

**А.Ю. ТАНЧЕНКО**

### **ВПЛИВ АПРОКСИМАЦІЙНИХ СПОТВОРЕНЬ ГЕОМЕТРІЇ ІМПУЛЬСУ ЗМУШУЮЧОГО ПЕРІОДИЧНОГО СИЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА СТАБІЛЬНІСТЬ СУБГАРМОНІЙНИХ РЕЖИМІВ КОЛИВАНЬ НА ПРИКЛАДІ СИСТЕМИ З ДВОМА СТУПЕНЯМИ СВОБОДИ**

Робота присвячена подальшому тестуванню запропонованого раніше підходу до дослідження субгармонійних режимів в нелінійних коливальних системах. Підхід передбачає оцінку кожного коливання окремо та їх безпосереднє порівняння між собою, використовуючи базові, первинні результати коливального процесу - амплітуди та швидкості їх зміни. Даний аспект дозволяє працювати з неспотвореними даними, а також не вносити додаткові зміни в процедуру чисельного розв'язання. На відміну від методу оцінки по перетинах Пуанкаре, де бере участь лише одна точка з фазової площини для кожного коливання, запропонований підхід проводить інтегральну оцінку відразу для множини точок, що виключає помилкове, випадкове спрацьовування в разі збігу лише декількох точок. Для оцінки стабільності субгармонійних режимів коливань в рамках даної статті акцент зроблено на варіюванні геометрії імпульсу періодичного впливу змушуючої сили. Для цієї мети був застосований алгоритм апроксимації, заснований на Фур'є-перетворенні та виникаючих при цьому особливостей - паразитних осциляцій, також відомих як явище Гіббса. На прикладі двохмасової системи з двома ступенями свободи наведено результати, що підтверджують стабільність виявлених раніше субгармонійних режимів коливань.

**Ключові слова:** вимушені коливання, нелінійна коливальна система, апроксимація, явище Гіббса, базис Фейєра, субгармонійний режим, фазовий портрет, перетин Пуанкаре

**А.Ю. ТАНЧЕНКО**

### **ВЛИЯНИЕ АППРОКСИМАЦИОННЫХ ИСКАЖЕНИЙ ГЕОМЕТРИИ ИМПУЛЬСА ВЫНУЖДАЮЩЕГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ КОЛЕБАНИЙ НА ПРИМЕРЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ**

Работа посвящена дальнейшему тестированию предложенного ранее подхода исследования субгармонических режимов в нелинейных колебательных системах. Подход подразумевает оценку каждого колебания в отдельности и их непосредственное сравнение между собой, используя базовые, первичные результаты колебательного процесса – амплитуды и их скорости изменения. Данный аспект позволяет работать с неискаженными данными, а также не вносить дополнительные искажения в процедуру численного решения. В отличие от метода оценки по сечениям Пуанкаре, где участвует лишь одна точка из фазовой плоскости для каждого колебания, предложенный подход проводит интегральную оценку сразу для множества точек, что исключает ложное, случайное срабатывание в случае совпадения лишь нескольких точек. Для оценки устойчивости субгармонических режимов колебаний в рамках данной статьи упор сделан на искажение геометрии импульса периодического воздействия вынуждающей силы. Для этой цели был применен алгоритм аппроксимации, основанный на Фурье-преобразовании и возникающих при этом особенностей – паразитных осцилляций, также известных как явление Гиббса. На примере двухмассовой системы с двумя степенями свободы представлены результаты, подтверждающие устойчивость выявленных ранее субгармонических режимов.

**Ключевые слова:** вынужденные колебания, нелинейная колебательная система, аппроксимация, явление Гиббса, базис Фейера, субгармонический режим, фазовый портрет, сечение Пуанкаре

**A.Y. TANCHENKO**

### **THE INFLUENCE OF APPROXIMATION DISTORTIONS OF GEOMETRY STABILITY PROMOTIONAL PERIODIC POWER INFLUENCE ON THE IMPULSE OF VIBRATION SUBHARMONIC REGIMES ON THE EXAMPLE OF VIBRATING SYSTEM WITH TWO DEGREES OF FREEDOM**

The work is devoted to further testing the previously proposed approach to the study of subharmonic modes in nonlinear oscillatory systems. The approach implies an assessment of each vibration separately and their direct comparison with each other, using the basic, primary results of the oscillatory process — the amplitudes and their rates of change. This aspect allows you to work with undistorted data, and also does not introduce additional distortions in the procedure of numerical solution. Unlike the Poincare' section estimation method, where only one point from the phase plane for each oscillation is involved, the proposed approach carries out an integral assessment for a set of points at once, which eliminates false, random triggering if only a few points coincide. To assess the stability of subharmonic oscillation modes in this article, emphasis is placed on the distortion of the pulse geometry of a periodic effect of a driving force. For this purpose, an approximation algorithm was applied, based on the Fourier transform and the resulting features — parasitic oscillations, also known as the Gibbs phenomenon. Using the example of a two-mass system with two degrees of freedom, the results are presented confirming the stability of previously identified subharmonic modes.

**Keywords:** forced vibrations, nonlinear vibration system, approximation, Gibbs phenomenon, Fejer basis, subharmonic mode, phase portrait, Poincare's cross section

**Вступ.** Багато коливальних процесів характеризуються яскраво вираженими фазами, безпосередньо пов'язаними з фазами активного навантаження [1–6]. Так, багато швидкоплинних процесів прийнято описувати прямокутним імпульсом певної тривалості, «ступінчасті» функції типу Хевісайда, які характеризуються логічним елементом («1» або «0») і деякою тривалістю імпульсу. Прикладами можуть бути  $\text{signum}(\sin(x))$  або  $|x|/x$ .

Складність в даному випадку полягає в аналітичному описі «активного» імпульсу, однак завжди може бути застосований універсальний механізм Фур'є-перетворення. З іншого боку, в разі Фур'є-перетворення ступінчастих функцій на перший план можуть вийти паразитні зміни в найбільш значущих для апроксимації місцях – областях зміни зон моделюемого процесу [7, 8]. Часом навіть

© А.Ю. Танченко, 2019

утримання досить значної кількості членів ряду (десятки і сотні) не повною мірою покращує картину опису ступеневої зміни – рис.1.

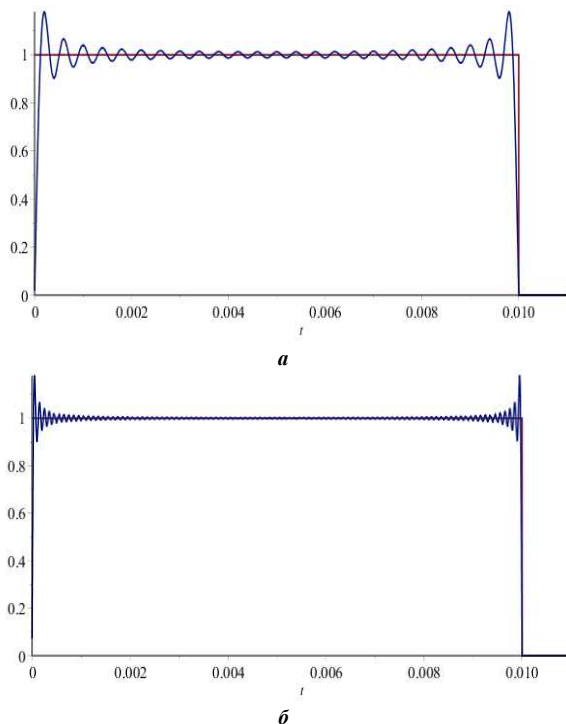


Рисунок 1 – Апроксимація ступінчастої функції сумами Фур'є: а – 50 членів ряду; б – 200 членів ряду

З наведених графічних розподілів видно, що поблизу зламу має місце суттєве відхилення від заданої ступінчастої траєкторії, яке при класичному розкладанні практично непереборне і характеризується величиною локального відхилення порядку 10% (див. рис. 1). Крім того, збільшення числа утримуваних членів ряду, спрямовано на підвищення точності опису вихідної функції, само по собі може стати ініціатором паразитного коливального процесу, який обумовлений лише математичним апаратом апроксимації і нічим більше. Особливо небезпечна подібна апроксимація при використанні такої функції як кінематичне навантаження.

Також існує метод, що дає можливість нівелювати паразитні спотворення одержуваного графіка: для цього пропонується вибрати особливим чином базис елементарних функцій, на якому буде будуватиме розкладання в ряд, і сформувати ядро – так зване ядро Фейєра [7, 8]. Цей підхід передбачає заміну класичного базису функцій  $\sin(nx)$ ,  $n = 1, \dots, N$ , базисом  $\sin(nx+x/2)/(\sin(x/2))$ , (де  $n$  – номер базисної функції,  $N$  – кількість утримуваних членів ряду). На основі підібраних таким чином базисних функцій може бути отримане ядро  $\sin^2(nx/2)/(n \sin^2(x/2))$ , також відоме як ядро Фейєра:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(k+1/2)x}{\sin(x/2)} = \frac{1}{n} \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}. \quad (1)$$

При цьому сама апроксимуюча функція з використанням ядра Фейєра запишеться наступним чином:

$$F_n(x) = \frac{1}{T \cdot n} \int_0^T f(\xi) \cdot \left( \frac{\sin(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{n(\xi-x)}{2})}{\sin(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\xi-x}{2})} \right)^2 d\xi, \quad (2)$$

де  $T$  – період функції, а  $f(\xi)$  – функція, що апроксимується.

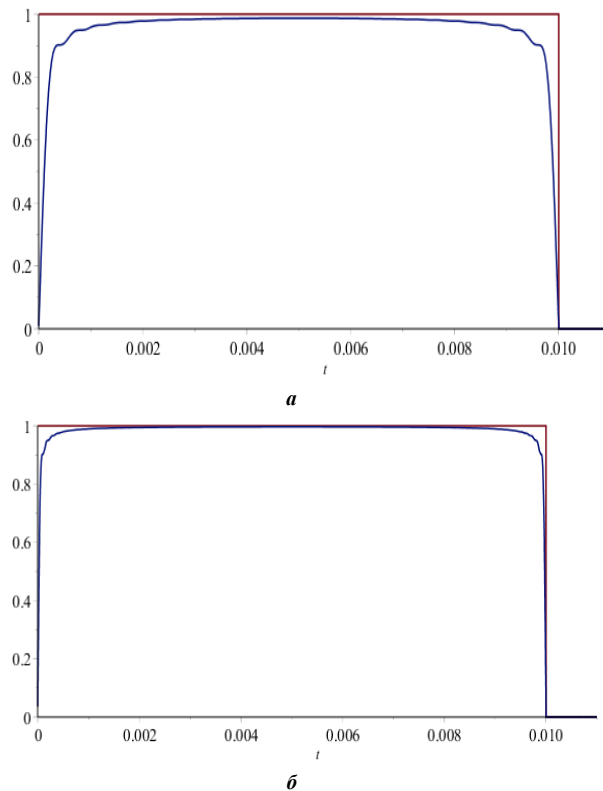


Рисунок 2 – Апроксимація ступінчастої функції чезаровськими сумами Фур'є з використанням ядра Фейєра: а – 50 членів ряду, б – 200 членів ряду

З графіків, наведених на рис. 2, видно, що при використанні такого підходу (2) результуюча функція виходить набагато більш плавною, і з ростом кількості утримуваних членів точність опису вихідного ступеневого імпульсу підвищується без внесення штучних осциляцій (також відомих як явище Гіббса).

В рамках цієї статті досліджується можливий вплив подібного роду спотворень на стабільність коливального процесу.

*Мета і завдання досліджень* – дослідити стабільність виявлених раніше [9, 10] субгармонійних режимів коливальних на прикладі системи з двома ступенями свободи внаслідок зміни форми імпульсу активної фази навантаження.

**Постановка задачі.** Як досліджувана модель використана нелінійна двомасова система з двома ступенями свободи (вільності) з нелінійним елементом – рис. 3 (перша з двох пружин має білінійну залежність жорсткості від переміщення – рис. 4).

Параметри, використані при математичному моделюванні, представлені у табл.1. Базою для математичного модулювання був програмний пакет Maple, який має широкий функціонал для розв'язання поставленої задачі [11–14].

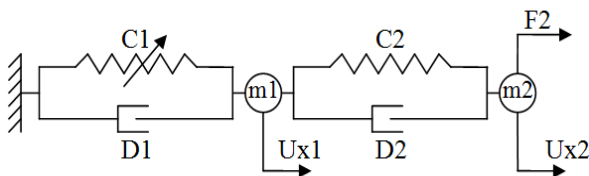
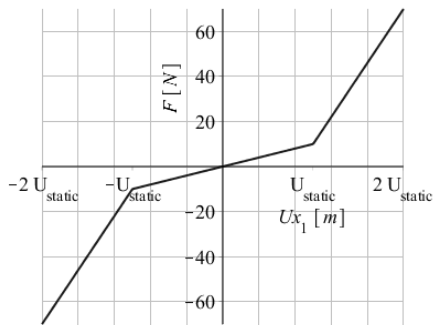


Рисунок 3 – Схема досліджуваної коливальної системи

Рисунок 4 – Характеристика білінійної пружини  
( $C1 \Rightarrow C11/C12$ )

Система рівнянь буде мати вигляд

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + D_1 \dot{u}_1 + D_2 (\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + C_1 u_1 + C_2 (u_1 - u_2) = 0, \\ m_2 \ddot{u}_2 + D_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + C_2 (u_2 - u_1) = f_2(t), \end{cases} \quad (3)$$

де  $f_2(t)$  – збуджуюча функція, графік якої наведено на рис. 5.

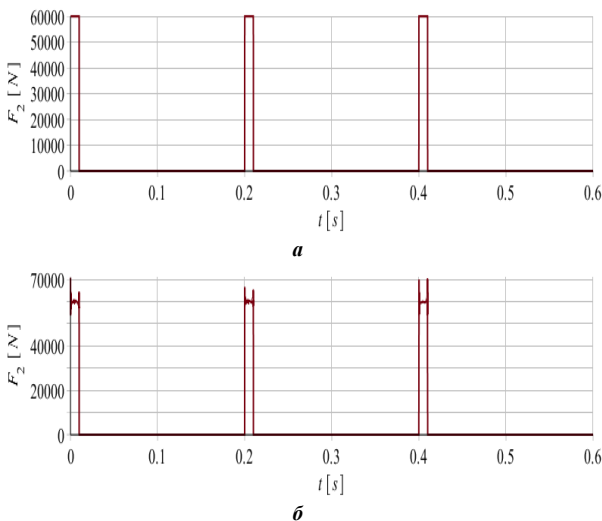


Рисунок 5 – Графік збуджуючої сили:  
а – періодичне імпульсне навантаження  $F_2$  / кусочно-лінійний прямокутний імпульс; б – за допомогою Фур'є-перетворення

Задля кількісної оцінки відмінності коливань одне від іншого, використовуючи період збуджуючого навантаження  $T$  як опорний, пропонується скористатися формулою (4)

$$k_i = \sum_q \frac{\left| |u_q(\tau + jT)| - |u_q(\tau)| \right|}{\left| |u_q(\tau + jT)| + |u_q(\tau)| \right|}, \quad (4)$$

нульові значення котрої будуть свідчити про повний збіг досліджуваних номерів коливань між собою. Таким чином, стає можливо дослідити кратність (дольність) субгармонійних (або гіпергармонійних) режимів.

**Результати досліджень.** На рис. 6–13 наведено графіки, що характеризують коливальний процес із параметрами, які відповідають табл. 1. Так, рис. 6, 7 демонструють початок коливального процесу та сталий режим відповідно. Обрані параметри відповідають субгармонійному режиму кратності три. Видно, що змінений після перетворення Фур'є імпульс практично не впливає на отримані результати коливального процесу ні на початковій стадії, ні після стабілізації.

Таблиця 1 – Параметри розрахункової моделі

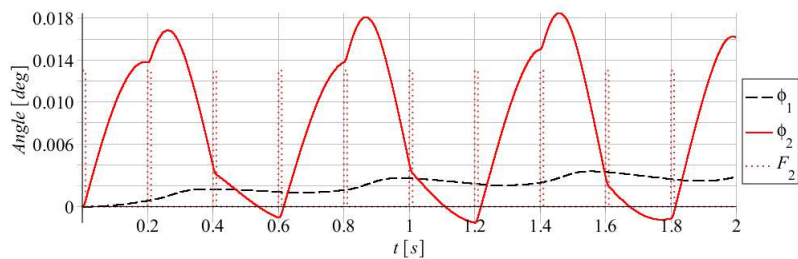
Маса $m1$ , [кг]	10 000
Маса $m2$ , [кг]	1300
Момент інерції $I1$ , [кг*град]	10000
Момент інерції $I2$ , [кг*град]	5200
Жорсткість $C1$ , [Н/град]	$C1=8 \cdot 10^5 \cdot C1coef$
$C1coef$	1
Жорсткість $C2$ , [Н/град]	$C21=3.5 \cdot 10^5$ $C22=C21 \cdot C22coef$
$C22coef$	5
Демпфування $D1$ , [Н/град*с]	$1 \cdot 10^6$
Демпфування $D2$ , [Н/град*с]	$1 \cdot 10^3$
Амплітуда імпульсу $F2$ , [Н]	60 000
Тривалість імпульсу $F2$ , [с]	0,01
Частота збудження $F2$ , [Гц]	5

Звертає на себе увагу майже повна ідентичність результатів. Так, зображені на рис. 8 та 9 результати дозволяють наочно дослідити, співставити кожне коливання окремо та порівняти їх в межах одного періоду. Так, рис. 8, 9 демонструє безпосередньо амплітуди коливань та їх зміни в межах одного періоду, рис. 10 – порівняння за формулою (4), нульові значення якої свідчать про повний збіг досліджуваних номерів коливань.

Розроблений програмно-модельний комплекс дозволяє порівнювати як окремі коливання та фази, так і їх набори. Так створюється тривимірний графічний розподіл для всього коливального процесу – кожне коливання сепарується та зберігається окремо, створюється матриця результатів, що дає змогу надалі використовувати повною мірою математичний апарат лінійної алгебри.

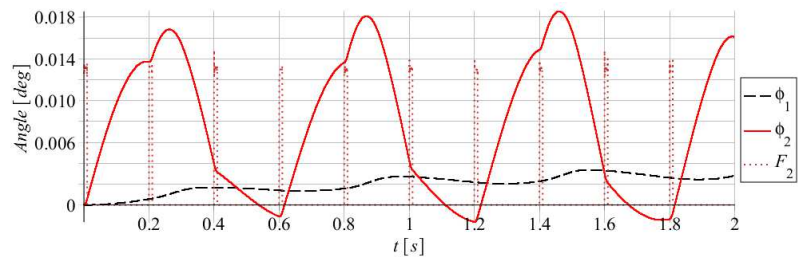
Рис. 11 демонструє фазові портрети для різних діапазонів. На рис. 12 наведено окремі фазові портрети для маси  $m1$  і  $m2$  та зображено періоди кожного з трьох характерних повторюваних коливань.

Також одним з наочних засобів аналізу субгармонійних режимів є використання перерізів Пуанкаре – рис. 13 (умовні позначки: коло – перше коливання з діапазону, прямий та похилий хрест – останнє парне та непарне коливання відповідно), що в цьому випадку також підтверджує субгармоніку кратності три. Графічне відображення траєкторій сумісного руху коливань мас  $m1$  та  $m2$  наведено на рис. 14, що також дає змогу вести мову про сталий коливальний процес.



Vibrations from 0 to 10 Subharm # 3

**a**



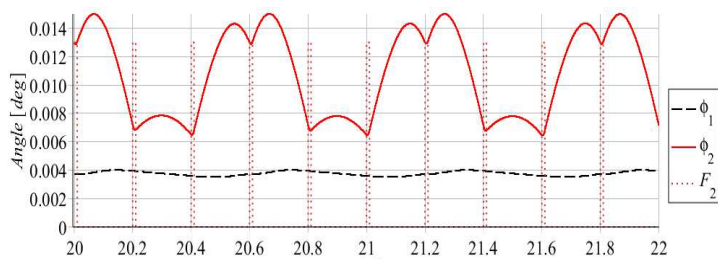
Vibrations from 0 to 10 Subharm # 3

**б**

Субгармонійний кратності 3

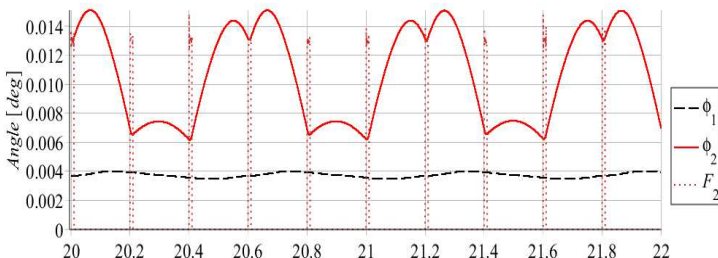
Рисунок 6 – Часові розподіли переміщень:

*a* – перші 10 коливань / кусочно-лінійний прямокутний імпульс; *б* – після перетворення Фур’є



Vibrations from 100 to 110 Subharm # 3

**a**



Vibrations from 100 to 110 Subharm # 3

**б**

Рисунок 7 – Часові розподіли переміщень:

*a* – сталий режим / кусочно-лінійний прямокутний імпульс; *б* – за допомогою перетворення Фур’є

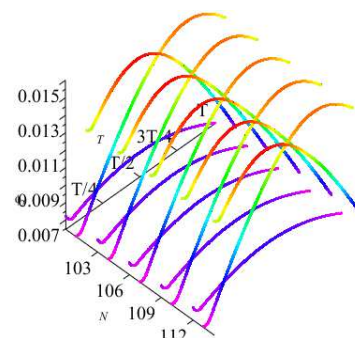
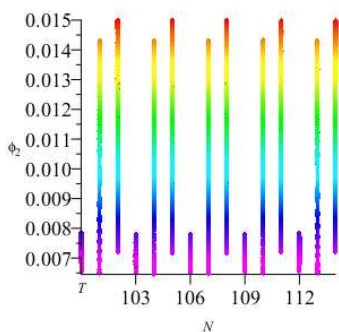
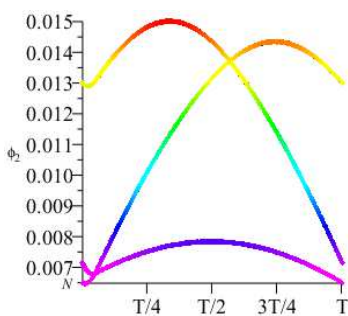


Рисунок 8 – Часові розподіли переміщень (субгармоніка кратності три) – прямокутний імпульс

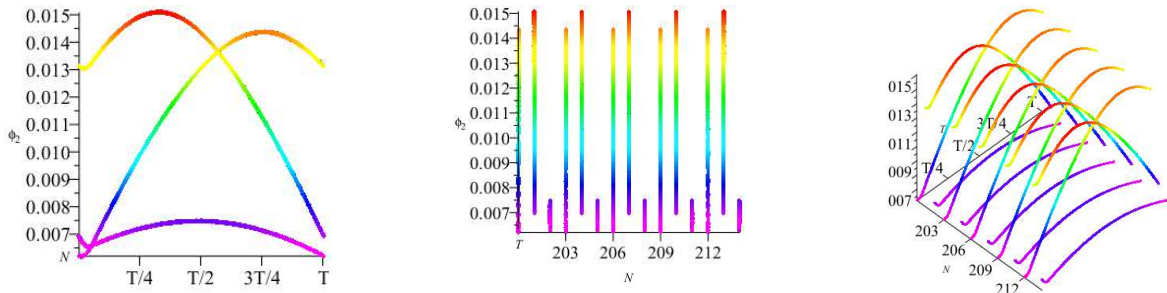


Рисунок 9 – Часові розподіли переміщень (субгармоніка кратності три) – за допомогою перетворення Фур'є

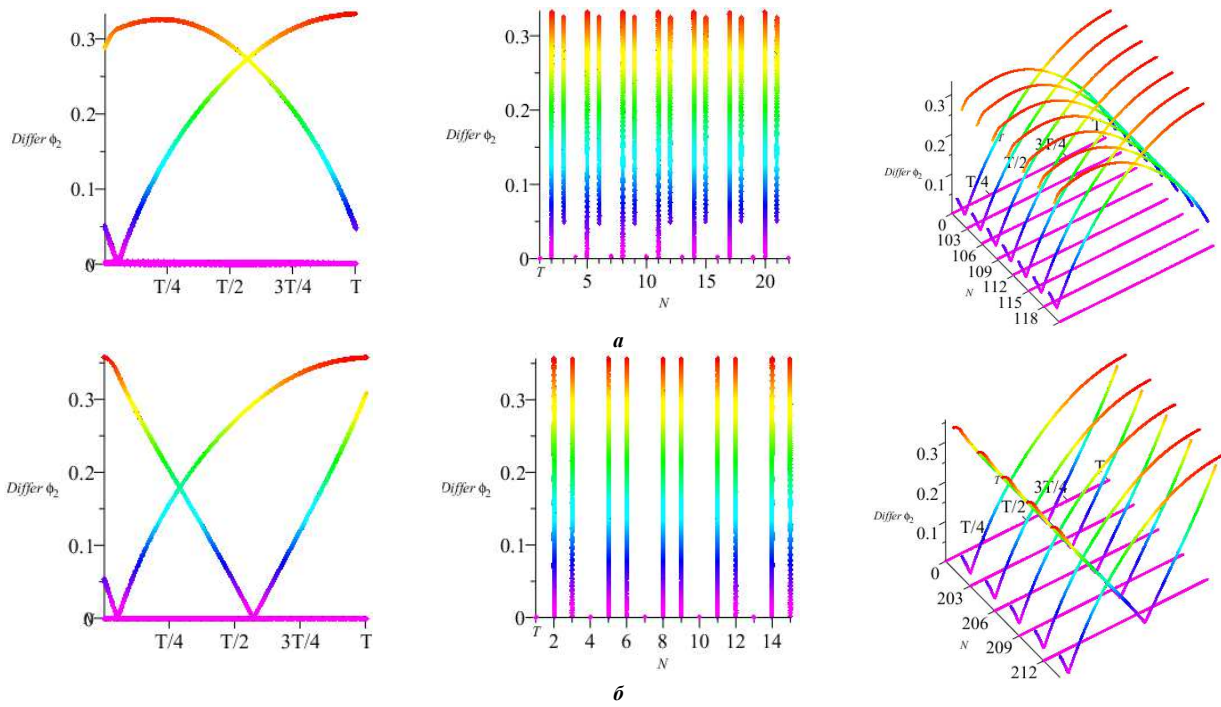


Рисунок 10 – Характеристика зміни коливання, обчислена за формулою (4):  
 а – прямокутний імпульс, б – за допомогою перетворення Фур'є

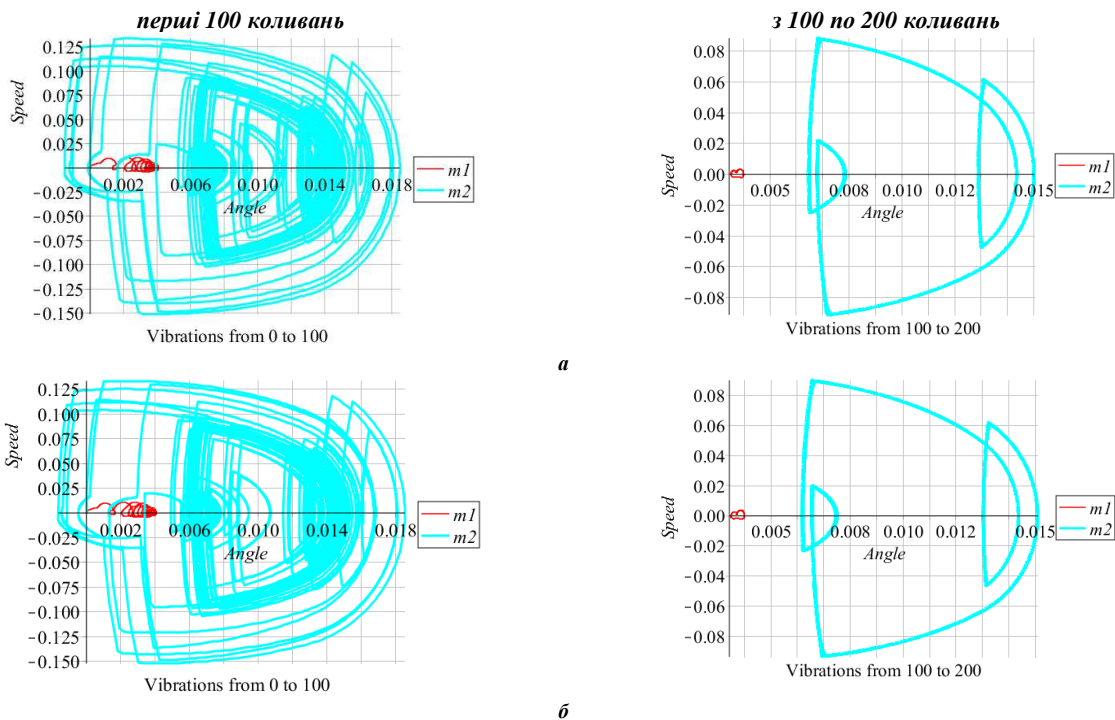


Рисунок 11 – Фазові траєкторії: а – прямокутний імпульс, б – після перетворення Фур'є

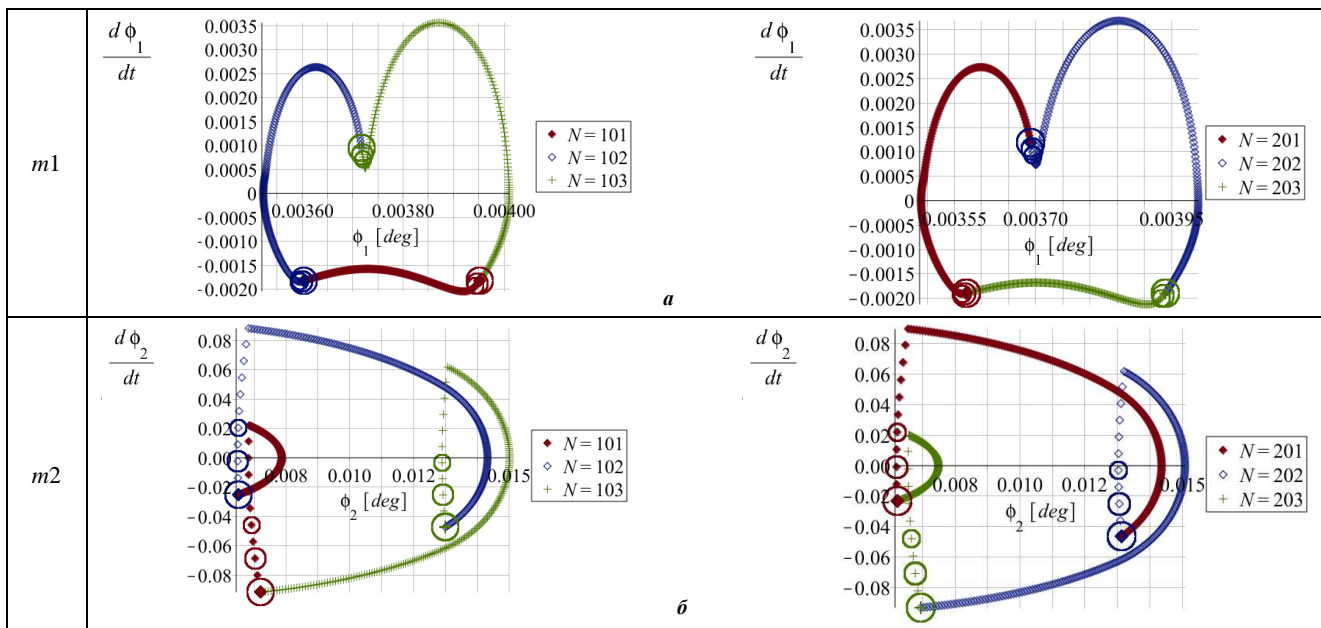


Рисунок 12 – Фазові траєкторії для повторюваної трійки коливань (колами позначено початок та напрямок руху кожного коливання): *a* – прямокутний імпульс, *б* – за допомогою перетворення Фур’є

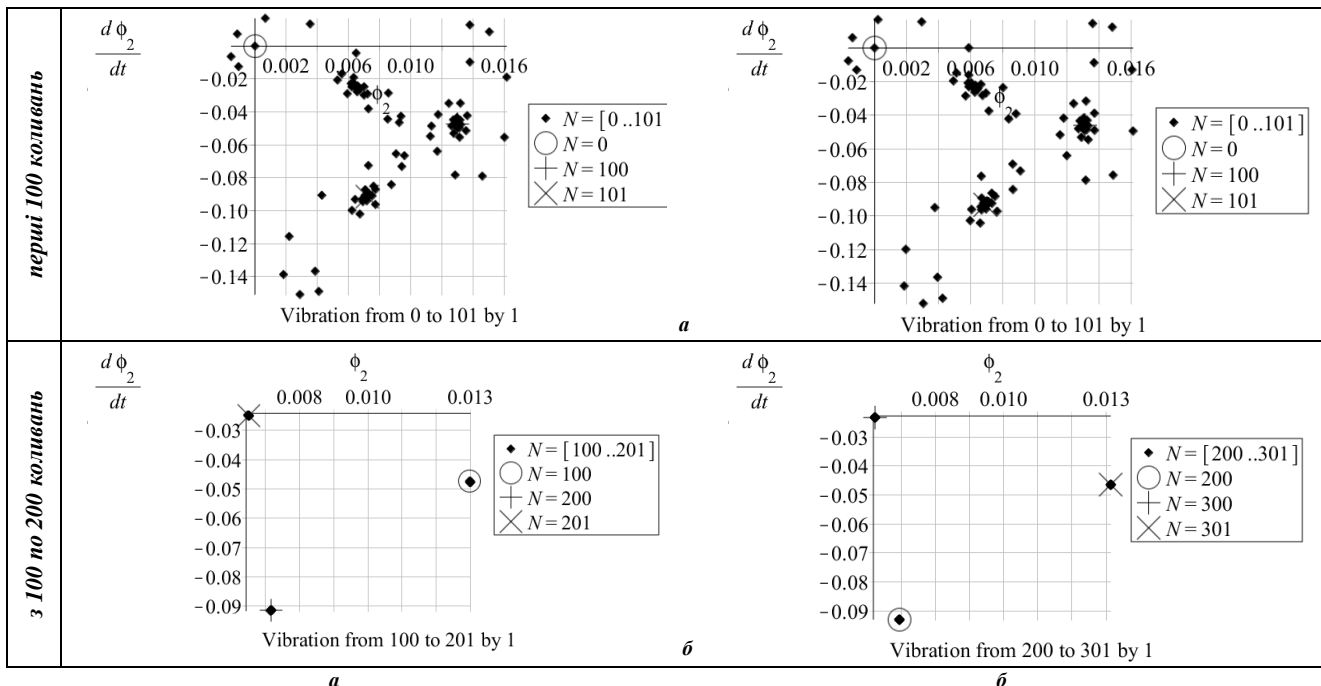


Рисунок 13 – Переріз Пуанкаре: *a* – прямокутний імпульс, *б* – за допомогою перетворення Фур’є

**Висновки.** Аналіз отриманих результатів дає підґрунтя для наступних висновків:

- 1) запропонований підхід може бути базою для виявлення та досконалого дослідження субгармонійних режимів у нелінійних системах;
- 2) змодельовані спотворення прямокутного імпульсу після перетворення Фур’є призвели до незначної зміни характеру коливального процесу – субгармонійного режиму. Однак слід зауважити, що збуджуючий імпульс використовувався як силове навантаження, що певною мірою нівелювало паразитне викривлення. Напрямоком подальших досліджень може бути аналіз ситуації при кінематичному наван-

таженні.

3) на прикладі системи з двома ступенями вільності продемонстровано стабільність субгармонійних режимів при зміні параметрів збуджуючого силового навантаження;

4) створений програмний комплекс дає змогу наочно та з високою долею вірогідності дослідити можливість виникнення субгармонійних режимів коливань для різноманітних діапазонів варійованих параметрів нелінійної системи.

У подальшому запропонований підхід може бути застосовано до дослідження широкого класу реальних машинобудівних конструкцій.

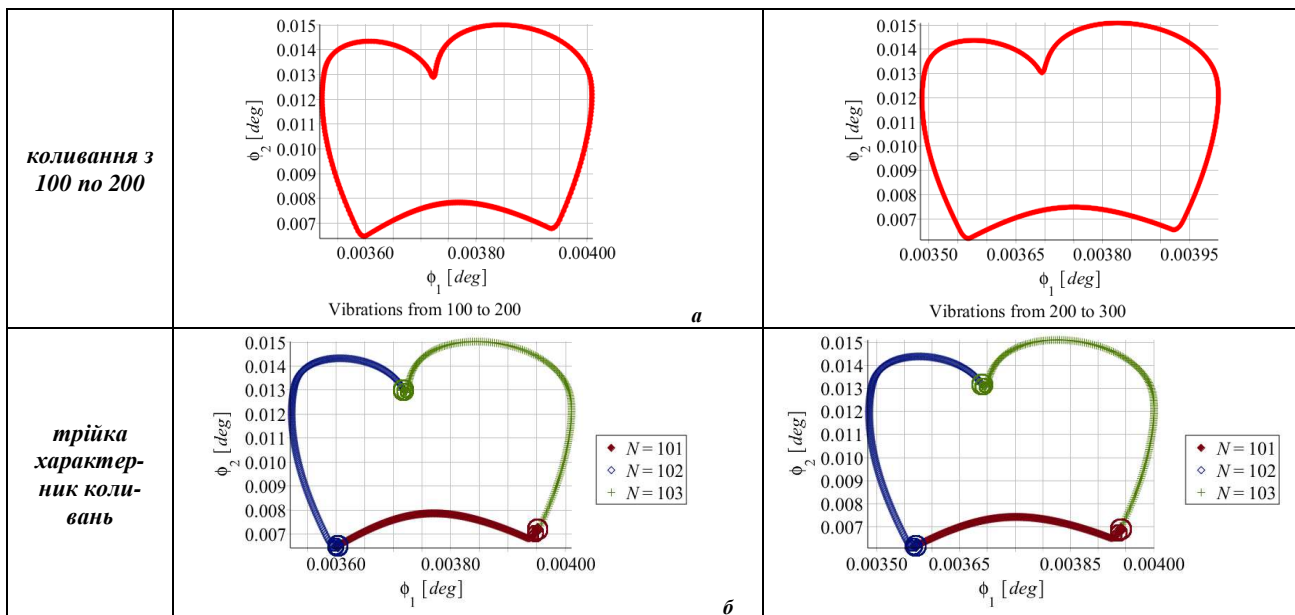


Рисунок 14 – Траєкторії сумісного руху мас  $m_1$  та  $m_2$ . *a* – прямокутний імпульс, *б* – за допомогою Фур'є перетворення

#### Список літератури

1. Бабаков И.М. *Теория колебаний*. Москва, Дрофа, 2004. 591 с.
2. *Вибрації в техніці. Колебания нелинейных механических систем*. Т. 2 / Под ред. И. И. Блехмана. Москва: Машиностроение, 1979. 351 с.
3. Хаяси Т. *Нелинейные колебания в физических системах*. Москва, Мир, 1968. 432 с.
4. Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Из-во «Ленанд», 2014. 248 с.
5. Гритченко В. Т., Маципура В. Т., Снарский А.А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. М.: Изд. ЛКИ, 2007.
6. Blanchard P., Devaney R.L., Hall G.R. *Differential equations*. Brooks/Coll, 2002.
7. Лодкин А.А. *Иллюстрации к теме "Ряды Фурье"*. СПб.: С-Петербург. гос. ун-т, 2004. - 7 с.
8. Танченко А.Ю., Веретельник О.В. К вопросу о моделировании изменяемой во времени и перемещаемой в пространстве нагрузки *Механіка та машинобудування*. Харків: НПКП "Механіка", 2014. № 1. С. 24–28.
9. А. Ю. Танченко, М. А. Ткачук, А. В. Набоков, А. В. Грабовський, А. М. Малакей Нелінійні коливання елементів легкоброньованих машин: модельні задачі та якісні особливості. *Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Транспортне машинобудування*. 2018. №29 (1305). С. 108–129
10. Танченко А.Ю. Дослідження субгармонійних режимів коливань на прикладі системи з двома ступенями свободи при імпульсному навантаженні. *Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Динаміка і міцність машин*. 2018. №38 (1314). С. 49–55.
11. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. СПб.: Питер, 2004. 539 с.
12. Дьяконов В.П. *Maple 9.5 10 в математике, физике и образовании*. М.: Солон-Пресс, 2006. 720 с.
13. Кондратьев В.П. Язык программирования. Система Maple. Полный курс Учеб. пособие. 2006. 216 с.
14. Коптев А.А., Пасько А.А., Баранов А.А. *Maple в инженерных расчетах*. Учебное пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2003. 80 с.

#### References (transliterated)

1. Babakov I.M. *Teoriya kolebaniy* [Theory of vibrations]. Moscow, Drofa, 2004. 591 p.
2. *Vibratsii v tekhnike. Kolebaniya nelineynykh mekhanicheskikh sistem* [Vibrations in technology. Oscillations of nonlinear mechanical systems]. Vol. 2 / Ed. I. I. Blekhnman. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1979, 351 p.
3. Khayasi T. *Nelineynyye kolebaniya v fizicheskikh sistemakh* [Nonlinear oscillations in physical systems]. Moscow, Mir Publ., 1968. 432 p
4. Malkin I. G. *Metody Lyapunova i Puankare v teorii nelineynykh kolebaniy* [Methods of Lyapunov and Poincaré in the theory of nonlinear oscillations]. Lenand Publ., 2014. 248 p.
5. Gritchenko B. T., Matsipura B. T., Snarskiy A.A. *Vvedenie v nelineynuyu dinamiku: Haos i fraktaly*. Moscow: Izd. LKI, 2007.
6. Blanchard P., Devaney R.L., Hall G.R. *Differential equations*. Brooks/Coll, 2002.
7. Lodkin A.A. *Ilyustratsii k teme "Ryadyi Fure"*. SPb.: S-Peterb. gos. un-t, 2004. 7 p.
8. Tanchenko A.Yu., Veretelnik O.V. K voprosu o modelirovani izmenyaemoy vo vremeni i peremeschaemoy v prostranstve nagruzki *Mehaniка ta mashinobuduvannya*. 2014, no 1, pp. 24-28.
9. Tanchenko A. Yu., M. A. Tkachuk, A. V. Nabokov, A. V. Grabovskiy, A. M. Malakey Nelineyni kolivannya elementiv legkobronovanih mashin: modelni zadachi ta yakisni osoblivosti. *Visnik NTU "KhPI"*. 2018, no 29 (1305), pp. 108–129
10. Tanchenko A.Yu. Doslidzhennya subgarmoniynih rezhimiv kolivan na prikladi sistemi z dvoma stupenyami svobody pri impulsnomu navantazheni. *Visnik NTU "KhPI"*. 2018, no 38 (1314), pp. 49–55
11. Goloskokov D.P. *Uravenniya matematicheskoy fiziki. Reshenie zadach v sisteme Maple*. SPb.: Piter, 2004. 539 p.
12. Dyakonov V.P. *Maple 9.5 10 v matematike, fizike i obrazovanii*. M.: Solon-Press, 2006. 720 h.
13. Kondratev V.P. *Yazyki programmirovaniya. Sistema Maple. Polnyi kurs. Ucheb. posobie*. 2006, 216 p.
14. Koptev A.A., Pasko A.A., Baranov A.A. *Maple v inzhenernykh raschetakh Uchebnoe posobie*. Tambov: Izd-vo Tamb. gos. tehn. un-ta, 2003. 80 p.

Надійшла (received). 12.11.2018

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Танченко Андрій Юрійович (Танченко Андрей Юрьевич, Tanchenko Andrii Yuriovich)** – кандидат технічних наук (PhD), Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», старший науковий співробітник кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0388-0192>; e-mail: ATanchenko@tmm-sapr.org