.1115/1.3451608
 10. Greenwood JA., Williamson JB. Pl. Contact of nominally flat surfaces. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society*, 1966, no 295, pp. 300–319. doi: 10.1098/rspa.1966.0242
 11. Bush A. W., Gibson R. D., Thomas T. R. The elastic contact of a rough surface. *Wear*, 1975, vol. 35(1), pp. 87–111. doi: 10.1016/0043-1648(75)90145-3
 12. Greenwood J. A. A simplified elliptic model of rough surface contact. *Wear*, 2006, no 261(2), pp. 191–200. doi: 10.1016/j.wear.2005.09.031
 13. John I. McCool. Non-gaussian effects in microcontact. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 1992, no 32(1-2), pp. 115–123. doi: 10.1016/0890-6955(92)90068-R
 14. Paggi M., Ciavarella M. The coefficient of proportionality κ between real contact area and load, with new asperity models. *Wear*, 2010, no 268(7), pp. 1020–1029. doi: 10.1016/j.wear.2009.12.038
 15. Demkin N. B., Udalov S. V., Alekseev V. A., Izmaylov V. V., & Bolotov A. N. Contact between rough wavy surfaces allowing for the mutual effect of the asperities. *Journal of Friction and Wear*, 2008, no 29(3), pp. 76–181.
 16. Demkin N. B., & Izmailov V. V. The relation between the friction contact performance and the microgeometry of contacting surfaces. *Journal of Friction and Wear*, 2010, no 31(1), pp. 48–55.
 17. Persson BNJ. Elastoplastic contact between randomly rough surfaces. *Physical Review Letters*, 2001, no 87(11), 116101. doi: 10.1103/PhysRevLett.87.116101
 18. Barber J. R. Bounds on the electrical resistance between contacting elastic rough bodies. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society*, 2003, no 459, pp. 53–66. doi: 10.1098/rspa.2002.1038.
 19. Ragnar Holm. Electric contacts: theory and application. *Springer Science & Business Media*, 2013, 482 p. doi:10.1007/978-3-662-06688-1
 20. Paggi M., Barber J. R. Contact conductance of rough surfaces composed of modified rmd patches. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2011, no 54(21), pp. 4664–4672. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2011.06.011
 21. Pohrt R., Popov V. L. *Contact mechanics of rough spheres: Cross-over from fractal to hertzian behavior*. *Advances in Tribology*, 2013, 974178. doi: 10.1155/2013/974178
 22. Tkachuk M. A numerical method for axisymmetric adhesive contact based on Kalker's variational principle. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2018, no 3, 7 (115), pp. 34–41. doi: 10.15587/1729-4061.2018.130996.
 23. Goryacheva I. G., & Makhovskaya Y. Y. Elastic contact between nominally plane surfaces in the presence of roughness and adhesion. *Mechanics of Solids*, 2017, no 52(4), pp. 435–443.
 24. Tkachuk N. N., Skripchenko N. B., Tkachuk N. A. Reshenie zadach o kontaktom vzaimodejstvii sherohovatyh tel s primeneniem modeli nelinejnogo vinklerovskogo sloja [Solving problems on the contact interaction of rough bodies using the nonlinear Winkler layer model]. *Mehanika ta mashinobuduvannja*, 2016, no1, pp. 3–14.
 25. Tkachuk M., Bondarenko M., Grabovskiy A., Sheychenko R., Graborov R., Posohov V., Lunyov E., Nabokov A., Vasiliev A. Thin-walled structures: analysis of the stressed-stained state and parameter validation. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2018, no 1, 7 (91), pp. 18–29. doi: 10.15587/1729-4061.2018.120547
 26. Atroshenko O., Tkachuk M., Ustinenko O., Bondarenko O., Diomina N. A numerical analysis of non-linear contact tasks for the system of plates with a bolted connection and a clearance in the fixture. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2016, no 1, 7 (79), pp. 24–29. doi: 10.15587/1729-4061.2016.60087
 27. Atroshenko O., Tkachuk M., Martynenko O., Tkachuk M., Saveriska M., Hrechka I., Khovansky S. The study of multicomponent loading effect on thin-walled structures with bolted connections. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. (in print).
 28. Tkachuk N. N., Skripchenko N. B., Tkachuk N. A., Grabovskiy A. V. *Kontaktnoe vzaimodejstvie slozhnoprofil'nyh detalej mashinostroitel'nyh konstrukcij s uchedom lokal'noj podatljivosti poverhnostnogo sloja* [Contact interaction of complex-shaped parts of machine-building structures, taking into account the local pliability of the surface layer]. Har'kov: FOP Panov A.N. Publ., 2017. 148 p.
 29. Kravchuk A. S. *Variacionnye i kvazivariacionnye neravenstva v mehanike* [Variational and quasi-variational inequalities in mechanics]. Москва: Изд-во Московскоj gosudarstvennoj akademii priborostroenija i informatiki Publ., 1997. 339 p
 30. Martynjak R. M. Vzaimodejstvie uprugih poluploskostej pri nepolnom mehanicheskom kontakte [The interaction of elastic half-planes with incomplete mechanical contact]. *Mat. metody i fiz.-meh. polja*. 1985. Vyp. 22. С. 89–92. Мартыняк Р. М.
 31. Nikol'skij S. M. *Kvadraturnye formuly* [Quadrature formulas]. Москва: Изд-во Nau-ka, 1974. 226 p.
 32. Kravchuk A. S. K zadache Gerca dlja linejno– i nelinejno–uprugih tel konečnyh razmerov [On the Hertz problem for linear and nonlinear elastic bodies of finite size]. *Prikladnaja matematika i mehanika*. 1977, tom 41, pp. 329–337.
 33. Martins J. A. C., Oden J. T. Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws. *Nonlinear analysis, theory, methods and applications*, 1987, Vol. 11, pp. 407–428.
 34. Skripchenko N. B. *Kontaktnoe vzaimodejstvie slozhnoprofil'nyh detalej mashinostroitel'nyh konstrukcij s uchedom lokal'noj podatljivosti poverhnostnogo sloja* [Contact interaction of complex-shaped parts of machine-building structures, taking into account the local compliance of the surface layer]: avtoref. dy's. na zdobuttya nauk. stupenya kand. texn. nauk: specz. 05.02.09 – Dy'namičeska ta miznist' mashyn. Har'kov Publ., 2016. 20 p.

35. Tkachuk M. M. Analiz kontaktnoyi vzayemodiyi skladnoprofil'ny'x elementiv mashynobudivny'x konstrukcij z kinematy'chno spryazheny'my' po-verxnyamu' [Analysis of contact interaction of complex elements of machine-building constructions with kinematically conjugated surfaces]. Dy's. kandydata tekhnichny'x nauk: 05.02.09. Xarkiv Publ., 2011. 203 p.
36. Reshetov D. N., Portman V. T. *Tochnost' metallorozhushhih stankov* [Precision machine tools]. Moskva: Mashinostroenie Publ., 1986. 336 p.
37. Djomkin N. B. *Kontaktirovanie sherohovatyh poverhnostej* [Contacting rough surfaces]. Moskva: Nauka, 1970. 227 p.
38. Sea Zh. *Optimizacija. Teorija i algoritmy* [Optimization. Theory and Algorithms]. Moskva: Mir Publ., 1973. 244 p.
39. Glovinski R., Lions Zh. L., Tremol'er R. *Chislennoe issledovanie variacionnyh neravenstv* [Numerical research of variational inequalities]. Moskva: Mir Publ., 1979. 574 p.
40. Rabotnov Ju. N. *Mehanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of a deformable solid]. Moskva: Nauka. Gl. red. fiz.–mat. lit. Publ., 1988. 712 p.
41. Kravchuk A. S. *Variacionnye i kvazivariacionnye neravenstva v mehanike*. [Variational and quasi-variational inequalities in mechanics] Moskva: Izd-vo Moskovskoj gosudarstvennoj akademii priborostroenija i informatiki Publ., 1997. 339 p.
42. *Prochnost'. Ustojchivost'. Kolebanija* [Strength. Sustainability. Fluctuations]. Spravochnik v treh tomah / Pod obshhej red. I. A. Birgera i Ja. G. Panovko. Moskva: Mashinostroenie Publ., 1968.
43. Traub Dzh. *Iteracionnye metody reshenija uravnenij* [Iterative methods for solving equations]. Moskva: Mir Publ., 1985. 264 p.
44. *Trenie, iznashivanie i smazka: spravocnik v 2-h kn.* [Friction, wear and lubrication: a reference book in 2 kn.]. Kn. 1. / Pod red. I.V. Kragel'skogo, V.V. Alisina. Moskva: Mashinostroenie Publ., 1978. 400 p.
45. Tkachuk A. N. *Metody analiza konstrukcionnoj prochnosti jelementov mashin pri termomehanicheskom kontakte* [Methods for analyzing the structural strength of machine elements during thermomechanical contact]: diss... kand. tehn. nauk: spec. 05.02.09 – dinamika i prochnost' mashin. Har'kov Publ., 2010. 180 p.

Надійшла (received).12.11.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ткачук Микола Миколайович (Ткачук Николай Николаевич, Tkachuk Mykola Mykolayovych) – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», старший науковий співробітник кафедри інформаційних технологій та систем колісних і гусеничних машин імені О.О. Морозова; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4753-4267>; e-mail: m.tkachuk@tmm-saprg.org

Грабовський Андрій Володимирович (Грабовский Андрей Владимирович, Grabovskiy Andrey) – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», старший науковий співробітник кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6116-0572>; e-mail: andrej8383@gmail.com.

Скрипченко Наталія Борисівна (Скрипченко Наталья Борисовна, Skripchenko Nataliia) – кандидат технічних наук, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», науковий співробітник кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5324-9553>; e-mail: negrobova@gmail.com

Ткачук Микола Анатолійович (Ткачук Николай Анатольевич, Tkachuk Mykola) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідувач кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4174-8213>; e-mail: tma@tmm-saprg.org.

Кротенко Галина Анатоліївна (Кротенко Галина Анатольевна, Krotenko Galina) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; тел.: (066) 764-24-46; e-mail: krotenko.galina@gmail.com.

Саверська Марія Сергіївна (Саверская Мария Сергеевна, Saverska Mariia) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9271-9586>; e-mail: m.saverska@tmm-saprg.org