

Н. Н. ТКАЧУК

АНАЛИЗ РЕАКЦИИ ВОЛОКОННЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗОК НА ОСНОВЕ МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В работе предложены нелинейные физические и математические модели на основе микромеханики волоконных материалов на уровне статистических ансамблей их цепочек. Для решения поставленной задачи создания теоретических основ расчета деформирования элементов машиностроительных конструкций из таких материалов использовались методы механики сплошной среды, в частности, для формирования уравнений состояния. Для вывода нелинейных уравнений, описывающих физико-механические свойства полимерных материалов, привлекались и усовершенствовались соотношения статистической микромеханики волоконных цепочек, находящихся во взаимодействии друг с другом. На основе вариационных принципов построены новые вариационные формулировки общих задач определения деформирования волоконных материалов под действием нагрузок с учетом влияния истории нагружения. Учитывается, в частности, трение волокон и проскальзывание отдельных волокон друг относительно друга. Предложены также модели гомогенизации свойств волоконных материалов. Они отличаются от известных процедурой осреднения с привлечением интегрирования с весом по замкнутой поверхности вокруг точки усреднения. На этой основе осуществлен переход от свойств микромоделей к свойствам макромеханических моделей. В результате разработаны новые, более адекватные нелинейные математические модели поведения материала, построенные с привлечением принципиально новых авторских подходов к описанию физико-механических свойств на микроуровне статистических наборов волоконных цепочек и пространственной гомогенизации их макросвойств. На этой основе могут быть установлены новые закономерности поведения волоконных материалов и композиций на их основе под механической нагрузкой. В конечном итоге создана основа для формирования макромеханических свойств материалов на основе математического моделирования микроансамблей волоконных цепочек и нитевых сетей, что предоставляет возможности прогнозирования свойств не только существующих, но и еще только создаваемых материалов. Разработана база для конструирования материалов с заданными физико-механическими свойствами.

Ключевые слова: волоконный материал, напряженно-деформированное состояние, микромеханическая модель, макромеханическая модель, вариационная постановка, модель гомогенизации.

М. М. ТКАЧУК

АНАЛІЗ РЕАКЦІЇ ВОЛОКОННИХ МАТЕРІАЛІВ НА ДІЮ НАВАНТАЖЕНЬ НА ОСНОВІ МІКРОМЕХАНІЧНИХ МОДЕЛЕЙ

У роботі запропоновано нелінійні фізичні та математичні моделі на основі микромеханіки волоконних матеріалів на рівні статистичних ансамблів їх ланцюжків. Для вирішення поставленої задачі створення теоретичних основ розрахунку деформування елементів машинобудівних конструкцій із таких матеріалів використовувалися методи механіки суцільного середовища, зокрема, для формування рівнянь стану. Для виведення нелінійних рівнянь, що описують фізико-механічні властивості полімерних матеріалів, було залучено та вдосконалено співвідношення статистичної микромеханіки волоконних ланцюжків, які знаходяться у взаємодії один з одним. На основі варіаційних принципів побудовано нові варіаційні формулювання загальних задач визначення деформування волоконних матеріалів під дією навантажень із урахуванням впливу історії навантаження. Враховується, зокрема, тертя волокон та прослизання окремих волокон один щодо одного. Запропоновано також моделі гомогенізації властивостей волоконних матеріалів. Вони відрізняються від відомих процедурою осереднення із залученням інтегрування із вагою по замкнутій поверхні навколо точки осереднення. На цій основі здійснено перехід від властивостей мікромоделей до властивостей макромеханічних моделей. У результаті розроблено нові, більш адекватні нелінійні математичні моделі поведінки матеріалу, які побудовано із залученням принципово нових авторських підходів до опису фізико-механічних властивостей на мікрорівні статистичних наборів волоконних ланцюжків і просторової гомогенізації їх макровластивостей. На цій основі можуть бути встановлені нові закономірності поведінки волоконних матеріалів і композицій на їх основі під механічним навантаженням. У кінцевому підсумку створено основу для формування макромеханічних властивостей матеріалів на основі математичного моделювання мікроансамблей волоконних ланцюжків та ниткових мереж, що надає можливість прогнозування властивостей не тільки існуючих матеріалів, але і тих, що тільки створюються. Розроблено базу для конструювання матеріалів із заданими фізико-механічними властивостями.

Ключові слова: волоконний матеріал, напружено-деформований стан, микромеханічна модель, макромеханічна модель, варіаційна постановка, модель гомогенізації.

М. М. ТКАЧУК

ANALYSIS OF FIBROUS MATERIALS RESPONSE TO FINITE DEFORMATIONS BASED ON MICROMECHANICAL MODELS

The work proposes nonlinear physical and mathematical models based on fiber materials micromechanics down to the level of statistical ensembles of segments. The main purpose is analysis of the deformed state of engineering structures composed of such materials. The theoretical grounds to the proposed approach included methods of solid mechanics, in particular the general formulation of the state equations. The nonlinear relations describing physico-mechanical properties of polymer materials are derived by means of the special statistical theory of fiber network micromechanics. New variational formulations are derived from the variational principles. They can be used to determine mechanical response of fiber-based material to finite deformations with account for the loading history. The irreversible mechanisms treated by the proposed approach included inter-fiber friction resulting in their relative sliding. Furthermore model homogenization has been proposed for these fibrous materials. It is distinguished by an averaging procedure that relies on integration in the representative orientation space. This allows effective transition from the microscopic model to the macroscopic properties of the material. As a result new, more adequate nonlinear material models based on the novel approach to the statistical homogenization of materials microstructure are developed. They provide useful micromechanical explanation of the peculiar properties of such materials and can quantitatively accurately determine their behavior under mechanical load. Besides the analysis of the existing materials it is possible to predict mechanical properties of the newly developed materials based on these theoretical grounds. This information is crucial in light of the high-performance tailored materials.

Keywords: fibrous material, stress-strain state, micromechanical model, macromechanical model, variational formulation, homogenization model.

Введение. Обеспечение конструкционной прочности элементов машин зачастую требует привлечения новых моделей поведения материалов для более адекватного и точного расчета напряженно-деформированного состояния (НДС).

Это обстоятельство диктуется широким использованием и прогрессирующей разработкой современных материалов, в т.ч. волоконной структуры. Традиционные модели не подходят для описания их поведения. Кроме того, современный феноменологический подход в этом

© Н. Н. Ткачук, 2018

случае недостаточен, т.к. дает информацию только для конкретного типа материала в заданных условиях работы и в конечном диапазоне нагрузок. В то же время перед механикой стоят в этом разрезе более широкие задачи:

- определение тенденций изменения физико-механических характеристик в зависимости, например, от состава и строения цепочек волоконных наполнителей;
- создание композиционных материалов с заданными свойствами;
- объяснение зачастую неочевидных тенденций в изменении физико-механических свойств материалов при изменении химического состава, температуры, технологии изготовления и т.п.

Все эти обстоятельства выдвигают на первый план микромеханические подходы, которые предоставляют возможности расчета физико-механических макрохарактеристик на основе рассмотрения поведения микроструктуры материала вплоть до моделей статистической механики волоконных цепочек. В настоящее время в мире этому направлению исследований уделяется широкое внимание. В частности, в работе [1] описаны достижения в этой области.

Однако разработанные до настоящего времени подходы дают результаты, не в полной мере соответствующие экспериментальным данным и данным

практической эксплуатации. Это сопряжено со сложностями математического моделирования поведения статистически представительных ансамблей волоконных цепочек или нитей материала во взаимодействии с другими нитями (например, в так называемых нетканых материалах). Таким образом, разработка новых подходов и формирование на их основе новых нелинейных математических моделей для более адекватного описания физико-механических свойств материалов путем анализа их поведения на уровне статистической механики ансамблей волоконных цепочек является актуальной научно-технической проблемой.

Как отмечалось выше, достаточно полный анализ литературных публикаций по затронутой в работе теме представлен в работе [1]. В частности, значительного прогресса в построении моделей деформирования волоконных пространственных структур достигли авторы работ [2–16]. В работе [1] представлен альтернативный класс моделей, приведенных в табл. 1, основанный на подходе усреднения для описания случайных сетей. Они обычно используются для анализа поведения материала при конечно-элементном моделировании сплошных тел. Эти теории рассматривают большие микроскопические сети в терминах усредненных распределений вместо их детального дискретного построения.

Таблица 1 – Обзор случайных сетевых моделей

Ссылки	Геометрия	Кинематика	Микромеханика
<i>Дискретные модели</i>			
[13–16]	Случайным образом генерируется дискретная сетка волокон	Растягивание и изгиб волокон по соответственным степеням свободы	Общая деформация сети достигается в статичном или термодинамическом равновесии
<i>Усредненные сетевые модели</i>			
[17–20]	Статистическое распределение геометрических параметров волокон в сети	Продольное растягивание волокон из этого распределения	Аффинное распределение растягивания микроволокон
[21–24]	Восемь волокон, расположенных на диагоналях параллелепипеда	Идентичное растягивание всех восьми волокон в репрезентативной ячейке	Растяжение сторон ячейки в соответствии с направлениями и значениями главных деформаций
[25, 26]	Полное изотропное распределение волокон по их начальным ориентациям	Продольное растягивание волокон как функция их первичной ориентации	Неаффинная микродеформация определяется из принципа минимума усредненной энергии

В частности, рассматриваются распределения величин, которые описывают микродеформации сети. Их связь с макроскопической деформацией, которая является основным внешним влиянием на материал, является ключевым вопросом, который решается в этих усредненных моделях по-разному. Очевидное допущение заключается в том, что микродеформации и определяемые статистические распределения изменяются по аффинным соотношениям согласно градиенту деформации твердого тела. Такой подход используется в классических теориях упругости каучука Куна и Грюна [17] или Трелоара и Ридинга [18], а также во многих других более современных моделях эластомеров и других волокнистых материалов.

Благодаря простоте аффинных соотношений во многих случаях возможно вычислить усредненные напряжения как функцию макроскопических деформаций в аналитической форме.

Одновременно с этим вокруг аффинной кинемати-

ки микродеформаций волокон построены многочисленные модели, преимущественно объединенных общим подходом. Он заключается в том, что совокупность волокон в сетчатой микроструктуре ассоциируется с пространством их ориентаций в деформированной конфигурации, так называемой микросфере [27]. Каждая отдельная точка на этой сфере определяет единственный вектор первичной ориентации определенной части волокон в микроструктуре. Если принять предположение, что поведение одинаково ориентированных волокон совпадает, тогда все микроскопические величины можно рассматривать как однозначные функции, определенные на микросфере. Так, например, в пределах аффинной кинематики удлинение волокон определяется как норма вектора ориентации в метрике тензора деформаций Грина. Такой подход дает возможность определять усредненный отклик материала на деформации путем интегрирования на микросфере энергии удлинения волокон. Вычисление усредненных величин

происходит с использованием специальных квадратурных формул на единичной сфере, предложенных в [28]. Квадратурные точки образуют в пространстве ориентаций дискретную структуру, которая приближает распределенную во всех возможных направлениях систему волокон к оригинальной микроструктуре. Каждое отдельное дискретное направление можно подать как сконцентрированный пучок волокон, который представляет определенную часть сетки и имеет соответствующий вес в общей структуре.

Невзирая на все преимущества простоты такого подхода, является достаточно очевидным, что ограничение аффинными деформациями является слишком жестким для неупорядоченных сетей с бесконечным числом степеней свободы. О несовершенстве используемых предположений свидетельствуют также и экспериментальные данные [24], а также результаты дискретного моделирования случайных сетей [14].

Много явлений и свойств, присущих мягким веществам, никоим образом не согласуются с теми, которые предусматривается аффинными микромеханическими моделями. В частности, расхождение с аффинной теорией демонстрирует поведение эластомеров при существенном одноосном и двухосном растяжении, поскольку оно не объясняет отличий границы, на которой происходит резкий рост модуля упругости материала между этими двумя типами нагрузок, которая наблюдается в экспериментах [25, 29, 30]. Это обстоятельство мешает использованию неогоуковской модели при деформациях, которые превышают 50%. Другим примером может служить поведение биологических гелей, которые состоят из полугибких волокон. Переход от мягкого режима этих материалов, связанного с изгибом волокон, к усилению упругого отклика, когда волокна начинают испытывать продольное растяжение, также не отвечает аффинным предположениями, по которым волокна сжимаются или растягиваются при любых ненулевых деформациях [14, 31]. Для приведенных примеров расхождение экспериментальных наблюдений с теоретическим прогнозом представляет для аффинной кинематики не просто количественное отличие, но и достигает качественного разрыва.

Существенная неаффинность микродеформаций в материалах с волокнистым микростроением вызвана особенностями механического отклика волокон и их взаимодействия в сети одновременно с неоднородностью и нерегулярностью дискретной микроструктуры, которая содержит огромное количество степеней свободы. Эта внутренняя свобода предусматривает возможность для волоконной сети следовать макроскопической деформации многими способами, отличающимися от аффинной траектории. Определение адекватных кинематических соотношений представляет главную задачу микромеханических обоснованных моделей для мягких материалов с сетевым микростроением.

Существует несколько подходов к учету неаффинных деформаций микроволокон. Самые простые из них искусственно представляют материал в точке эквивалентной трехмерной структурой. Эта структура может состоять из трех групп волокон, ориентированных вдоль главных направлений деформации [32], или четырех [33], направленных в углы пирамиды, или восьми, расположенных на диагоналях куба, как было предложено

Арруда и Бойс [21]. Последняя получила наибольшее распространение благодаря простоте выражения относительно первого инварианта тензора деформаций, а также высокой точности приближения реального поведения резины при малых и больших повреждениях.

Однако, такие искусственные конструкции, которые представляют деформации сетей, существенно ограничивают круг свойств, которые можно с их помощью смоделировать. Намного более универсальной оказалась известная неаффинная модель микросферы, которая была предложена Мие и соавторами в работе [27]. Эта модель рассматривает полное пространство ориентаций волокон, однако, в отличие от ранее предложенных подходов, при этом отказываются от прямых соотношений между макроскопической деформацией и микроскопическими деформациями волокон. Осевое удлинение при этом определяется как неизвестная функция на микросфере ориентаций, вариация которой ограничивается кинематическими условиями связи. Предложенное кинематическое соотношение основано на феноменологических рассуждениях без соответствующего физического обоснования и содержит искусственный дополнительный параметр.

Для определения неизвестных микродеформаций в рамках этого подхода применяется принцип минимума, а именно за действительные удлинения волокон принимаются такие, которые минимизируют усредненную энергию деформации сетки при условии выполнения вышеизложенного кинематического ограничения. В случае резиноподобных материалов энергия растягивания макромолекулярных цепочек является выпуклой функцией, следовательно, задача условной минимизации имеет единственное решение при любых наложенных макродеформациях. Более того, для предложенного кинематического соотношения в работе [25] решение можно получить в замкнутой форме независимо от модели растяжения цепей. Показательно, что при определенном значении дополнительного параметра это выражение для растяжения оказывается идентичным тому, которое будет постулироваться восьмизвенной моделью [29]. Вследствие этого решением, кроме минимума усредненной энергии, также определяются и усредненные механические напряжения, а также модуль упругости материала по конечным деформациям. Все эти величины вычисляются по известным квадратурным формулам [28, 34, 35].

Однако, разработанные модели не вполне удовлетворяют требованиям науки и практики, что побуждает проводить их совершенствование, что и является предметом данной статьи. Они являются развитием подходов, предложенных в работах [36, 37]. В ней было предложено определять микродеформации волокон полным вектором удлинения, который, в отличие от предыдущих моделей, ограничивался только абсолютным скалярным значением растяжения. В дополнение этот вектор содержит информацию о том, каким образом волокна поворачиваются (вращаются) при деформации сетей. Было предложено новое кинематическое соотношение, которым устанавливается связь между значениями вектора микродеформаций на микросфере и макроскопической деформацией материала. При этом оно получило надлежащее обоснование со стороны статистической теории так называемых путей макси-

мального продвижения в случайной сети. В итоге полученные соотношения явно учитывают такое важное свойство волоконных сетей, как их объединение. В частности, для сетей с функциональностью четыре, соответствующих химически сшитым молекулам эластомеров, получена компактная тензорная форма кинематического микро-макроуравнения, которая имеет полностью понятную интерпретацию. В рамках этого подхода принцип минимума усредненной энергии приводит к неоднородным неаффинным микродеформациям, распределение которых зависит непосредственно от свойств звеньев сети и их параметров. Распределение этих микродеформаций на дискретизированной микро-сфере получается путем численного решения нелинейной задачи условной минимизации. Усредненные механические напряжения получаются из решения об определении векторов осевых сил в волокнах. Преимуществом такого подхода является наиболее точный из существующих неаффинных моделей учет механизма перераспределения деформаций в сети.

Общая формулировка, модели и методы исследований. Соотношения механики сплошных сред являются в настоящее время достаточно отработанными с точки зрения методов решения задач определения напряженно-деформированного состояния. В то же время требования техники, возможности технологии и материаловедения приводят к тому состоянию, когда исходные базовые гипотезы и модели выходят на границы области своего применения.

В частности, это относится к двум важным аспектам. Во-первых, в настоящее время в различных отраслях промышленности находят свое широкое применение различные волоконные материалы, в частности, так называемые нетканые. Для исследования поведения таких материалов под нагрузкой неприемлемы традиционные подходы на основе представления материала в виде сплошной среды. Дело в том, что уже на микроуровне (рис. 1) даже элементарный фрагмент материала нельзя гомогенизировать с применением традиционного подхода механики сплошной среды.

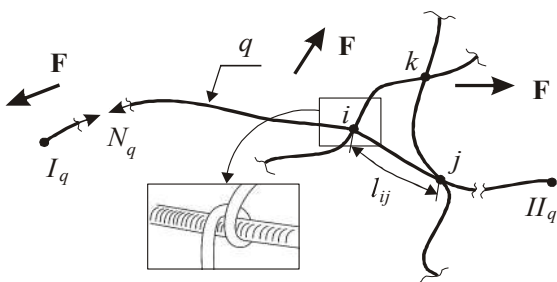


Рис. 1 – Сетевая структура волоконистого нетканого материала:

i, j, k – узлы взаимодействия отдельных нитей фрагмента Φ ;
 L_q, P_q – начальные и конечные края волокна с номером q длиной L_q и диаметром d_q

В данном случае теряется традиционный смысл понятия напряжения. Это вызвано тем, что на микроуровне геометрическая форма фрагмента Θ материала, подвергающегося действию нагрузки F , определяется начальной конфигурацией положения узлов взаимодействия отдельных волокон i, j, k, \dots , а также начальных расстояний l_{ij} между отдельными узлами. Вторым важным момен-

том является то, что в процессе нагружения и положение узлов в пространстве, и межузловая длина являются изменяемыми. В этом случае в силу исчезающе малой изгибной жесткости волокон исследуемого материала при малом их диаметре единственным силовым фактором является неотрицательное усилие растяжения N (см. рис. 1), обусловленное осевым напряжением σ , распределенным равномерно в сечении волокна. Естественно, что при этом

$$l_{ij} = \Delta r_{ij} \Leftrightarrow N_q > 0, \sigma_q > 0 \forall q, \quad (1)$$

а вследствие – гипотеза о свободном ненапряженном состоянии участка волокна при соблюдении условия

$$N_{q_i} = 0 \Leftrightarrow l_{ij} \geq \Delta r_{ij}, \quad (2)$$

где $N_{q_i}, l_{ij}, \Delta r_{ij}$ – внутренние усилия на участке между узлами i, j , длина участка волокна и расстояние между узлами в актуальном состоянии соответственно.

В самом узле соединения (рис. 2) происходит либо сохранение относительного покоя вследствие значительной величины усилия трения покоя:

$$\Delta l_i = 0; N_{\text{тр}_i} = Q_i k_{\text{тр}} \geq N_{q_i}^+ - N_{q_i}^-, \quad (3)$$

либо происходит относительное движение на величину проскальзывания Δl_i до удовлетворения условий равновесия

$$\Delta l_i > 0; N_{q_i}^+ - N_{q_i}^- = N_{\text{тр}_i}. \quad (4)$$

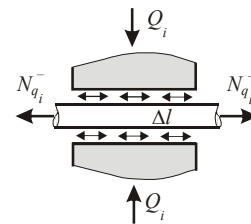


Рис. 2 – Модель взаимодействия волокон в узле i

Поскольку в рассматриваемой системе присутствуют условия типа неравенств (1)–(4), то процесс необходимо рассматривать в приращениях нагрузок ΔF и конфигураций $\Delta \Theta$. Этим самым получаем математическую формализацию и отличительную физическую особенность, что механизм деформирования такого материала принципиально отличен от механизма деформирования традиционного композиционного материала, погруженного в матрицу.

Отмеченные выше две особенности не позволяют переходить к локальной формулировке разрешающих уравнений, описывающих поведение исследуемого материала на основе предельных походов при анализе состояний малых ячеек материала. Кроме того, требует новой интерпретации понятие компонент напряженно-деформированного состояния.

Традиционными моделями для разрешения указанных проблемных ситуаций является применение методов статистической механики для больших выборок узлов, составляющих представительный фрагмент $\Theta \sim$ исследуемого материала, а также моделей гомогенизации

свойств, ставящих множеству свойств и характеристик напряженно-деформированного состояния волокон на микроуровне, с одной стороны, и приведенные характеристики НДС материала на макроуровне, – с другой. Эти вопросы частично отражены в работах [1–35], однако предложенные модели не дают полного разрешения проблемы. Более того, в ряде экспериментов [25, 29, 30] зафиксированы результаты, которые не могут быть согласованы и объяснены никакими из общепринятых моделей (см. выше). Таким образом, для создания более общих моделей, пригодных для описания поведения материалов такого типа, необходимо:

- во-первых, разработать модель для корректного описания ансамбля волокон, находящихся во взаимодействии между собой, на основе подходов статистической механики;
- во-вторых, требуется создание подмодели гомогенизации свойств при переходе от микро- к макро-масштабу;
- в-третьих, необходимо разработать модель, объединяющую первые две подмодели.

Рассмотрим общие подходы к решению этих задач. Задача статистического описания ансамбля взаимодействующих волокон может формулироваться как в локальной, так и в вариационной постановках. Для локальной постановки свойственно выделить некоторое множество узлов, составляющих представительный фрагмент Θ^* , а затем записать для каждого узла и волокна условия равновесия для узлов и удлинений для участков волокон, базируясь на уравнениях типа (1)–(4).

Вариационная формулировка может быть записана либо в форме минимизации приращений полной внутренней энергии выделенного фрагмента Θ^* (т.е. в проскальзываниях Δl и координатах Δr), либо в форме минимизации дополнительной энергии (т.е. в нагрузках ΔN). В первом случае получаем функционал с областью неопределенности экстремума (типа представленного на рис. 3, а), а во втором недифференцируемый функционал I (см. рис. 3, б). И в первом, и во втором случае получаем проблемы поиска однозначного решения.

Проанализировав представленные варианты, можно предложить следующие этапы исследований:

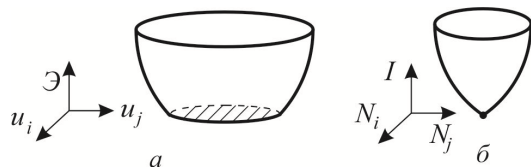


Рис. 3 – Вид функционалов: а – дополнительной энергии; б – полной внутренней энергии

- на основе локальной постановки исследуется фрагмент Φ , содержащий единицы волокон и узлов их соединения;
- на основе вариационной постановки в перемещениях исследуется представительный фрагмент Θ^* с количеством узлов несколько десятков и сотен с точки зрения поведения системы под нагрузкой при сохранении начального множества узлов соединения волокон в текущем актуальном состоянии;
- на основе вариационной постановки в нагрузках исследуется представительный фрагмент Θ^* с количеством узлов до несколько сотен и тысяч при возможном

изменении множества узлов соединения волокон в текущем актуальном состоянии по сравнению с начальным.

Описанные постановки, каждая в отдельности, а тем более – в их последовательном сочетании, отличаются от традиционных постановок:

во-первых, они ориентированы не на регулярные повторяющиеся структуры, а на некое стохастическое распределение волокон и узлов;

во-вторых, в узлах взаимодействия волокон предусмотрена не только возможность слияния (неподвижного соединения), но и проскальзывания волокон друг относительно друга;

в-третьих, учитывается трение в сопряжении волокон, а, следовательно, учитывается история нагружения, что вынуждает осуществлять решение задачи в приращениях.

Для решения задачи гомогенизации свойств волокнистых нетканых материалов привлекаются модели усреднения по множеству направлений. При этом в модель гомогенизации привносятся операции интегрирования по замкнутой поверхности, окружающей некоторую точку внутри представительного объема Φ^* , с весовой функцией, определенным образом распределенной по данной поверхности: $\langle \xi \rangle = \int \xi \rho_0(S) dS$, где ξ – осредненная величина состояния, $\rho_0(S)$ – исходная плоскость распределения волокон, а S – статистически представительная поверхность.

Модель гомогенизации свойств волокнистых нетканых материалов, разработанная и предложенная к использованию в работе, отличается от известных именно процедурой усреднения с привлечением интегрирования с весом по замкнутой поверхности вокруг точки усреднения.

Кроме решения возникающих описанных двух задач, требуется также их совместное решение для анализа реакции элементов конструкций из волокнистых материалов на действие нагрузки F . Для этого предлагается объединить все параметры, участвующие в решении этих задач, а затем определить характеристики, описывающие функциональные свойства элементов конструкций из этих материалов. Это – отдельная задача, т.к. традиционные характеристики прочности напрямую к исследуемому объекту неприменимы. Действительно, в некоторых узлах соединения волокон даже при малых уровнях внешней нагрузки F возможно значительное смещение за счет взаимных трансляций волокон без их разрыва. Более того, эти волокна могут выходить из механического контакта. В традиционных подходах это можно трактовать либо как признак начала разрушения, либо как процесс разрушения. Однако применительно к исследуемым материалам корректнее было бы определить это как процесс естественного функционирования сложной системы с протеканием структурных изменений и частичной потерей интенсивности внутренних силовых и кинематических связей между компонентами системы. Этот процесс имеет следующие особенности:

- он начинается с минимального уровня нагрузки F , рассредоточен в пространстве и в определенный момент может приобрести резко ускоряющийся характер; в этой части он подобен континуальному накоплению повреждаемости, однако с той принципиальной разницей, что физические механизмы, их порождающие, – различные, а также различны механизмы накопления (в случае

континуальной механики повреждаемости имеет место рост характеристики в точке, и его скорость зависит от напряженного состояния в ней, а в случае волокнистых нетканых материалов проявление такой тенденции – не локальное, а общее для представительного фрагмента или элемента конструкции);

- для него характерна необратимость по параметру нагрузки, как, например, в механизме пластического деформирования, однако такая аналогия свойственна только отдельно взятым парам в узле волокон;

- во многих случаях определить предельное состояние элемента конструкции из волокнистого материала нельзя, основываясь только на анализе состояния нагружаемой системы – важен также и способ приложения нагрузки, и вид функционального требования, предъявляемого к данному элементу.

Таким образом, в общем случае не удастся выделить модели, связывающие попарно, с одной стороны, нагрузки и напряженно-деформированное состояние объекта, с другой – НДС и прочностные характеристики, а далее – прочностные характеристики и функциональные свойства. Все эти процессы, отношения и свойства требуется рассматривать в общей их совокупности, опираясь на локальные или вариационные постановки и подходы статистической механики, а также ориентируясь на физические процессы, описывающие нагружение объекта и потерю его функциональных свойств.

Исходя из этого, в данном случае имеем дело с механической конструкцией, описываемой системой уравнений и неравенств в приращениях, зависящей от начального состояния и истории нагружения: $\dot{I} \in \partial_I \Phi(Z, I, \dot{I})$, где I – внутренняя переменная, Z – переменная состояния, Φ – потенциал диссипации.

Разработанные новые подходы, методы и модели были использованы для решения ряда прикладных задач. В частности, решены задачи о рациональной микроструктуре и свойствах волокнистого материала типа Denima (применяется в качестве элемента защитных конструкций), о контактно деформировании податливого мягкого материала [37] и т.п. В результате решения данных задач установлен ряд закономерностей и тенденций изменения напряженно-деформированного состояния исследуемых объектов при варьировании их формы, свойств и нагрузок, а на этой основе разработаны рекомендации по обоснованию рациональных проектно-технологических решений.

Выводы. Разработанные общие подходы к исследованию конструкций из материалов типа волоконных, изложенные выше, реализуют новые микромеханические модели, а также новые методы статистической механики применительно к волоконным сетевым структурам. Это служит важным этапом в плане создания общей теории механики деформируемых материалов такого типа.

Таким образом, можно заключить, что в работе создана основа для формирования макромеханических свойств материалов на основе математического моделирования микроансамблей волоконных цепочек и нитевых сетей, что предоставляет возможность прогнозирования свойств не только существующих, но и еще только создаваемых материалов. Разработана база

для конструирования материалов с заданными физико-механическими свойствами.

Результаты решения данных задач составляют направления дальнейших исследований.

Список литературы

1. Ткачук М.М. Базові підходи при дослідженні реакції волоконних матеріалів на зовнішнє навантаження. *Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Машинознавство та САПР*. Харків: НТУ "ХПІ", 2018. № 7 (1283). С. 132–141.
2. Treloar L.R.G. *The Physics of Rubber Elasticity*. 3rd edition. Oxford: Clarendon Press, 1975. 322 p.
3. Boal D.H. *Mechanics of the cell*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 406 p.
4. Holzapfel G.A., Ogden R.W. *Mechanics of biological tissue*. New York: Springer Science & Business Media, 2006. 135 p.
5. Basu A., Wen Q., Mao X. [et. al.] Nonaffine displacements in flexible polymer networks. *Macromolecules*, 2011, vol.44(6), pp. 1671–1679.
6. Ponti A., Machacek M., Gupton S.L. [et. al.] Two distinct actin networks drive the protrusion of migrating cells. *Science*, 2004, vol. 305(5691), pp. 1782–1786.
7. Pai C. L., Boyce M. C., Rutledge G. C. On the importance of fiber curvature to the elastic moduli of electrospun nonwoven fiber meshes. *Polymer*, 2011, vol. 52(26), pp. 6126–6133.
8. Martínez-Hergueta F., Ridruejo A., González C., LLorca J. Deformation and energy dissipation mechanisms of needle-punched nonwoven fabrics: A multiscale experimental analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, vol. 64, pp. 120–131.
9. Ridruejo A., González C., LLorca J. Micromechanisms of deformation and fracture of polypropylene nonwoven fabrics. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, vol. 48(1), pp. 153–162.
10. Haverhals L.M., Reichert W.M., De Long H.C., Trulove P.C. Natural fiber welding. *Macromolecular Materials and Engineering*, 2010, vol. 295(5), pp. 425–430.
11. Martínez-Hergueta F., Ridruej, A., Gonzále, C., Llorca J. Numerical simulation of the ballistic response of needle-punched nonwoven fabrics. *International Journal of Solids and Structures*, 2017, vol. 106, pp. 56–67.
12. Martínez-Hergueta F., Ridruejo A., González C., LLorca J. Ballistic performance of hybrid nonwoven/woven polyethylene fabric shields. *International Journal of Impact Engineering*, 2018, vol. 111, pp. 55–65.
13. Winkler R. Deformation of semiflexible chains. *J. Chem. Phys.*, 2003, vol. 118, pp. 2919–2928.
14. Huisman E., Storm C., Barkema G. Monte Carlo study of multiply crosslinked semiflexible polymer networks. *Phys. Rev. E*, 2008, vol. 78, pp. 051801(11).
15. Huisman E., Lubensky T. Internal stresses, normal modes, and nonaffinity in three-dimensional biopolymer networks. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 106(8), pp. 088301(4).
16. Blundell J., Terentjev E. The influence of disorder on deformations in semiflexible networks. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 2011, vol. 467, pp. 2330–2349.
17. Kuhn W., Gr \ddot{u} n F. Beziehungen zwischen elastischen Konstanten und Dehnungsdoppelbrechung hochelastischer Stoffe. *Colloid. Polym. Sci.*, 1942, vol. 101(3), pp. 248–271.
18. Cox HL The elasticity and strength of paper and other fibrous materials. *British journal of applied physics*, 1952, vol. 3(3), pp. 72.
19. Storm C., Pastore F.C., MacKintosh T.C. [et. al.] Nonlinear elasticity in biological gels. *Nature*, 2005, vol. 435(7039), pp. 191–194.
20. Blundell J., Terentjev E. Affine model of stress stiffening in semiflexible filament networks. *ArXiv*, 2008, 0808.4088: 1–11.
21. Arruda E.M., Boyce M.C. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1993, vol. 41, pp. 389–412.
22. Kuhl E., Garikipati E.M., Arruda K. [et. al.] Remodeling of biological tissue: Mechanically induced reorientation of a transversely isotropic chain network. *J. Mech. Phys. Solids*, 2005, vol. 53(7), pp. 1552–1573.
23. Kuhl E., Menzel A., Garikipati K. On the convexity of transversely isotropic chain network models. *Philos. Mag.*, 2006, vol. 86(21–22), pp. 3241–3258.
24. Palmer J.S., Boyce M.C. Constitutive modeling of the stress-strain behavior of F-actin filament networks. *Acta Biomater.*, 2008, vol. 4(3), pp. 597–612.
25. Head D., Levine A., MacKintosh F. Deformation of cross-linked semiflexible polymer networks. *Phys. Rev. Lett.*, 2003, vol. 91, 108102(4).
26. Kroon M. A constitutive model for strain-crystallising Rubber-like materials. *Mech. Mater.*, 2010, vol. 42(9), pp. 873–885.

27. Miede C., Göktepe S., Lulei F. A micro-macro approach to rubber-like materials – Part I: the non-affine micro-sphere model of rubber elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 2004, vol. 52, pp. 2617–2660.
28. Băzant Z.P., B.H. Oh Efficient numerical integration on the surface of a sphere. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1986, vol. 66, pp. 37–49.
29. Marckmann G., Verron E. Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials. *Rubber Chem. Technol.*, 2006, vol. 79, pp. 835–858.
30. Treloar L.R.G. Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation. *Trans. Faraday Soc.*, 1944, vol. 40. Pp. 59–70.
31. Heussinger C., Schaefer B., Frey E. Nonaffine rubber elasticity for stiff polymer networks. *Phys. Rev. E.*, 2007, vol. 76. – 031906(12).
32. James Hubert M. Guth Eugene Theory of the elastic properties of rubber. *The Journal of Chemical Physics*, 1943, vol. 11(10). Pp. 455–481.
33. Wang Ming Chen. Eugene Guth Statistical theory of networks of non-Gaussian flexible chains. *The Journal of Chemical Physics*, 1952, vol. 20(7). pp. 1144–1157.
34. Ehret AE, Itskov M., Schmid H. Numerical integration on the sphere and its effect on the material symmetry of constitutive equations: a comparative study. *International journal for numerical methods in engineering*, 2010, vol. 81(2). Pp. 189–206.
35. Verron Erwan. Questioning numerical integration methods for microsphere (and microplane) constitutive equations. *Mechanics of Materials*, 2015, vol. 89. Pp.216–228.
36. Tkachuk M., Linder Ch. The maximal advance path constraint for the homogenization of materials with random network microstructure. *Philosophical Magazine*, 2012, vol. 92(22). Pp. 2779–2808. Research Program: Computational modelling of adhesive contact 5.
37. M. Tkachuk. A numerical method for axisymmetric adhesive contact based on Kalker's variational principle. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologie*. 2018, vol. 3, no. 7 (93), pp. 34–41.
13. Winkler R. Deformation of semiflexible chains. *J. Chem. Phys.*, 2003, vol. 118, pp. 2919–2928.
14. Huisman E., Storm C., Barkema G. Monte Carlo study of multiply crosslinked semiflexible polymer networks. *Phys. Rev. E*, 2008, vol. 78, pp. 051801(11).
15. Huisman E., Lubensky T. Internal stresses, normal modes, and nonaffinity in three-dimensional biopolymer networks. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 106(8), pp. 088301(4).
16. Blundell J., Terentjev E. The influence of disorder on deformations in semiflexible networks. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 2011, vol. 467, pp. 2330–2349.
17. Kuhn W., Grün F. Beziehungen zwischen elastischen Konstanten und Dehnungsdoppelbrechung hochelastischer Stoffe. *Colloid. Polym. Sci.*, 1942, vol. 101(3), pp. 248–271.
18. Cox HL The elasticity and strength of paper and other fibrous materials. *British journal of applied physics*, 1952, vol. 3(3), pp. 72.
19. Storm C., Pastore F.C., MacKintosh T.C. [et. al.] Nonlinear elasticity in biological gels. *Nature*, 2005. vol. 435(7039), pp. 191–194.
20. Blundell J., Terentjev E. Affine model of stress stiffening in semiflexible filament networks. *ArXiv*, 2008, 0808.4088: 1–11.
21. Arruda E.M., Boyce M.C. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1993, vol. 41, pp. 389–412.
22. Kuhl E., Garikipati E.M., Arruda K. [et. al.] Remodeling of biological tissue: Mechanically induced reorientation of a transversely isotropic chain network. *J. Mech. Phys. Solids*, 2005, vol. 53(7), pp. 1552–1573.
23. Kuhl E., Menzel A., Garikipati K. On the convexity of transversely isotropic chain network models. *Philos. Mag.*, 2006, vol. 86(21–22), pp. 3241–3258.
24. Palmer J.S., Boyce M.C. Constitutive modeling of the stress-strain behavior of F-actin filament networks. *Acta Biomater*, 2008, vol. 4(3), pp. 597–612.
25. Head D., Levine A., MacKintosh F. Deformation of cross-linked semiflexible polymer networks. *Phys. Rev. Lett.*, 2003, vol. 91, 108102(4).
26. Kroon M. A constitutive model for strain-crystallising Rubber-like materials. *Mech. Mater.*, 2010, vol. 42(9), pp. 873–885.
27. Miede C., Göktepe S., Lulei F. A micro-macro approach to rubber-like materials – Part I: the non-affine micro-sphere model of rubber elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 2004, vol. 52, pp. 2617–2660.
28. Băzant Z.P., B.H. Oh Efficient numerical integration on the surface of a sphere. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1986, vol. 66, pp. 37–49.
29. Marckmann G., Verron E. Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials. *Rubber Chem. Technol.*, 2006, vol. 79, pp. 835–858.
30. Treloar L.R.G. Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation. *Trans. Faraday Soc.*, 1944, vol. 40. Pp. 59–70.
31. Heussinger C., Schaefer B., Frey E. Nonaffine rubber elasticity for stiff polymer networks. *Phys. Rev. E.*, 2007, vol. 76. – 031906(12).
32. James Hubert M. Guth Eugene Theory of the elastic properties of rubber. *The Journal of Chemical Physics*, 1943, vol. 11(10). Pp. 455–481.
33. Wang Ming Chen. Eugene Guth Statistical theory of networks of non-Gaussian flexible chains. *The Journal of Chemical Physics*, 1952, vol. 20(7). pp. 1144–1157.
34. Ehret AE, Itskov M., Schmid H. Numerical integration on the sphere and its effect on the material symmetry of constitutive equations: a comparative study. *International journal for numerical methods in engineering*, 2010, vol. 81(2). Pp. 189–206.
35. Verron Erwan. Questioning numerical integration methods for microsphere (and microplane) constitutive equations. *Mechanics of Materials*, 2015, vol. 89. Pp.216–228.
36. Tkachuk M., Linder Ch. The maximal advance path constraint for the homogenization of materials with random network microstructure. *Philosophical Magazine*, 2012, vol. 92(22). Pp. 2779–2808. Research Program: Computational modelling of adhesive contact 5.
37. M. Tkachuk. A numerical method for axisymmetric adhesive contact based on Kalker's variational principle. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologie*. 2018, vol. 3, no. 7 (93), pp. 34–41.

References (transliterated)

1. Tkachuk M.M. Bazovi pidxody pry doslidzhenni reakciyi voloknyx materialiv na zovnishnye navantazhennya [Basic approaches in the study of the reaction of fiber materials to external load]. *Visnyk NTU "KhPI". Seriya: Mashynoznavstvo ta SAPR*. [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Machine-building and CAD]. Kharkiv, NTU "KhPI". 2018, no.7 (1283). Pp. 132–141.
2. Treloar L.R.G. *The Physics of Rubber Elasticity. 3rd edition*. Oxford: Clarendon Press, 1975. 322 p.
3. Boal D.H. *Mechanics of the cell*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 406 p.
4. Holzapfel G.A., Ogden R.W. *Mechanics of biological tissue*. New York: Springer Science & Business Media, 2006. 135 p.
5. Basu A., Wen Q., Mao X. [et. al.] Nonaffine displacements in flexible polymer networks. *Macromolecules*, 2011, vol.44(6). pp. 1671–1679.
6. Ponti A., Machacek M., Gupton S.L. [et. al.] Two distinct actin networks drive the protrusion of migrating cells. *Science*, 2004, vol. 305(5691), pp. 1782–1786.
7. Pai C. L., Boyce M. C., Rutledge G. C. On the importance of fiber curvature to the elastic moduli of electrospun nonwoven fiber meshes. *Polymer*, 2011, vol. 52(26), pp. 6126–6133.
8. Martínez-Hergueta F., Ridruejo A., González C., LLorca J. Deformation and energy dissipation mechanisms of needle-punched nonwoven fabrics: A multiscale experimental analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, vol. 64, pp. 120–131.
9. Ridruejo A., González C., LLorca J. Micromechanisms of deformation and fracture of polypropylene nonwoven fabrics. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, vol. 48(1), pp. 153–162.
10. Haverhals L.M., Reichert W.M., De Long H.C., Trulove P.C. Natural fiber welding. *Macromolecular Materials and Engineering*, 2010, vol. 295(5), pp. 425–430.
11. Martínez-Hergueta F., Ridruejo A., González C., LLorca J. Numerical simulation of the ballistic response of needle-punched nonwoven fabrics. *International Journal of Solids and Structures*, 2017, vol. 106, pp. 56–67.
12. Martínez-Hergueta F., Ridruejo A., González C., LLorca J. Ballistic performance of hybrid nonwoven/woven polyethylene fabric shields. *International Journal of Impact Engineering*, 2018, vol. 111, pp. 55–65.
- 2003, vol. 118, pp. 2919–2928.
- 2008, vol. 78, pp. 051801(11).
- 2011, vol. 106(8), pp. 088301(4).
- 2011, vol. 467, pp. 2330–2349.
- 1942, vol. 101(3), pp. 248–271.
- 1952, vol. 3(3), pp. 72.
2005. vol. 435(7039), pp. 191–194.
- 2008, 0808.4088: 1–11.
- 1993, vol. 41, pp. 389–412.
- 2005, vol. 53(7), pp. 1552–1573.
- 2006, vol. 86(21–22), pp. 3241–3258.
- 2008, vol. 4(3), pp. 597–612.
- 2003, vol. 91, 108102(4).
- 2010, vol. 42(9), pp. 873–885.
- 2004, vol. 52, pp. 2617–2660.
- 1986, vol. 66, pp. 37–49.
- 2006, vol. 79, pp. 835–858.
- 1944, vol. 40. Pp. 59–70.
- 2007, vol. 76. – 031906(12).
- 1943, vol. 11(10). Pp. 455–481.
- 1952, vol. 20(7). pp. 1144–1157.
- 2010, vol. 81(2). Pp. 189–206.
- 2015, vol. 89. Pp.216–228.
- 2012, vol. 92(22). Pp. 2779–2808. Research Program: Computational modelling of adhesive contact 5.
- 2018, vol. 3, no. 7 (93), pp. 34–41.

Посмунила (received) 15.06.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ткачук Микола Миколайович (Ткачук Николай Николаевич, Tkachuk Mykola Mykolayovych) – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", старший науковий співробітник кафедри інформаційних технологій та систем колісних і гусеничних машин імені О.О. Морозова; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4753-4267>; e-mail: m.tkachuk@tmm-sapr.org