

**О. С. ЛЬОЗНИЙ, М. М. ТКАЧУК, О. В. БОНДАРЕНКО, І. Я. ХРАМЦОВА, Н. А. ДЬОМІНА,  
С. І. МАРУСЕНКО, О. В. КОХАНОВСЬКА, Л. М. БОНДАРЕНКО**

### **ВПЛИВ ЖОРСТКІСНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ПОВЕРХНЕВИХ ШАРІВ НА КОНТАКТНУ ВЗАЄМОДІЮ ТІЛ ІЗ ПОВЕРХНЯМИ БЛИЗЬКОЇ ФОРМИ**

У багатьох машинобудівних конструкціях широко розповсюджені деталі, які перебувають у контактній взаємодії. У багатьох випадках така взаємодія відбувається на поверхнях, які номінально співпадають або близькі. Тобто зороз між тілами номінально або нульовий, або дуже малий. У цих випадках важливими чинниками стають два фактори. Перший – це контактна жорсткість, яка визначається властивостями приповерхневих шарів матеріалів. Другий фактор – це збурення геометричної форми контактуючих поверхонь. Прикладами можуть бути елементи підшипників, двигунів, опор роторів, штампів, прес-форм тощо. Для дослідження контактної взаємодії та напружено-деформованого стану таких контактуючих тіл розроблено варіаційну постановку. Ця постановка полягає у адаптації варіаційного принципу Калькера. До функціоналу додаткової роботи додається додатковий доданок, який залежить від властивостей приповерхневих шарів контактуючих тіл та від форми контактуючих поверхонь. Таким чином, у єдиній математичній моделі враховуються обидва важливі фактори. Для дискретизації задачі залучено метод граничних елементів. Для цього шуканий контактний тиск апроксимується на множині кусочно-лінійних функцій, які базуються на трикутній мережі. У результаті виникає проблема мінімізації квадратичної функції на множині лінійних обмежень у вигляді нерівностей. Як приклад здійснено аналіз контактної взаємодії кулькового поршня із біговою доріжкою радіальної гідропередачі.

**Ключові слова:** контактна взаємодія; варіаційний принцип Калькера; метод граничних елементів; контактна жорсткість; напружено-деформований стан; радіальна гідро-объемна передача

**O. LOZNYI, M. M. TKACHUK, O. BONDARENKO, I. KHRAMTSOVA, N. DOMINA,  
S. MARUSENKO, O. KOKHANOVSKA, L. BONDARENKO**

### **THE EFFECT OF THE STIFFNESS PROPERTIES OF SURFACE LAYERS ON THE CONTACT INTERACTION BETWEEN BODIES AND SURFACES OF SIMILAR SHAPE**

In many machine-building structures, parts that are in contact interaction are widespread. In many cases, such interaction occurs on surfaces that nominally coincide or are close. That is, the gap between the bodies is nominally either zero or very small. In these cases, two factors become important factors. The first is the contact stiffness, which is determined by the properties of the near-surface layers of materials. The second factor is the perturbation of the geometric shape of the contacting surfaces. Examples can be elements of bearings, engines, rotor supports, dies, molds, etc. To study the contact interaction and the stress-strain state of such contacting bodies, a variational formulation has been developed. This formulation consists of adapting the Kalker variational principle. An additional term is added to the additional work functional, which depends on the properties of the near-surface layers of the contacting bodies and on the shape of the contacting surfaces. Thus, a single mathematical model takes into account both important factors. The boundary element method is used to discretize the problem. For this purpose, the desired contact pressure is approximated by a set of piecewise linear functions based on a triangular network. As a result, the problem of minimizing a quadratic function on a set of linear constraints in the form of inequalities arises. As an example, an analysis of the contact interaction of a ball piston with a running track of a radial hydraulic transmission is carried out.

**Keywords:** contact interaction; Kalker's variational principle; boundary element method; contact stiffness; stress-strain state; radial hydro-volumetric transmission

**Вступ.** Машинобудівні конструкції, як правило, містять у вузлах та з'єднаннях деталі, що знаходяться у контактній взаємодії під навантаженням. Для прикладу, це можуть бути елементи підшипників, двигунів, опор роторів, штампів, прес-форм тощо. Умови міцності формують при цьому прагнення якомога більшою мірою збільшити площу контакту цих деталей. Однак у цих обставинах виходять за області свого застосування різні традиційні моделі – від теорії Герца до методу скінченних елементів.

Що стосується моделі Герца, то серед основних її положень присутнє обмеження стосовно малої площі області контакту порівняно із розмірами контактуючих тіл. Це вступає у протиріччя із випадком, що розглядається.

Якщо ж звернутися до методу скінченних елементів, то він оперує не з реальною геометричною формою, зокрема, контактуючих поверхонь, а із деякою їх апроксимацією за

допомогою того чи іншого типу скінченних елементів. У цьому випадку відбувається спотворення умов контактного спряження, оскільки уже на етапі опису геометричної форми привноситься похибка, яка за умов малого зазору між контактними поверхнями стає набагато більш відчутною, ніж для традиційних випадків контакту тіл неузгодженої форми [1, 2].

Таким чином, особливість технічного рішення для випадків, що розглядаються, змушує створювати нові моделі та методи досліджень контактної взаємодії складнопрофільних тіл із номінально співпадаючими або близькими за формою контактними поверхнями [3, 4]. Зокрема, для випадку контакту тіл, що розглядається, стають важливими:

© О. С. Льозний, М. М. Ткачук, О. В. Бондаренко,  
І. Я. Храмцова, Н. А. Дьоміна, С. І. Марусенко,  
О. В. Кохановська, Л. М. Бондаренко, 2026

1) модель опису розподілу зазору між контактуючими тілами;

2) властивості приповерхневих шарів матеріалів контактуючих тіл (а також покриттів, плівок, напилень тощо), деформування котрих вносить суттєвий внесок у зміну зазору між тілами.

Як уже зазначалося, традиційні моделі та методи мають обмеження для опису контактної взаємодії зазначених тіл, що досліджуються. Тому потрібно створювати альтернативні підходи, які подібних обмежень позбавлені. Зокрема, привертає увагу підхід на основі напіваналітичного методу граничних елементів (МГЕ), який, своєю чергою, базується на розвитку та адаптації варіаційного принципу Калькера [3, 4]. На розвиток цього підходу спрямована ця робота на прикладі гідропередачі [5].

#### **Аналіз останніх досліджень та публікацій.**

Питанням контактної взаємодії пружних тіл складної геометрії присвячено значну кількість наукових праць. У сучасній літературі розроблено та впроваджено різноманітні моделі й методи аналізу напружено-деформованого стану (НДС) контактуючих елементів.

Зокрема, у дослідженні [6] розглянуто задачу одностороннього контакту суцільного пружного тіла з композитною структурою через нелінійний поверхневий шар Вінклера. Остання складається з тонкого покриття (оболонка типу Тимошенка) та суцільної основи, що взаємодіють через додатковий нелінійний вінклерівський шар. Авторами запропоновано варіаційне (слабке) формулювання задачі у вигляді нелінійного рівняння. Застосовуючи апроксимацію методом скінченних елементів (МСЕ), розроблений підхід використано для аналізу контакту суцільних тіл із поверхневими кавернами за наявності тонких покриттів. Визначено характер залежності контактних і міжфазних напружень від геометричних параметрів покриття та характеристик шару Вінклера.

У роботі [7] вивчено контактну задачу для пружних тіл, одне з яких має розривне тонке покриття, змодельоване оболонкою типу Тимошенка. Проаналізовано вплив показників жорсткості та висоти покриття на розподіл поверхневих та еквівалентних напружень. Подібний підхід застосовано у роботі [8], де досліджено взаємодію двох тіл, одне з яких підсилене тонкою оболонкою через нелінійний шар Вінклера, та сформовано відповідне варіаційне рівняння. Термопружну поведінку гетерогенного біматеріалу з міжфазною тріщиною, береги якої взаємодіють під дією стискаючих сил та теплового потоку, описано в дослідженні [9].

Задачу багатотільної контактної взаємодії з нелінійними шарами Вінклера розв'язано у роботі [10]. Для розв'язання нелінійних варіаційних рівнянь із недиференційовними операторами запропоновано модифіковані двоточкові диференціально-різницеви паралельні ітераційні

алгоритми декомпозиції області типу Робіна.

У статті [11] представлено формулювання методу граничних елементів (МГЕ) для моделювання тангенціального контакту пружного напівпростору з гетерогенним покриттям.

Важливе теоретичне значення має праця [12], де обґрунтовано, що загальні варіаційні нерівності становлять фундаментальну основу для вивчення широкого класу задач прикладної механіки. Автором проаналізовано нові класи варіаційних нерівностей, пов'язаних із критеріями оптимальності неопуклих функцій, та запропоновано низку чисельних методів (проекційні методи, рівняння Вінера-Хопфа, штрафні функції тощо) із доведенням їхньої збіжності.

Ефективний чисельний алгоритм для розв'язання фрикційних контактних задач при взаємодії шару зі штампами складної форми запропоновано у роботі [13]. Метод базується на інтегральних рівняннях та процедурах квадратичного програмування. Задачу з невідомою областю контакту сформульовано у вигляді нерівностей Сінборіні та трансформовано за допомогою кубатурних формул у систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

Практичні аспекти, зокрема взаємодія в системі «колесо-рейка», розглянуті у роботах [14, 15]. У них підкреслюється роль варіаційної теорії Калькера та трибологічних чинників (шорсткості, приповерхневої пластичної деформації та часової деградації станів поверхонь).

Отже, роботи [1–15] охоплюють проблематику контактної взаємодії переважно на макрорівні, де домінуючим є варіаційний підхід. Однак у цих дослідженнях не повною мірою вирішено задачі для складнопрофільних тіл із урахуванням мікрогеометрії та специфічних властивостей покриттів. Цим аспектам присвячено роботи [16, 17], де засобами МГЕ та теорії Персона вивчено вплив анізотропії шорсткості на реальну площу контакту для різних розподілів висот (Гауссового та Вейбулла). Установлено обмеження низки моделей щодо опису гістерезисних явищ при навантаженні-розвантаженні.

Вплив адгезії на міцність контакту жорстких інденторів із хвилястим профілем та м'яким покриттям досліджено у праці [18], де виявлено критичні значення товщини шару, що розмежовують різні режими адгезійної поведінки. У роботі [19] за допомогою МГЕ проаналізовано контакт волоконних структур із напівпростором, що дало можливість установити залежність адгезійної міцності від жорсткості фібрил.

Окрему групу становлять дослідження технологічних методів зміцнення поверхонь. У статті [20] висвітлено результати формування боридних шарів на сталях, а в роботі [21] обґрунтовано переваги методу мікродугового оксидування (МДО) для покращення триботехнічних характеристик алюмінієвих сплавів.

Незважаючи на значний доробок, питання повної побудови розв'язків задач контактної взаємодії 3D-тіл складної конфігурації (зокрема кулькових поршнів радіальних гідропередач) з урахуванням властивостей гетерогенних поверхневих шарів залишається відкритим. Це зумовлює необхідність розробки нових теоретико-чисельних підходів, що є логічним продовженням досліджень [3, 4, 22-24].

*Мета роботи* - створення розрахункових моделей та методів дослідження процесів і станів у контактуючих елементах гідропередач.

Основні завдання:

1) Створення удосконаленого варіаційного формулювання для аналізу контактної взаємодії та напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл із номінально співпадаючими або близькими контактуючими поверхнями та із урахуванням контактної жорсткості приповерхневих шарів;

2) Реалізація розробленого підходу у вигляді математичної та чисельної моделей;

3) Здійснення досліджень контактної взаємодії елементів радіальних гідрооб'ємних передач.

**Створення удосконаленого варіаційного формулювання для аналізу контактної взаємодії та напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл із номінально співпадаючими або близькими контактуючими поверхнями та із урахуванням контактної жорсткості приповерхневих шарів.** Як зазначалося вище, випадок контактної взаємодії номінально співпадаючих або близьких за формою тіл відрізняється як за фізичною, геометричною та методичною суттю від традиційних випадків контакту гладких тіл узгодженої чи неузгодженої форми [1, 2], що досліджуються відомими методами. За усіма зазначеними аспектами існує множина моделей, форм та методів, придатних для застосування, розвитку та адаптації до розв'язання задач того чи іншого типу. Зокрема, для випадку контактної взаємодії тіл із приповерхневими шарами, властивості яких відрізняються від властивостей матеріалу у глибині, а також із номінально співпадаючою або близькою формою контактуючих поверхонь, видається доцільним звернутися до можливостей варіаційного принципу Калькера, розширивши та пристосувати його до потреб задачі, що виникла.

**Реалізація розробленого підходу у вигляді математичної та чисельної моделей. Математична модель контактної взаємодії складнопрофільних елементів радіально-поршневих гідрооб'ємних передач.** Аналогічно до підходів, представлених у роботах [3, 4, 22-24], розглянемо загальний випадок контактної взаємодії двох складнопрофільних тіл  $\Omega_1$  та  $\Omega_2$ , поверхні яких покриті тонкими шарами матеріалів  $\Omega'_1$  та  $\Omega'_2$  відповідно. Геометричну схему взаємодії, а також фізичний зміст основних параметрів і розрахункових величин наведено на

рис. 1. Об'єми  $\Omega_1$  та  $\Omega_2$  такі, що можна розглядати їх реакцію на дію тиску на поверхню як реакцію напівпросторів.

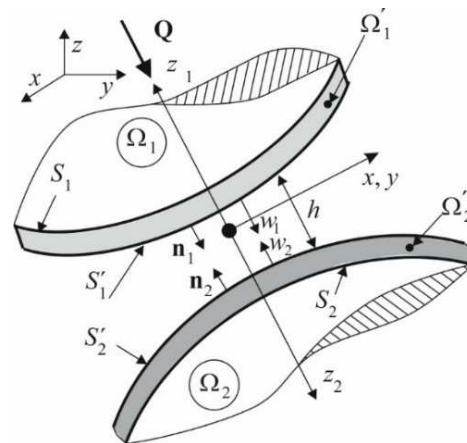


Рисунок 1 - Контакт складнопрофільних тіл  $\Omega_1, \Omega_2$  за наявності проміжних шарів (покривів)  $\Omega'_1, \Omega'_2$  відповідно

У межах постановки задачі аналізу контактної взаємодії тіл через розподіл контактного тиску  $q$ , згідно з варіаційним принципом Калькера [14, 15], істинний розподіл тиску визначається з умови мінімізації функціонала:

$$I(q) \rightarrow \min, q \in K, \quad (1)$$

де  $K$  - множина розподілів тиску, які задовольняють умовам невід'ємності контактного тиску, тобто

$$q \geq 0. \quad (2)$$

Функціонал  $I(q)$  має такий вигляд

$$I = \frac{1}{2} a(q, q) - b(q). \quad (3)$$

Тут  $a$  і  $b$  - відповідно квадратична та лінійна форми розподілів  $q$  [3, 4, 14, 15, 22-24].

Об'єм  $\Omega$  та поверхня  $S$  складаються із частин [3, 4, 22-24]:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega'_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega'_2, \quad (4)$$

$$S = S'_1 \cup S'_2. \quad (5)$$

Якщо дискретизувати розподіл шуканого контактного тиску  $q$  у вигляді гранично-елементної апроксимації [3, 4, 22-24], то

$$q = \sum \alpha_i \varphi_i, \quad (6)$$

де  $\alpha_i$  - компоненти масиву вузлових параметрів  $\alpha$ ;

$\varphi_i$  - базисні функції.

Тут підсумовування здійснюється на множині вузлів  $J$ .

У результаті задача (1) зводиться до проблеми квадратичного програмування

$$\Phi_n = \frac{\sqrt{3}}{2} c^2 \left[ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N C_{nm} q_n q_m + \sum_{m=1}^N q_m (h_m - \delta) \right] \rightarrow \min; \quad (7)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} c^2 \sum_{m=1}^N q_m = Q; \quad q_m \geq 0, \quad m=1, N. \quad (8)$$

Мінімізація (7) на множині обмежень (8) дає розв'язок дискретної задачі, який при підстановці у (6) призводить до наближеного розв'язку за (6), а відтак – і компоненти напружено-деформованого стану  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  (напруження та деформації) та розподіл контактного тиску  $q$  на  $S$ .

Якщо варіювати  $S$ , то буде установлена залежність  $q(S)$ ,  $\sigma_{ij}(S)$ ,  $\varepsilon_{ij}(S)$ . Відповідно, на цій основі можна організувати задачу синтезу.

$$S^*: \rho(S) \rightarrow \text{extr}, \quad (9)$$

де  $\rho(S)$  – деяка характеристика (рівень контактної тиску, напружень тощо), яка визначає ту чи іншу умову міцності, що залежить від умов у конкретному випадку.

Аналогічна ситуація – і щодо впливу на контактну взаємодію складнопрофільних тіл властивостей матеріалів їхніх поверхневих шарів  $\Omega'_1$  та  $\Omega'_2$ .

Отже, розроблена математична модель забезпечує можливість як виявлення закономірностей контактної взаємодії складнопрофільних елементів радіально-поршневих гідрооб'ємних передач, так і наукового обґрунтування перспективних технічних рішень із поліпшеними характеристиками міцності.

**Результати дослідження.** Прикладом практичної реалізації запропонованого підходу є аналіз контактної взаємодії кулькового поршня радіально-поршневої гідрооб'ємної передачі ГОП-900 (рис. 2) із біговою доріжкою статорного кільця

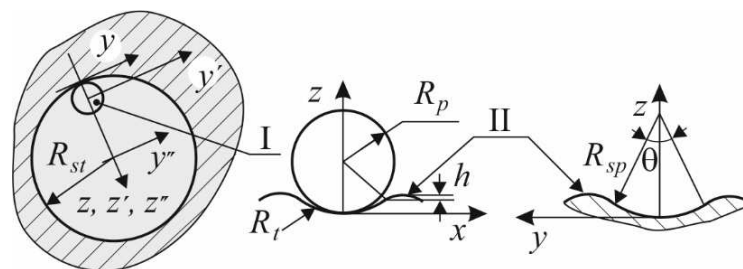


Рисунок 3 - Схема взаємодії кулькових поршнів I із біговою доріжкою II статорного кільця гідропередачі

Тут поршень I – куля (поршень) радіусом  $R_p$ , поверхня II (бігова доріжка статорного кільця) – тор із поперечним профілем Г.

Профіль Г – поєднання дуг із радіусом  $R_{sp}$ . Кут розхилу центральної дуги –  $\theta$  (див. рис. 3).

Для визначеності прийнято: радіус бігової доріжки статорного кільця  $R_{st} = 0,128$  м; радіус поршня  $R_p = 0,03175$  м; поперечний профіль

(рис. 3) [3–5, 22–24]]. Дослідження здійснено із застосуванням комбінованого підходу на основі методів скінченних та граничних елементів [3, 4, 22–24].

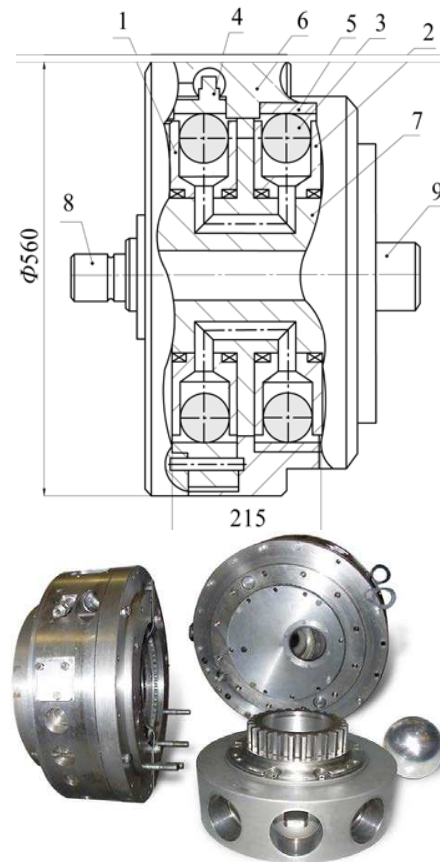


Рисунок 2 - Гідралічна передача ГОП-900 (а) та її окремі частини (б): 1 та 2 – блоки циліндрів (ротори) насоса та гідромотора відповідно; 3 – кульково-поршнева частина; 4 та 5 – статорні кільця насоса та гідромотора відповідно; 6 – корпус; 7 – блок розподільних валів; 8 та 9 – вхідний та вихідний вали

бігової доріжки статорного кільця у площині  $zy$  утворений дугами кіл із радіусами  $R_{sp}$  із кутом спряження  $\theta = \pi/12$ . Модулі пружності матеріалів сталевго поршня та статорного кільця  $E$  прийняті рівними  $2 \cdot 10^{11}$  Па, коефіцієнти Пуассона – 0,3. Притискна сила – 120 кН.

Досліджувалися варіанти:

- радіус  $R_{sp}$ ;  $k = 1, 2, 3$ ;  $R_{sp} = R_1 = 1,05 \cdot R_p$ ;  
 $R_{sp} = R_2 = 1,01 \cdot R_p$ ;  $R_{sp} = R_3 = 0,99 \cdot R_p$ ;  
 - жорсткісні властивості матеріалів поверхневих шарів (тобто залежність величини обтискання  $w^L$  цих шарів від діючого на них тиску  $q$ ) – функції  $f_i$ ;  $l = A, B, C$ ; залежності – на рис. 4 (початкова ділянка наведених на рис. 4 характеристик відповідає контактній жорсткості  $10^{13} \text{ Н/м}^3$ ).

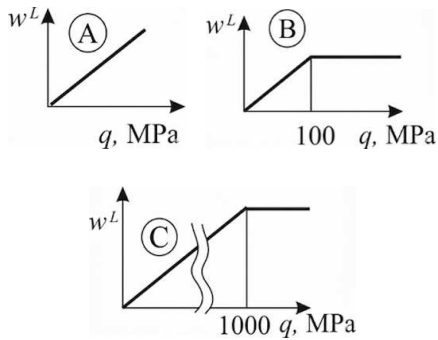


Рисунок 4 - Характеристики матеріалів поверхневих шарів у досліджуваному сполученні

На рис. 5–13 наведені ілюстрації результати здійснених чисельних досліджень у вигляді розподілів контактної тиску (МПа) уздовж довгої осі плями контакту ( $x$ , мм) для притисної сили – 120 кН для деяких варіантів радіусу поперечного перерізу  $R_{sp}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) та жорсткісних характеристик ( $l = A, B, C$ ).

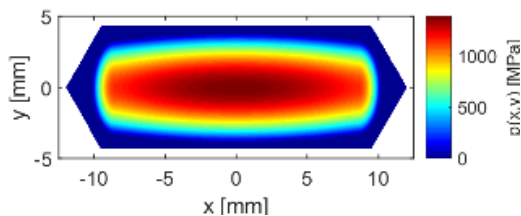


Рисунок 5 – Розподіл контактної тиску (МПа) між кулею і тором для варіанту  $k = 1$  та  $l = A$  за притисної сили 120 кН

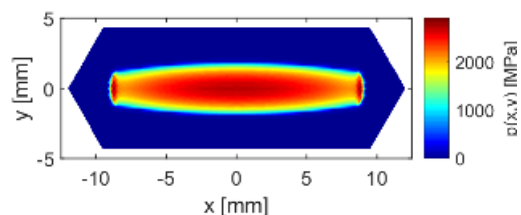


Рисунок 6 - Розподіл контактної тиску (МПа) між кулею і тором для варіанту  $k = 1$  та  $l = B$  за притисної сили 120 кН

Як видно із рис. 5–13, за наявності лінійно-пружного шару (A) між контактуючими тілами область контакту є більшою, ніж для варіантів пружно-жорсткого (B, C). Причому чим більш жорстка характеристика, тим менша область контакту.

З іншого боку, чим менший радіус центральної частини профіля тора Г, тим більше видозмінюється форма області контакту. Так, для

варіанту 1 форма більше схожа до овалу або до криволінійного чотирикутника. Для варіанта 3 – це двозв'язна (або гантелевидна – за підвищених навантажень) область. Для варіанта 2 – перехідний характер між варіантами 1 і 3.

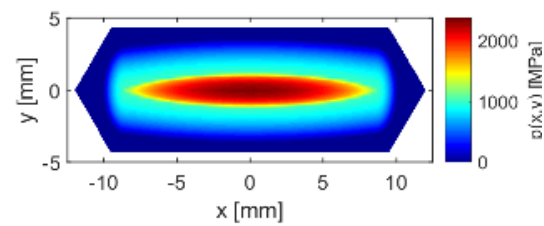


Рисунок 7 – Розподіл контактної тиску (МПа) між кулею і тором для варіанту  $k = 1$  та  $l = C$  за притисної сили 120 кН

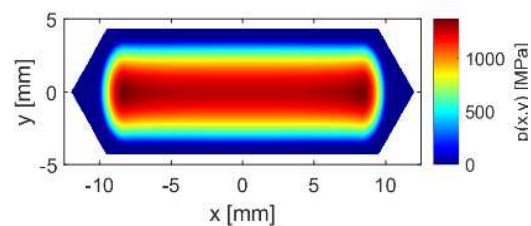


Рисунок 8 – Розподіл контактної тиску (МПа) між кулею і тором для варіанту  $k = 2$  та  $l = A$  за притисної сили 120 кН

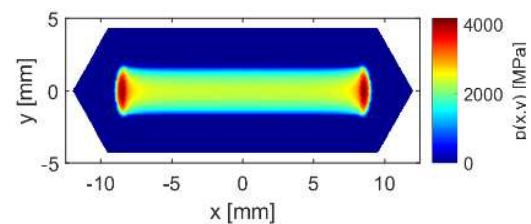


Рисунок 9 – Розподіл контактної тиску (МПа) між кулею і тором для варіанту  $k = 2$  та  $l = B$  за притисної сили 120 кН

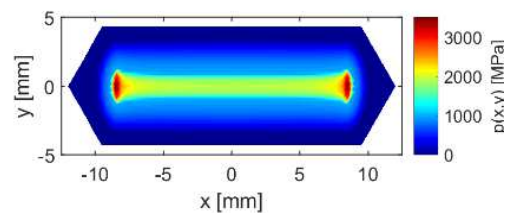


Рисунок 10 – Розподіл контактної тиску (МПа) між кулею і тором для варіанту  $k = 2$  та  $l = C$  за притисної сили 120 кН

Що стосується рівня контактної тиску, то він має тенденцію до набуття деякого більш-менш зниженого рівня у зоні перевищення радіуса дуги профіля тора над радіусом кулі на  $\approx 5\%$ . З іншого боку, чим більш жорсткий проміжний шар між цими тілами, тим вищий рівень контактної тиску.

Отже, результати здійснених дають можливість установити ключові закономірності контактної взаємодії складнопрофільних елементів радіально-поршневих гідрооб'ємних передач. Крім

того, отримані дані створюють наукове підґрунтя для обґрунтування перспективних технічних рішень, спрямованих на суттєве поліпшення експлуатаційних характеристик гідропередач.

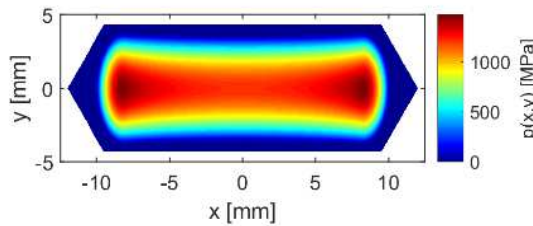


Рисунок 11 – Розподіл контактної тиску (МПа) між кулею і тором для варіанту  $k=3$  та  $l=A$  за притисної сили 120 кН

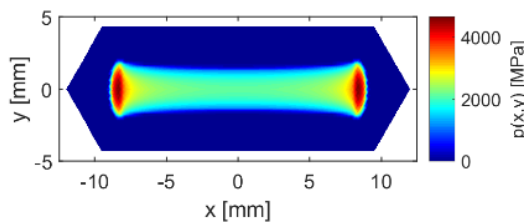


Рисунок 12 – Розподіл контактної тиску (МПа) між кулею і тором для варіанту  $k=3$  та  $l=B$  за притисної сили 120 кН

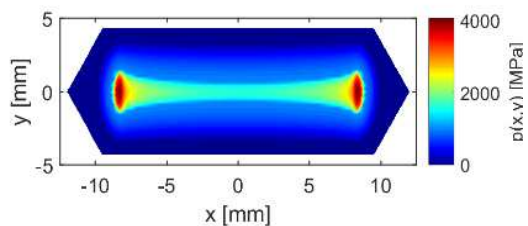


Рисунок 13 – Розподіл контактної тиску (МПа) між кулею і тором для варіанту  $k=3$  та  $l=C$  за притисної сили 120 кН

### Висновки.

1. Розроблено вдосконалену математичну модель для аналізу контактної взаємодії складнопрофільних елементів радіально-поршневої гідрооб'ємних передач, що базується на розвитку та адаптації варіаційного принципу Калькера. Задачу визначення напружено-деформованого стану контактуючих тіл зведено до мінімізації функціонала додаткової роботи. На відміну від традиційних підходів, запропонована модель інваріантна до низки суттєвих геометричних обмежень, а форма поверхонь є варійованою та шуканою величиною. У сукупності це забезпечує можливість здійснення поглибленого й достовірного аналізу взаємодії елементів, а також створює наукове підґрунтя для синтезу перспективних технічних рішень (зокрема, гідропередач для транспортних засобів спеціального призначення) за критеріями міцності.

2. До структури розробленої моделі, окрім геометричних параметрів, інтегровано фізико-

механічні властивості поверхневих шарів матеріалів. Це дає можливість розглядати технологічні рішення щодо обробки поверхонь як повноцінний об'єкт оптимізації нарівні з конструктивними параметрами, що суттєво розширює можливості проектування високонавантажених вузлів.

3. У результаті досліджень установлено закономірності впливу конструктивних і технологічних чинників на розподіл контактної тиску в парі «кульковий поршень — тороїдальна бігова доріжка статорного кільця» радіальної гідропередачі перспективної танкової трансмісії. Доведено, що цілеспрямоване варіювання зазначених параметрів дає можливість забезпечити необхідний рівень міцності складнопрофільних тіл та, відповідно, підвищити експлуатаційні характеристики проєктованих гідропередач.

Зокрема, мова йде про забезпечення підвищеного ресурсу гідропередачі типу ГОП-900.

### Список літератури (References (transliterated))

1. Barber, J. R. Contact Mechanics. Vol. 250, Solid Mechanics and Its Applications. Springer International Publishing. 2019.
2. Popov, V. L., Heß, M., Willert, E. Handbook of Contact Mechanics: Exact Solutions of Axisymmetric Contact Problems. Springer-Verlag. 2019. 347 p.
3. Tkachuk M.M., Hrechka I.P., Loznyi O.S., Grabovskiy A.V., Tkachuk M.A. (2025). Analysis of contact interaction of compound-profile elements of radial-piston hydraulic transmission. *Industrial hydraulics and pneumatics*, no. 2(76), pp. 61-73. <https://doi.org/10.32782/1994-4691-2025-2-76-5>
4. Tkachuk, M., Grabovskiy, A., Tkachuk, M., Hrechka, I., Tkachuk, H. Contact Interaction of Solids of Revolution with Surface Perturbation. In: Cioboată, D. D. (eds) *International Conference on Reliable Systems Engineering (ICoRSE) – 2023*. Springer, Cham. 2023. P. 505–513. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-40628-7\\_41](https://doi.org/10.1007/978-3-031-40628-7_41)
5. Samorodov V., Avrunin G. (2021). Solution of the problem of calculating the leakage working fluid in eccentric gap of the ball piston pair hydraulic fluid power machine. *Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series: Hydraulic machines and hydraulic units*. no. 1, pp. 81–87. <https://doi.org/10.20998/2411-3441.2021.1.10>.
6. Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I., Prokopyshyn I. A., Styahar A. O. (2024). Numerical analysis of contact between elastic bodies in the presence of thin coating and nonlinear winkler surface layers. In: Altenbach H., Bogdanov V., Grigorenko A. Y., Kushnir R. M., Nazarenko V. M., Eremeyev V. A. (eds) *Selected problems of solid mechanics and solving methods. Advanced Structured Materials*. Vol. 204. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-54063-9\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-031-54063-9_9).
7. Prokopyshyn I. I., Styahar A. O. (2022). Numerical analysis of contact of the elastic bodies one of which has a discontinuous thin coating. *Mater Sci*. 57, 734–744. <https://doi.org/10.1007/s11003-022-00602-0>.
8. Prokopyshyn I. I., Styahar A. O. (2021). Investigation of contact between elastic bodies one of which has a thin coating connected with the body through a nonlinear winkler layer by the domain decomposition

- methods. *J Math Sci.* 258, 477–506. <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05562-5>.
9. Serednytska K. I., Martynyak R. M. (2021). Contact of the faces of an interface thermally insulated crack under thermomechanical loading. *Mater Sci.* no. 57, pp. 173–179. <https://doi.org/10.1007/s11003-021-00528-z>.
  10. Prokopyshyn I. I., Shakhno S. M. (2022). Differential-difference iterative domain decomposition methods for the problems of contact of elastic bodies with nonlinear winkler surface layers. *J Math Sci.* no. 261, pp. 41–58. <https://doi.org/10.1007/s10958-022-05736-9>.
  11. Burger Henning, Fabian Forsbach, Valentin L. Popov. (2023). Boundary element method for tangential contact of a coated elastic half-space. *Machines.* Vol. 11, no. 7, pp. 694. <https://doi.org/10.3390/machines11070694>.
  12. Noor M. A., Noor K. I., Rassias M. T. (2025). General variational inequalities and optimization. In: Pardalos P.M., Rassias T.M. (eds) *Geometry and Non-Convex Optimization. Springer Optimization and Its Applications.* Vol. 223. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-87057-6\\_14](https://doi.org/10.1007/978-3-031-87057-6_14).
  13. Solyar T. Ya., Solyar O. I. (2022). Axisymmetric contact problem for half-space with nonspecified areas of interaction, *Mat. Met. Fiz. Mekh. Polya.* Vol. 65, No. 3-4, pp. 178–187 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/mmpmf2022.65.3-4.178-187>; English translation: Solyar T. Y., Soliar O. I. (2025). Axisymmetric contact problem for a half space with nonspecified zones of interaction, *J. Math. Sci.* 287, no. 2, pp. 321–333. <https://doi.org/10.1007/s10958-025-07593-8>.
  14. Yao J., Ren G. (2023). Embedding Kalker’s variational theory into railway vehicle system dynamics and its efficiency improvement. *Vehicle system dynamics.* Vol. 62(4), pp. 932–954. <https://doi.org/10.1080/00423114.2023.2235034>.
  15. Vollebregt E., Six K., Polach O. (2021). Challenges and progress in the understanding and modelling of the wheel–rail creep forces. *Vehicle system dynamics.* Vol. 59(7), pp. 1026–1068. <https://doi.org/10.1080/00423114.2021.1912367>.
  16. Pérez-Ràfols F., Ciavarella M. (2025). Towards a universal scaling for the elastic contact between anisotropic and non-gaussian surfaces. *Tribology Letters.* no. 73, pp. 62. <https://doi.org/10.1007/s11249-025-01976-3>.
  17. Ciavarella M., Pérez-Ràfols F. (2024). Strongly different adhesion reduction for 1D or 2D random fractal roughness, and an extension of the bam model to anisotropic surfaces. *Tribology Letters.* 72, 119. <https://doi.org/10.1007/s11249-024-01916-7>.
  18. Li Q., Lyashenko I. A., Pohrt R., Popov V. L. (2022). Influence of a soft elastic layer on adhesion of rough surfaces. In: Borodich F.M., Jin X. (eds) *Contact problems for soft, biological and bioinspired materials. Biologically-Inspired Systems.* Vol. 15. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-85175-0\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-030-85175-0_5).
  19. He X., Li Q., Popov V. L. (2021). Strength of adhesive contact between a rough fibrillar structure and an elastic body: influence of fibrillar stiffness. *The Journal of Adhesion.* Vol. 98(12), pp. 1820–1833. <https://doi.org/10.1080/00218464.2021.1939017>.
  20. Kniaziev S., Kniazieva H., Subbotina V., Volkov O., Riaboshtan V. (2025). Improving the technology of producing boron and siliconized layers and comparing their properties. *Physics and Chemistry of Solid State.* Vol. 26(2), pp. 436–441. <https://doi.org/10.15330/pcss.26.2.436-441>.
  21. Subbotina V., Bilozerov V., Subbotin O., Barmin O., Hryhorieva S., Pysarska N. (2022). Investigation of the influence of electrolyte composition on the structure and properties of coatings obtained by microarc oxidation. *Physics and Chemistry of Solid State,* no. 23(2), pp. 380–386. <https://doi.org/10.15330/pcss.23.2.380-386>.
  22. Tkachuk M. M., Skripchenko N., Tkachuk M. A., Grabovskiy A. (2018). Numerical methods for contact analysis of complex-shaped bodies with account for non-linear interface layers. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.* 5(7 (95)), 22–31. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.143193>.
  23. Tkachuk M., Grabovskiy A., Tkachuk M., Hrechka I., Sierykov V. (2021). Contact interaction of a ball piston and a running track in a hydrovolumetric transmission. In: Ivanov V., Pavlenko I., Liaposhchenko O., Machado J., Edl M. (eds) *Advances in Design, Simulation and Manufacturing IV. DSMIE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering.* pp. 195–203. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-77823-1\\_20](https://doi.org/10.1007/978-3-030-77823-1_20).
  24. Tkachuk M., Grabovskiy A., Tkachuk M., Hrechka I., Tkachuk H. (2025). Contact interaction of a ball with a toroidal running track with a closely shaped power law profile. In: Tonkonogyi V., Ivanov V., Trojanowska J., Oborskyi G. (eds) *Advanced Manufacturing Processes VI. Interpartner 2024. Lecture Notes in Mechanical Engineering,* pp. 628–638. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-82746-4\\_56](https://doi.org/10.1007/978-3-031-82746-4_56).
  25. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals.* 7th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013. 756 p.

Надійшла (received) 24.04.2026

Стаття прийнята до друку 20.05.2026

Опублікована 29.05.2026.

#### Відомості про авторів (About authors)

**Льозний Олег Сергійович / Loznyi Oleh** – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID : <https://orcid.org/0009-0001-1122-9068>, e-mail: [s1708@tmmsap.org](mailto:s1708@tmmsap.org)

**Ткачук Микола Миколайович / Tkachuk Mykola M.** – доктор технічних наук, старший дослідник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», провідний науковий співробітник кафедри інформаційних технологій та систем колісних і гусеничних машин імені О.О. Морозова; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4753-4267>; e-mail: [m.tkachuk@tmmsap.org](mailto:m.tkachuk@tmmsap.org)

**Бондаренко Олексій Вікторович / Bondarenko Olexsiy** – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри теорії і систем

автоматизованого проектування механізмів і машин; м. Харків, Україна; тел.: (067) 189-97-00; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2693-5301>; e-mail: [avbondko@gmail.com](mailto:avbondko@gmail.com)

**Храмцова Ірина Яківна / Khramtsova Iryna** – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», науковий співробітник, кафедра «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин»; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9506-790X>; e-mail: [iyakhram@gmail.com](mailto:iyakhram@gmail.com)

**Дьоміна Наталя Анатоліївна / Domina Natalia** – кандидат технічних наук, доцент, завідувачка кафедри вищої математики і фізики, Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного, м. Запоріжжя, Україна, e-mail: [natalia.domina@tsatu.edu.ua](mailto:natalia.domina@tsatu.edu.ua); ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1118-1834>

**Марусенко Світлана Іванівна / Marusenko Svitlana** – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», науковий співробітник кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1340-5491>; e-mail: [tma@tmmsaprg.org](mailto:tma@tmmsaprg.org).

**Кохановська Ольга Владиславівна / Kokhanovska Olga** – провідний інженер, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», кафедра «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів та машин»; м. Харків, Україна; тел.: (057)7076901; e-mail: [olgavk12@gmail.com](mailto:olgavk12@gmail.com)

**Бондаренко Людмила Миколаївна / Bondarenko Liudmyla** – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», провідний інженер кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1340-5491>; e-mail: [tma@tmmsaprg.org](mailto:tma@tmmsaprg.org).