

*V. I. GNITKO***НЕОСЕСИМЕТРИЧНИЙ ТЕРМОПРУЖНОПЛАСТИЧНИЙ СТАН РОЗГАЛУЖЕНИХ
ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ: НАПІВНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

Розглянуто методику розрахунку неосесиметричного термопружнопластичного напружено-деформованого стану оболонок обертання з розгалуженим меридіаном, використовуючи напіваналітичний метод скінченних елементів та гіпотези Кірхгофа-Лява. Задачу розв'язано в квазістатичній незв'язаній постановці з використанням геометрично лінійної теорії оболонок. Розглянуто такі процеси неізотермічного навантаження, коли деформації повзучості малі і ними можна знехтувати порівняно з миттєвими деформаціями. Механічні характеристики матеріалів залежать від температури. Передбачено, що в процесі деформування оболонка не втрачає стійкість. Розроблений підхід базується на варіаційному рівнянні рівноваги, сформульованому для оболонок обертання, з урахуванням можливого розгалуження меридіана. Для розв'язання фізично нелінійної задачі термопружнопластичності використовується метод пружних розв'язків (також відомий як метод змінних параметрів пружності). Метод пружних розв'язків (метод змінних параметрів пружності) використовується для розв'язання фізично нелінійної термопружнопластичної задачі шляхом ітеративного зведення її до послідовності лінійних пружних задач з оновленими модулями січних та коефіцієнтами Пуассона в кожній точці оболонки, враховуючи поточну температуру та накопичені пластичні деформації. Запропонований алгоритм ефективно враховує складну геометрію оболонки (включаючи меридіанне розгалуження), неосесиметричний характер навантаження, температурну залежність властивостей матеріалу та розвиток зон пластичної деформації. Для перевірки розробленої методології та її програмної реалізації аналізується пружнопластичний напружений стан конічної оболонки лінійно змінної товщини, що піддається внутрішньому тиску. Отримані результати порівнюються з відомими аналітичними та числовими розв'язками для окремих випадків: постійної товщини та осесиметричного навантаження. Продемонстровано високу точність та добру збіжність методу навіть при відносно невеликій кількості скінченних елементів уздовж меридіана.

Ключові слова: оболонки обертання; розгалужений меридіан, неосесиметричний напружено-деформований стан; термопружнопластичність; напіваналітичний метод скінченних елементів

*V. I. GNITKO***NON-AXISYMMETRIC THERMOELASTOPLASTIC STATE OF BRANCHED SHELLS OF
REVOLUTION: A SEMI-ANALYTICAL FINITE ELEMENT METHOD**

A methodology for the analysis of the non-axisymmetric thermoelastoplastic stress-strain state of shells of revolution with a branched meridian is presented. The problem is solved using the semi-analytical finite element method in combination with the Kirchhoff-Love hypotheses. The solution is obtained in a quasi-static uncoupled formulation within the framework of geometrically linear shell theory. Non-isothermal loading processes are considered, in which creep strains are small and can be neglected compared to instantaneous elastoplastic strains. The mechanical properties of the materials are assumed to be temperature-dependent. It is accepted that the shell does not lose stability during the deformation process. The developed approach is based on the variational equilibrium equation formulated for shells of revolution, taking into account possible branching of the meridian. To solve the physically nonlinear problem of thermoelastoplasticity, the method of elastic solutions (also known as the method of variable elasticity parameters) is employed. The method of elastic solutions (variable elasticity parameters method) is employed to solve the physically nonlinear thermoelastoplastic problem by iteratively reducing it to a sequence of linear elastic problems with updated secant moduli and Poisson's ratios at each point of the shell, accounting for the current temperature and accumulated plastic strains. The proposed algorithm effectively accounts for the complex geometry of the shell (including meridian branching), the non-axisymmetric nature of loading, the temperature dependence of material properties, and the development of plastic deformation zones. To verify the developed methodology and its software implementation, the elastoplastic stress state of a conical shell of linearly variable thickness subjected to internal pressure is analysed. The obtained results are compared with known analytical and numerical solutions for particular cases: constant thickness and axisymmetric loading. High accuracy and good convergence of the method are demonstrated even with a relatively small number of finite elements along the meridian. The study reveals a significant influence of thickness variation and temperature field on the distribution of equivalent stresses and plastic strains, particularly on displacements and the degree of plasticization in stress concentration zones. The proposed methodology can be effectively applied for the strength analysis of complex shell structures in power engineering, chemical engineering, transport, and aerospace industries under combined mechanical and thermal loading. The proposed algorithm effectively accounts for the complex geometry of the shell, including meridian branching, the non-axisymmetric nature of loading, the temperature dependence of material properties, and the development of plastic deformation zones.

Keywords: shells of revolution; branched meridian; non-axisymmetric stress-strain state; thermoelastoplasticity; semi-analytical finite element method

Вступ. Огляд сучасного стану питання. Сучасні дослідження термопружнопластичної поведінки оболонок обертання зі складним або розгалуженим меридіаном розвиваються у напрямі побудови нелінійних мультифізичних моделей, які враховують геометричну складність, температурні поля та пластичне деформування матеріалу. Знач-

на частина робіт присвячена уточненим теоріям оболонок (Reissner-Mindlin, FSĐT, HOSĐT) у поєднанні з методами скінченних елементів та ізогометричного аналізу, що дозволяє ефективно описувати термонапружений стан у складних геометр-

© В. І. Гнітько, 2026

ріях [1]. У сучасних моделях особлива увага приділяється впливу форми меридіана на розподіл напружень і розвиток локальних зон пластичності, оскільки варіації геометрії суттєво змінюють стійкість та характер термомеханічної відповіді оболонки [2]. Для багат шарових та функціонально-градієнтних конструкцій активно застосовуються термопружні та термопластичні постановки з урахуванням залежності матеріальних характеристик від температури, що дозволяє описувати реальні умови експлуатації в енергетичних та аерокосмічних системах [3]. Окремі напрям становлять асимптотичні та tolerance-моделі, які враховують мікроструктурну неоднорідність і масштабні ефекти, що є важливим для тонкостінних оболонок з періодичною або складною будовою [4]. Такі підходи поєднуються з варіаційними принципами та нелінійною термопружністю, що забезпечує побудову замкнених систем рівнянь для зв'язаних задач теплообміну і деформування [5]. Загальною тенденцією є перехід від аналітичних рішень до гібридних чисельно-аналітичних підходів, які інтегрують методи граничних [6] та скінченних елементів [7], ізогеометричний аналіз та багаторівневі теорії оболонок для підвищення точності прогнозування термопружно-пластичної поведінки складних оболонкових систем [8]. Це дозволяє враховувати як геометричну нелінійність, так і пластичність при складних термічних навантаженнях, що є ключовим для сучасних інженерних застосувань [9].

Основні рівняння. Положення точки серединної поверхні оболонки визначимо криволінійною ортогональною системою координат s, φ , де s – довжина дуги меридіана; φ – центральний кут у паралельному колі. Відстань довільної точки оболонки від серединної поверхні ζ відлічується по нормалі до цієї поверхні. Поряд із криволінійною системою координат s, φ, ζ введемо систему циліндричних координат r, z, φ .

Компоненти переміщення довільної точки оболонки пов'язані з компонентами переміщень u, v, w серединної поверхні співвідношеннями

$$\begin{aligned} u_\zeta &= u(s, \varphi) + \zeta \theta_s(s, \varphi), \\ v_\zeta &= v(s, \varphi) + \zeta \theta_\varphi(s, \varphi), \quad w_\zeta = w(s, \varphi), \end{aligned} \quad (1)$$

де θ_s, θ_φ – кути повороту нормалі до серединної поверхні.

Меридіональні та нормальні компоненти переміщень виражаються через радіальні та осьові складові переміщень таким чином:

$$\begin{aligned} u &= -u_z \sin \alpha + u_r \cos \alpha, \\ w &= u_z \cos \alpha + u_r \sin \alpha, \end{aligned} \quad (2)$$

де α – кут між додатним напрямком z і нормаллю до меридіана.

Для тонких оболонок візьмемо таку залежність між компонентами деформації довільної точки оболонки з деформаціями середньої поверхні

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss} &= \varepsilon_s + \zeta \kappa_s, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_\varphi + \zeta \kappa_\varphi, \\ \varepsilon_{s\varphi} &= \varepsilon_{s\varphi} + \zeta \kappa_{s\varphi}. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут і далі індекс ζ у позначеннях для компонент деформації довільної точки оболонки опущено.

Деформації серединної поверхні пов'язані з переміщеннями з урахуванням співвідношень (2) [9,10]

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{\partial u_z}{\partial s} \sin \alpha + \frac{\partial u_r}{\partial s} \cos \alpha, \quad \varepsilon_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \\ \varepsilon_{s\varphi} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial s} - \frac{u_\varphi \cos \alpha}{r} + \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \sin \alpha + \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \cos \alpha \right) \\ \kappa_s &= \frac{\partial^2 u_z}{\partial s^2} \cos \alpha - \frac{\partial^2 u_r}{\partial s^2} \sin \alpha + \frac{\varepsilon_s}{R_s} \\ \kappa_\varphi &= -\frac{\cos \alpha}{r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial s} \cos \alpha + \frac{\partial u_r}{\partial s} \sin \alpha \right) - \\ &\quad - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} \cos \alpha - \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} \sin \alpha - \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \sin \alpha \right); \\ \kappa_{s\varphi} &= -\frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi \partial s} \frac{2 \cos \alpha}{r} - \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi \partial s} \frac{2 \sin \alpha}{r} + \\ &\quad + \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \left(\frac{\cos \alpha}{r} \right)^2 + \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{r^2} + \\ &\quad + \frac{\partial u_\varphi}{\partial s} \left(\frac{\sin \alpha}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - u_\varphi \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r^2}, \\ \theta_s &= \frac{\partial u_z}{\partial s} \cos \alpha + \frac{\partial u_r}{\partial s} \sin \alpha, \\ \theta_\varphi &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_z}{\partial s} \cos \alpha + \frac{\partial u_r}{\partial s} \sin \alpha \right) - u_\varphi \frac{\sin \varphi}{r}. \end{aligned} \quad (4)$$

Введемо вектори деформацій та переміщень серединної поверхні

$$\begin{aligned} (\varepsilon)^T &= (\varepsilon_s, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_{s\varphi}), \quad (\kappa)^T = (\kappa_s, \kappa_\varphi, \kappa_{s\varphi}), \\ (u)^T &= (u_z, u_r, u_\varphi). \end{aligned} \quad (5)$$

Геометричні співвідношення при цьому набувають такого вигляду

$$(\varepsilon) = (D_\varepsilon)(u), \quad (\kappa) = (D_\kappa)(u), \quad (6)$$

де вирази для матриць диференціювання (D_ε) і (D_κ) впливають безпосередньо зі скалярних співвідношень (4).

Зв'язок між напруженнями $\sigma_{ss}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{s\varphi}$ і деформаціями $\varepsilon_{ss}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{s\varphi}$ у довільній точці оболонки запишемо у вигляді закону Гука для ізотропного однорідного тіла, але з додатковими членами, що враховують пластичні та температурні де-

формації, а також температурну залежність властивостей матеріалу [8, 9]

$$\sigma_{ss} = \frac{2G_0}{1-\nu_0} \left(\varepsilon_{ss} + \nu_0 \varepsilon_{\varphi\varphi} + \beta_{ss} \right) \quad (s \leftrightarrow \varphi),$$

$$\sigma_{s\varphi} = 2G_0 \left(\varepsilon_{s\varphi} + \beta_{s\varphi} \right). \quad (7)$$

При використанні співвідношень теорії малих пружно-пластичних деформацій, лінеаризованих методом пружних розв'язків, додаткові члени набувають такого вигляду, як і в статтях [9, 10]

$$\beta_{ss} = \frac{\nu_0 \sigma^T \zeta \zeta - (1-\nu_0) \sigma^T_{ss}}{2G_0} \quad (s \leftrightarrow \varphi),$$

$$\beta_{s\varphi} = -\omega_1 \varepsilon_{s\varphi},$$

$$\sigma^T_{ss} = K \varepsilon_T + 2G_0 \omega_1 (\varepsilon_{ss} - \varepsilon_0) + K_0 \omega_2 \varepsilon_0 \quad (s \leftrightarrow \varphi \leftrightarrow \zeta),$$

$$\omega_1 = 1 - \frac{G^*}{G_0}, \quad \omega_2 = 1 - \frac{K}{K_0},$$

$$\varepsilon_{\zeta\zeta} = -\frac{\nu_0}{1-\nu_0} (\varepsilon_{ss} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) + \beta_{\zeta\zeta},$$

$$\beta_{\zeta\zeta} = \frac{1-2\nu_0}{2G_0(1-\nu_0)} K \varepsilon_T +$$

$$+ \frac{1-2\nu_0}{1-\nu_0} \omega_1 (\varepsilon_{\zeta\zeta} - \varepsilon_0) + \frac{1+\nu_0}{1-\nu_0} \omega_2 \varepsilon_0, \quad (8)$$

де $K = 2G(1+\nu)/(1-2\nu)$ – модуль об'ємного розширення;

$G = G(T)$ – модуль зсуву;

$\nu = \nu(T)$ – коефіцієнт Пуассона;

$\varepsilon_T = \alpha_T(T-T_0)$ – тепла деформація;

$\alpha_T(T)$ – коефіцієнт лінійного теплового розширення;

ε_0 – середня деформація;

T – температура;

K_0, G_0, ν_0 – модуль об'ємного розширення, модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона при початковій температурі T_0 ,

$2G^* = S/\Gamma$ – січний модуль;

$S = \sqrt{\frac{1}{3} \left(\sigma_s^2 - \sigma_s \sigma_\varphi + \sigma_\varphi^2 + 3\sigma_{s\varphi}^2 \right)}$ – інтенсивність

дотичних напружень;

$$\Gamma = \sqrt{\frac{1}{6} \left[\left(\varepsilon_s^{(\zeta)} - \varepsilon_\varphi^{(\zeta)} \right)^2 + \left(\varepsilon_\varphi^{(\zeta)} - \varepsilon_\zeta^{(\zeta)} \right)^2 + \left(\varepsilon_\zeta^{(\zeta)} - \varepsilon_s^{(\zeta)} \right)^2 + \frac{3}{2} \varepsilon_{s\varphi}^{(\zeta)2} \right]}$$

інтенсивність зсувних деформацій.

Запишемо варіаційне рівняння рівноваги оболонки на основі принципу можливих переміщень Лагранжа з урахуванням фізичних співвідношень у вигляді (7)

$$\delta A - \delta A_q = 0, \quad (9)$$

де δA – варіація енергії деформації оболонки

$$\delta A = \iiint \left(\sigma_s \delta \varepsilon_s^{(\zeta)} + \sigma_\varphi \delta \varepsilon_\varphi^{(\zeta)} + \sigma_{s\varphi} \delta \varepsilon_{s\varphi}^{(\zeta)} \right) r ds d\varphi d\zeta =$$

$$= \iint \left[(N_s + P_{0s}) \delta \varepsilon_s + (N_\varphi + P_{0\varphi}) \delta \varepsilon_\varphi + (N_{s\varphi} + P_{0s\varphi}) \delta \varepsilon_{s\varphi} + \right.$$

$$\left. + (M_s + P_{1s}) \delta \kappa_s + (M_\varphi + P_{1\varphi}) \delta \kappa_\varphi + \right.$$

$$\left. + (M_{s\varphi} + P_{1s\varphi}) \delta \kappa_{1s\varphi} \right] r ds d\varphi; \quad (10)$$

δA_q – варіація дії поверхневих сил.

Тут введено позначення

$$N_s = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ss} d\zeta \quad (s \leftrightarrow \varphi), \quad N_{s\varphi} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{s\varphi} d\zeta,$$

$$M_s = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ss} \zeta d\zeta \quad (s \leftrightarrow \varphi), \quad M_{s\varphi} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{s\varphi} \zeta d\zeta,$$

$$P_{0s} = \int_{-h/2}^{h/2} \beta_{ss} d\zeta \quad (s \leftrightarrow \varphi), \quad P_{0s\varphi} = \int_{-h/2}^{h/2} \beta_{s\varphi} d\zeta,$$

$$P_{1s} = \int_{-h/2}^{h/2} \beta_s \zeta d\zeta \quad (s \leftrightarrow \varphi),$$

$$P_{1s\varphi} = \int_{-h/2}^{h/2} \beta_{s\varphi} \zeta d\zeta. \quad (11)$$

Варіаційне рівняння (9) описує пружно-пластичну рівновагу оболонки обертання під дією силових і теплових навантажень.

Методика визначення пружно-пластичного стану оболонок. Для визначення неосесиметричного пружно-пластичного напруженого стану розгалуженої оболонки представимо переміщення, навантаження та функції (11) у вигляді рядів Фур'є

$$u_z(r, z, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} u_z^k(r, z) \cos k\varphi \quad (z \leftrightarrow r),$$

$$u_\varphi(r, z, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} u_\varphi^k(r, z) \sin k\varphi,$$

$$q_z(r, z, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} q_z^k(r, z) \cos k\varphi \quad (z \leftrightarrow r),$$

$$q_\varphi(r, z, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} q_\varphi^k(r, z) \sin k\varphi,$$

$$P_{0s}(r, z, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{0s}^k(r, z) \cos k\varphi \quad (s \leftrightarrow \varphi),$$

$$P_{0s\varphi}(r, z, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{0s\varphi}^k(r, z) \sin k\varphi,$$

$$P_{1s}(r, z, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{1s}^k(r, z) \cos k\varphi \quad (s \leftrightarrow \varphi),$$

$$P_{1s\varphi}(r, z, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{1s\varphi}^k(r, z) \sin k\varphi. \quad (12)$$

Коефіцієнти цих рядів визначаються такими рівняннями:

$$P_s^0(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_s(s, \varphi) d\varphi,$$

$$P_s^k(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_s(s, \varphi) \cos k\varphi d\varphi, \quad (k=1, 2, \dots). \quad (13)$$

Розкладання функцій (12) у ряди Фур'є дозволяє записати варіаційне рівняння рівноваги оболонки для кожної з гармонік окремо. Після інтегрування з урахуванням (13) отримаємо

$$\delta A_k - \delta A_{qk} = 0, \quad (14)$$

де δA_k – варіація дії внутрішніх сил

$$\delta A_k = \int_s \left[(\delta \epsilon_k)^T [(N_k) + (B_{0k})] + (\delta \kappa_k)^T [(M_k) + (B_{1k})] \right] r ds, \quad (15)$$

δA_{qk} – варіація поверхневого навантаження

$$\delta A_{qk} = \int_s (\delta u_k)^T (q_k) r ds. \quad (16)$$

Тут введені вектори зусиль, моментів, зовнішнього та додаткового навантажень

$$[N_k] = \begin{bmatrix} N_s^k & N_\varphi^k & N_{s\varphi}^k \end{bmatrix}^T, \quad [M_k] = \begin{bmatrix} M_s^k & M_\varphi^k & M_{s\varphi}^k \end{bmatrix}^T,$$

$$(q_k) = (q_{zk} \ q_{rk} \ q_{\varphi k})^T,$$

$$[B_{0k}] = \begin{bmatrix} P_{0s}^k & P_{0\varphi}^k & P_{0s\varphi}^k \end{bmatrix}^T, \quad [B_{1k}] = \begin{bmatrix} P_{1s}^k & P_{1\varphi}^k & P_{1s\varphi}^k \end{bmatrix}^T. \quad (17)$$

Перетворимо рівняння (14), виразивши зусилля та моменти через деформації серединної поверхні, а деформації серединної поверхні – через переміщення відповідно до геометричних рівнянь (6). Таким чином, отримуємо формулювання задачі у вигляді переміщень серединної поверхні оболонки.

Це варіаційне рівняння відрізняється від рівняння пружної рівноваги наявністю додаткових нелінійних членів $[B_{0k}] [B_{1k}]$, поява яких зумовлена пластичними та температурними деформаціями, а також температурною залежністю механічних властивостей матеріалу. Для розв'язання даної задачі побудуємо процес послідовних наближень, на кожному з яких знаходиться розв'язок пружної задачі з додатковими навантаженнями, визначеними з попереднього наближення.

Чисельний розв'язок задачі в кожному послідовному наближенні отримаємо методом скінченних елементів. Розіб'ємо серединний меридіан оболонки на ряд криволінійних скінченних елементів і розглянемо елемент з граничними вузлами i, j . Для того, щоб забезпечити безперервність і плавність переміщень на межах елемента, складові

вектора амплітудних значень переміщень (u) доцільно представити у вигляді (індекс а амплітудних значень переміщень k для спрощення запису будемо опускали) [11]

$$u_z = u_{zi} \Psi_1^i + u'_{zi} \Psi_2^i + u_{zj} \Psi_1^j + u'_{zj} \Psi_2^j,$$

$$u_r = u_{ri} \Psi_1^i + u'_{ri} \Psi_2^i + u_{rj} \Psi_1^j + u'_{rj} \Psi_2^j,$$

$$u_\varphi = u_{\varphi i} \Psi_1^i + u'_{\varphi i} \Psi_2^i + u_{\varphi j} \Psi_1^j + u'_{\varphi j} \Psi_2^j. \quad (18)$$

Тут u_{zi}, u'_{zi} – компоненти переміщень та їх похідні за координатою S у вузлах елемента. Функції ψ є одновимірними функціями Ерміта

$$\Psi_1^i = 1 - 3t^2 + 2t^3, \quad \Psi_2^i = t - 2t^2 + t^3,$$

$$\Psi_1^j = 3t^2 - 2t^3, \quad \Psi_2^j = -t^2 + t^3, \quad (19)$$

Параметр t ($0 \leq t \leq 1, t_i = 0, t_j = 1$) є безрозмірною довжиною утворювальної лінії кожного елемента.

Підстановка співвідношень (18) у варіаційне рівняння (14), процедура варіювання вузлових переміщень та процедура виключення вузлових параметрів, що не впливають на неперервність і гладкість сполучення скінченних елементів [7] призводить до наступної системи алгебраїчних рівнянь рівноваги елемента з вузлами чисельними функціями Ерміта i, j :

$$\begin{bmatrix} g^{ii} & g^{ij} \\ g^{ji} & g^{jj} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} u_{ik} \\ u_{jk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{ik} \\ P_{jk} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{ik}^D \\ P_{jk}^D \end{pmatrix}, \quad (20)$$

де компоненти матриці жорсткості

$$g_v^{ij} = \int (\Psi^i)^T \left[(D_{\epsilon k})^T (E_\epsilon) (D_{\epsilon k}) + (D_{\kappa k})^T (E_\kappa) (D_{\kappa k}) \right] (\Psi^j) r ds; \quad (21)$$

вектор зовнішнього навантаження

$$(P_{ik}) = \int (\Psi^i)^T (q_k) r ds; \quad (22)$$

вектор додаткових навантажень

$$\begin{pmatrix} P_{ik}^D \end{pmatrix} = \int (\Psi_i) \left[(D_{\epsilon k})^T [B_{0k}] + [D_{\kappa k}]^T [B_{1k}] \right] r ds; \quad (23)$$

де $(D_{\epsilon k}), (D_{\kappa k})$ – матриці диференціювання (5);

$(E_\epsilon), (E_\kappa)$ – матриці, що пов'язують напруження та деформації [10].

Потім будується матриця жорсткості та вектор зовнішніх впливів на всю конструкцію. Зафіксувавши в матриці жорсткості елемента (20) номер i -го блок-рядка, виведемо коефіцієнти при зміні

вектора невідомих переміщень (u_i) для чотирьох i -их блоків-рядків матриці жорсткості конструкції

$$\sum_v \left(g_v^{ii} \right) (u_i) + \sum_{j(v)} \left(g_v^{ij} \right) (u_j), \quad (24)$$

де v – номери скінченних елементів, що прилягають до i -го вузла;

$j(v)$ – номери вузлів, суміжних із i -м вузлом v -х елементів.

Якщо вузол не є вузлом розгалуження, то $v = 2$. Якщо у вузлі сходяться більше двох гілок, то вузол є вузлом розгалуження, і v дорівнює кількості гілок, що сходяться у вузлі. Вираз (24) є лівою частиною системи алгебраїчних рівнянь із матрицею, блок-рядок якої складається з квадратних блоків

$$I_i = \left(\sum_v \left(g_v^{ii} \right), \left(g_v^{ij} \right) \right),$$

розташованих у точках перетину блок-рядків i з блок-стовпцями j . Сукупність блок-рядків I_i для усіх i утворює матрицю жорсткості конструкції. Вектор зовнішніх впливів вузла з номером i обчислюється за формулою $B_i = \sum_v \left(P_v^i \right)$.

Для врахування граничних умов потрібно задати значення переміщень у зафіксованих вузлах.

Особливості чисельної реалізації. При вирішенні термомеханічної задачі задаємо певну кількість вузлів у меридіональному, окружному та нормальному до серединної поверхні напрямках, внаслідок чого оболонка виявляється покритою тривимірною просторовою сіткою. Припускаємо, що серединний меридіан оболонки складається з сегментів зі стандартними формами, наприклад, у вигляді відрізків прямих або дуг кіл. Товщина сегментів вважається лінійно змінною по їх довжині і задається значеннями на початку та в кінці сегмента. Навантаження вводиться у вузлах серединної поверхні, а температура – у всіх вузлах сітки. Механічні характеристики матеріалу задаються у вигляді термомеханічної поверхні $\sigma = f(\epsilon, T)$, коефіцієнта Пуассона $\nu = \nu(T)$ і коефіцієнта лінійного теплового розширення $\alpha_T = \alpha_T(T)$. Термомеханічна поверхня представлена у вигляді таблиці, в якій для різних значень температури наведено значення напруги σ залежно від деформації ϵ , отримані при простому розтягуванні зразків зі швидкістю, при якій реологічними факторами можна знехтувати. Також задається інформація про кількість гармонік тригонометричних рядів, що враховуються при розв'язанні задачі. При цьому слід брати до уваги, що при розв'язанні нелінійної задачі нижчі гармоніки в навантаженні породжують спектр вищих гармонік у розв'язку. Тому в розв'язку задачі часто зберігається більше гармонік, ніж при апроксимації навантаження.

Алгоритм визначення неосесиметричного пружно-пластичного НДС оболонок обертання відповідно до використовуюваного в роботі методу пружних рішень організований як процес послідо-

вних наближень, на кожному кроці якого знаходиться рішення пружної задачі (7) з додатковими навантаженнями. Розв'язання задачі починається з

обчислення значень функцій $\beta_{ss}, \beta_{\phi\phi}, \beta_{s\phi}, \epsilon_{\zeta\zeta}$ у вузлах сіткового розбиття оболонки. При цьому в першому наближенні у формулах (8) приймається $\omega_1 = 0$, а в наступних наближеннях функція ω і компоненти деформацій, що входять до (8), беруться з попереднього наближення. Далі обчислюються значення інтегральних характеристик (11) у всіх вузлах серединної поверхні оболонки. Інтеграли по товщині знаходяться чисельно методом Сімпсона. Потім визначаються амплітудні значення інтегральних характеристик (11). При обчисленні інтегралів по окружній координаті на кожному з інтервалів розбиття $(\phi_j, \phi_{j+1}), j = 1, 2, \dots, k_\phi - 1$ застосовується узагальнена теорема про середнє значення. Відповідно до неї функція, що входить під знак інтеграла, $f(\phi)$ розраховуємо на даній ділянці (ϕ_j, ϕ_{j+1}) постійною і рівною її середньому значенню. Це дозволяє винести її за знак інтеграла, а решту інтегралів від тригонометричних функцій обчислюють аналітично

$$\begin{aligned} f_m &= \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos m\phi d\phi = \\ &= \sum_{j=1}^{k_\phi-1} \int_{\phi_j}^{\phi_{j+1}} f(\phi) \cos m\phi d\phi = \\ &= \sum_{j=1}^{k_\phi-1} \left[\frac{f(\phi_j) + f(\phi_{j+1})}{2} \int_{\phi_j}^{\phi_{j+1}} \cos m\phi d\phi \right] = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{k_\phi-1} \left[\frac{f(\phi_j) + f(\phi_{j+1})}{2} (\sin m\phi_{j+1} - \sin m\phi_j) \right], \\ \phi_j &= \frac{2\pi}{k_\phi - 1} (j - 1). \end{aligned}$$

Після визначення амплітудних значень інтегральних характеристик (11) для кожної з гармонік обчислюються вектори додаткових навантажень P_{ik}^D , що визначаються співвідношеннями (10). Інтегрування по меридіану здійснюється за формулами Гауса. Для кожної з гармонік методом квадратного кореня розв'язується система лінійних алгебраїчних рівнянь і визначаються амплітудні значення переміщень. Отримані амплітудні значення переміщень підсумовуються відповідно до формул (10) і, таким чином, у першому наближенні знаходиться рішення рівняння (12), що описує неосесиметричне пружно-пластичне деформування досліджуваної оболонки.

Далі за формулами (3), (4) обчислюються компоненти деформацій у довільній точці оболонки, а за формулами (7) – компоненти напружень. Використовуючи отримані компоненти деформацій, можна визначити інтенсивність деформацій G . За рівнянням термомеханічної поверхні при тем-

пературі, що відповідає розглянутій точці, для отриманого значення Γ потрібно знайти значення інтенсивності напружень S_d , що дозволяє визначити сікучий модуль G^* і значення функції ω_1 . За отриманими в результаті розрахунку компонентами напружень обчислюється значення інтенсивності напружень S_f і перевіряється виконання умо-

ви $|S_f - S_d| < \delta S_d$ (δ – задана мала величина). Процес послідовних наближень триває доти, доки в усіх вузлах не буде виконано цю умову.

Апробація розробленої методики. Для перевірки розробленої методики розглянемо пружно-пластичний напружений стан конічної оболонки лінійно-змінної товщини, що перебуває під дією внутрішнього тиску $q = 1,5 \cos\Phi$ МПа. Контур малого радіусу ($s = s_0$) жорстко затиснутий, а великий ($s = s_N$) – не піддається зусиллям і моментам. Радіуси серединної поверхні на граничних контурах відповідно дорівнюють $r_0 = 0,07819$ м і

$r_N = 0,44957$ м; довжина твірної $s_N - s_0 = 0,38$ м. Товщина коливається в межах від $h_0 = 0,03973$ м до $h_N = 0,00995$ м. Оболонка виготовлена зі сплаву ЭИ395, механічні характеристики якого наведено в [10]. При розрахунку в рішенні враховувалися перша та третя гармоніки; кількість точок розбиття по товщині оболонки приймалася рівною 7, по колу 73 (на інтервалі $0 \leq \theta \leq \pi$), уздовж меридіана – 153. За заданої точності $\delta = 0,001$ процес послідовних наближень сходиться на 22-й ітерації.

У табл. 1 наведено значення напружень і деформацій на торцях оболонки для порівняння з результатами, отриманими за методикою [11]. Дані розрахунків за описаною методикою наведені над лінією, за методикою [10] під лінією. Відмінність максимальних значень напружень і деформацій за зазначеними вище методиками не перевищує 1 %.

Таблиця 1 – Значення напружень і деформацій на торцях оболонки

s	ζ	σ_{ss} , МПа	$\sigma_{\phi\phi}$, МПа	$\sigma_{s\phi}$, МПа	$\varepsilon_{ss} \cdot 10^5$	$\varepsilon_{\phi\phi} \cdot 10^5$	$\varepsilon_{s\phi} \cdot 10^5$
		$\phi = 0$	$\phi = 0$	$\phi = \pi/2$	$\phi = 0$	$\phi = 0$	$\phi = \pi/2$
s_0	$-h/2$	<u>684</u> 686	<u>256</u> 257	<u>-88</u> -88	<u>479</u> 484	<u>0</u> 0	<u>-117</u> -118
	$h/2$	<u>-736</u> -740	<u>-294</u> -297	<u>-109</u> -110	<u>-634</u> -649	<u>0</u> 0	<u>-145</u> -146
s_N	$-h/2$	<u>0</u> 0	<u>169</u> 169	<u>-13</u> -13	<u>-26</u> -26	<u>87</u> 87	<u>-18</u> -18
	$h/2$	<u>0</u> 0	<u>136</u> 136	<u>13</u> 13	<u>-21</u> -21	<u>70</u> 70	<u>18</u> 18

Також розглянуто пружно-пластичний напружений стан циліндричної оболонки, жорстко затиснутої на граничних контурах, з такими геометричними параметрами: радіус серединної поверхні $r = 0,4$ м; довжина твірної $s_N - s_0 = 0,2$ м; товщина оболонки $h = 0,01$ м. Оболонка виготовлена з матеріалу з лінійним зміцненням. Діаграма розтягування визначається трьома значеннями деформацій $\varepsilon = 0; 0,002285; 0,05$ та відповідними їм значеннями напруги $\sigma = 0; 160; 320$ МПа. Коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$.

Оболонка перебуває під впливом внутрішнього

тиску $q\zeta$, МПа, $q\zeta = 5 + \cos 2\phi$. При обчисленні шукані функції представлялися п'ятьма гармоніками з номерами $k = 0; 2; 4; 6; 8$. Симетрія геометрії, навантажень та умов кріплення дозволяє проводити розрахунок 1/8 частини оболонки. Кількість точок розбиття по товщині оболонки приймалася рівною 11, по колу 73 (на інтервалі $0 \leq \theta \leq \pi/2$), уздовж меридіана – 101 (на інтервалі $0 \leq s \leq 0,1$ м). За заданої точності обчислення $\delta = 0,001$ Процес послідовних наближень сходиться на 116-й ітерації.

Таблиця 2 – Значення напружень у деяких точках оболонки

s	ζ	σ_{ss} , МПа	$\sigma_{\phi\phi}$, МПа	σ_{ss} , МПа	$\sigma_{\phi\phi}$, МПа	$\sigma_{s\phi}$, МПа
		$\phi = 0$	$\phi = 0$	$\phi = \pi/4$	$\phi = \pi/4$	$\phi = \pi/4$
0	$-h/2$	<u>292</u> 300	<u>139</u> 143	<u>239</u> 239	<u>111</u> 111	<u>-2</u> -5
	$h/2$	<u>-266</u> -265	<u>-125</u> -125	<u>-225</u> -222	<u>-103</u> -101	<u>-2</u> -7
0,05	$-h/2$	<u>9</u> 11	<u>167</u> 168	<u>-17</u> -19	<u>123</u> 122	<u>-21</u> -21
	$h/2$	<u>89</u> 86	<u>190</u> 190	<u>85</u> 88	<u>146</u> 146	<u>8</u> 7
0,1	$-h/2$	<u>-99</u> -103	<u>104</u> 100	<u>-84</u> -81	<u>106</u> 108	<u>0</u> 0
	$h/2$	<u>169</u> 172	<u>194</u> 195	<u>148</u> 146	<u>179</u> 179	<u>0</u> 0

У табл. 2 наведено значення напружень у деяких точках оболонки у порівнянні з результатами, отриманими за методикою [11]. Дані розрахунків за запропонованою методикою наведені над лінією, дані за методикою [11] – під лінією. Різниця результатів не перевищує 3 %.

Аналіз пружно-пластичного стану оболонки з розгалуженим меридіаном. Розглянемо деформацію необмеженої в осьовому напрямку нескінченно довгої циліндричної оболонки (рис. 1), підкріпленої кільцевими пластинами.

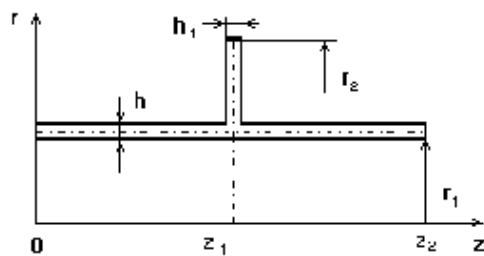


Рисунок 1 – Циліндрична оболонка

Геометричні параметри оболонки прийнято такими: $z_1 = 0,04$ м; $z_2 = 0,08$ м; $r_1 = 0,1$ м; $r_2 = 0,1205$ м; $h = 0,001$ м; $h_1 = h$.

Розв'язання цієї задачі в пружному осесиметричному формулюванні наведено в статті [12]. Порівняємо результати розв'язання цієї задачі, отримані за розробленою в цій роботі методикою, з даними [8]. Механічні характеристики матеріалу прийнято такими: $\nu = 0,3$; $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа. Оболонка знаходиться під внутрішнім тиском $P = 10^6$ Па.

У табл. 3 для деяких значень z наведено значення напруги на поверхнях оболонки.

Таблиця 3 – Значення напруги на поверхнях оболонки

$z \cdot 10^2, \text{ м}$	$\sigma_s^+ \cdot 10^{-5}, \text{ Па}$	$\sigma_s^- \cdot 10^{-5}, \text{ Па}$	$\sigma_\varphi^+ \cdot 10^{-5}, \text{ Па}$	$\sigma_\varphi^- \cdot 10^{-5}, \text{ Па}$
0	0	0	995	995
	-14	14	998	1007
3.85	-626	626	301	676
	-625	625	300	676
3.90	-729	729	260	698
	-729	729	260	697
3.95	-841	841	221	725
	-840	840	220	725
4.00	-960	960	183	759
	-960	960	183	759

Індекс «+» відповідає зовнішній поверхні, а індекс «-» — внутрішній. Перший рядок для кожного значення z відповідає рішення за запропонованою методикою, другий рядок – даним статті [12], отриманим за теорією оболонок обертання з розгалуженим меридіаном. Як видно з таблиці, результати пружного розрахунку за обома методами практично збігаються.

Розглянемо неосесиметричне пружно-пластичне деформування оболонки з тією ж геометрією. Матеріал оболонки – сплав ЭИ395. Оболонка знаходиться під внутрішнім тиском, що змінюється за законом $P = P_0(1 + 0,25\cos 2\varphi)$, де $P_0 = 2$ МПа. Кількість скінченних елементів по меридіану циліндричного сегмента задавалася нерівномірно: 50 елементів в околиці ребра на ділянці $0,035 \text{ м} \leq z \leq 0,04 \text{ м}$ і 250 – на ділянці, що залишилася. Кільцева пластина розбивалася рівномірно на 20 елементів. Кількість точок розбиття по товщині оболонки становила 7, а по колу — 73 (на інтервалі $0 \leq \theta \leq \pi/2$). При розрахунках враховувалися 4 гармоніки ряду Фур'є ($k = 0, 2, 4, 6$) а точність обчислень задавалася $\delta = 0,01$. За даного навантаження процес послідовних наближень сходиться за 111 ітерацій.

На рис. 2–4 наведено розподіли меридіональних, окружних і дотичних напружень за окружною координатою в точці $s = 0,04$ м.

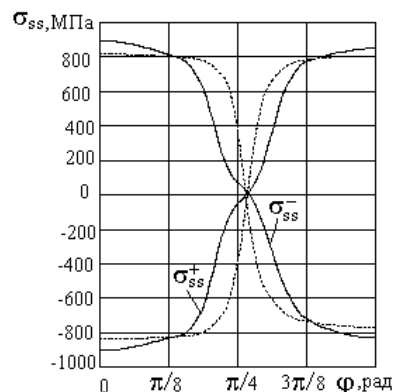


Рисунок 2 – Розподіл меридіональних напружень за окружною координатою

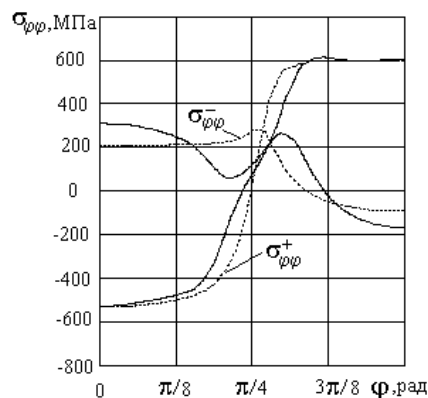


Рисунок 3 – Розподіл окружних напружень за окружною координатою

Результати наведено для внутрішньої та зовнішньої поверхонь циліндричного сегмента. Суцільні лінії відповідають результатам, коли в розв'язку враховуються 4 гармоніки, а штрихові — коли підсумовуються лише перші 2 гармоніки, що відповідають навантаженню. З рисунків видно, що врахування двох старших гармонік істотно уточнює отримане рішення.

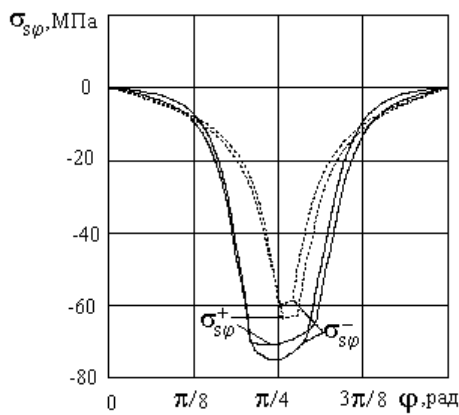


Рисунок 4 – Розподіл дотичних напружень за окружною координатою

Висновки. Проведені чисельні дослідження дозволяють зробити висновок про ефективність розробленої методики для задач з кінематичними граничними умовами. У цьому випадку обчислювальні витрати при використанні розробленого варіанту МСЕ порівнянні з витратами при використанні методу дискретної ортогоналізації. Використання розроблених методів розв'язання задач термопружнопластичності при дослідженні поведінки елементів конструкцій дозволяє скоротити терміни створення нових конструкцій, підвищити їх надійність, зменшити матеріаломісткість і знизити вартість.

Список літератури/ References (transliterated)

1. Wu, H., Zhao, G., Du, X., Wang, W. (2025). An isogeometric Reissner–Mindlin shell formulation for nonlinear thermoelastic analysis of shell structures. *Composite Structures*, 372, 119517. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2025.119517>
2. Hu, C., Gao, W., LiHu, H. (2025). Isogeometric analysis of secondary thermal buckling in composite laminates. *Composite Structures*. DOI: <https://doi.org/10.1177/08927057251371563>
3. Li, J., Qian, H., Lu, C. (2025). Thermo-Mechanical Analysis for Composite Cylindrical Shells with Temperature-Dependent Material Properties Under Combined Thermal and Mechanical Loading. *Materials*, 18(7), 1391. DOI: <https://doi.org/10.3390/>

4. Duong T. X., Roohbakhshan F., Sauer R. A. Rotation-free isogeometric thin shell formulation. *arXiv preprint*, 2025.
5. Bennett, K. C., Zecevic, M., Luscher, D. J., Lebensohn, R. A. (2020). A thermo-elastoplastic self-consistent homogenization method for inter-granular plasticity with application to thermal ratcheting of TATB. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 7:3. DOI: <https://doi.org/10.1186/s40323-019-0139-6>
6. Strelnikova E. Choudhary N., Degtyariv K., Kriutchenko D., Vierushkin I.: Boundary element method for hypersingular integral equations: Implementation and applications in potential theory. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 169, 105999, (2024), DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2024.105999>
7. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Zhu, J. Z. (2019). *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier.
8. Roubíček, T., Stefanelli, U. (2019). Finite thermoelastoplasticity and creep under small elastic strains. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 24(4), 1161–1181. DOI: <https://doi.org/10.1177/1081286518774883>
9. Thermo-coupled elastoplasticity models with asymptotic loss of the material strength. *International Journal of Plasticity*, 2014, 63, 211–228. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2014.01.013>
10. Variational updates for thermomechanically coupled gradient-enhanced elastoplasticity - Implementation based on hyper-dual numbers *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, 339, 239–261. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.04.047>
11. Śloderbach, Z. (2016). Closed set of the uniqueness conditions and bifurcation criteria in generalized coupled thermoplasticity for small deformations. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 28, 633–654. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00161-016-0499-9>
12. Begun, A. S., Burenin, A. A., Kovtanyuk, L. V. (2022). Large deformations and heating of elastoviscoplastic material in a cylindrical viscometer. *Mechanics of Solids*, 57, 532–542. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654422030062>

Надійшла (received) 01.05.2026

Стаття прийнята до друку 20.05.2026

Опублікована 29.05.2026

Відомості про авторів / About the Authors

Гнітько Василь Іванович / Gnityko Vasyl – кандидат технічних наук, старший дослідник, Інститут енергетичних машин і систем ім. А.М. Підгорного НАН України, старший науковий співробітник відділу термогазодинаміки енергетичних машин; м. Харків, Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2475-5486>; e-mail: gnitkovi@gmail.com