

**О. І. ЗІНЧЕНКО**

## **МОДЕЛЬ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТОРСІОННОГО ВАЛА СИСТЕМИ ПІДРЕСОРЮВАННЯ ЛЕГКОЇ БРОНЬОВАНОЇ МАШИНИ ЗІ СПРЯЖЕНИМИ ДЕТАЛЯМИ**

У роботі описана модель контактної взаємодії торсіонного вала системи підресорювання легкої броньованої машини зі спряженими деталями. Вона будується на основі варіаційної постановки задачі аналізу міцності та довговічності торсіонних валів систем підресорювання легких броньованих машин. При цьому враховуються два значущих чинники: контактна взаємодія торсіонного вала зі спряженими деталями, з одного боку, та пружно-пластичний напружено-деформований стан, – з іншого боку. Перший чинник важливий із причини того, що основний силовий фактор (крутний момент) створюється за рахунок тиску на робочих поверхнях шліцьової головки торсіонного вала. Другий чинник важливий тим, що саме завдяки інтенсивним пластичним деформаціям на технологічних операціях заневолення торсіонних валів у їх тілі виникає сприятливий розподіл залишкових напружень. Важливо, що ці два чинники впливають один на одного. Особливо це відчутно у головці торсіонного вала. Для того, щоби обидва зазначені чинники врахувати у єдиній математичній моделі, була залучена та адаптована теорія варіаційних нерівностей. Задача зводиться до проблеми мінімізації функціоналу повної енергії системи на множині переміщень, які задовольняють умовам непроникнення контактуючих тіл одне в одного. Таким чином, у єдиній моделі ув'язується і структурна, і фізична нелінійність. У цьому полягає перевага розробленого підходу. Можливості моделювання проілюстровані на тестових задачах.

**Ключові слова:** торсіонний вал; головка торсіонного вала; система підресорювання; теорія варіаційних нерівностей; міцність; пластичні деформації; контактний тиск; заневолення

**O.I. ZINCHENKO**

## **MODEL OF CONTACT INTERACTION OF THE TORSION SHAFT OF THE SUSPENSION SYSTEM OF A LIGHT ARMORED VEHICLE WITH CONNECTED PARTS**

The paper describes a model of contact interaction of a torsion shaft of a light armored vehicle suspension system with mating parts. It is built on the basis of a variational formulation of the problem of analyzing the strength and durability of torsion shafts of light armored vehicle suspension systems. In this case, two significant factors are taken into account: the contact interaction of the torsion shaft with the mating parts, on the one hand, and the elastic-plastic stress-strain state, on the other hand. The first factor is important because the main force factor (torque) is created by the pressure on the working surfaces of the splined head of the torsion shaft. The second factor is important because it is precisely due to the intense plastic deformations during the technological operations of enslaving torsion shafts that a favorable distribution of residual stresses occurs in their body. It is important that these two factors influence each other. This is especially noticeable in the torsion shaft head. In order to take both of these factors into account in a single mathematical model, the theory of variational inequalities was involved and adapted. The problem is reduced to the problem of minimizing the functional of the total energy of the system on the set of displacements that satisfy the conditions of non-penetration of contacting bodies into each other. Thus, both structural and physical nonlinearity are combined in a single model. This is the advantage of the developed approach. The modeling capabilities are illustrated in test problems.

**Keywords:** torsion shaft; torsion shaft head; suspension system; variational inequality theory; strength; plastic deformations; contact pressure; scragging

**Вступ.** У роботах [1–3] зазначається, що при обґрунтуванні проектних і технологічних рішень торсіонних валів (ТВ) систем підресорювання (СП) легких броньованих машин (ЛБМ) на перший план виступають проблеми багатоваріантних досліджень напружено-деформованого стану (НДС) та контактної взаємодії цих валів зі спряженими деталями. При цьому бажано розробити єдину математичну модель, у якій ці два чинники враховуються сумісно. На це спрямована ця робота.

**Аналіз методів досліджень контактної взаємодії та напружено-деформованого стану елементів машинобудівних конструкцій.** Під час проектування елементів машин актуальною є проблема створення методів розв'язання задач визначення НДС з урахуванням контактної взаємодії. Контактні процеси, що виникають при взаємодії елементів машинобудівних конструкцій, зумовлені сукупністю складних фізико-механічних явищ. Через різноманіття форм їх прояву виникає потреба у формуванні комплексного підходу до розв'язання науково-дослідних задач у цій сфері. Відповідні моделі та методи аналізу повинні враховувати як фізичну, так і структурну нелінійність матеріалів. Особливої уваги потребує визначення властивостей нових матеріалів на мікроструктурному рівні як у поверхневих шарах, так і в об'ємі. Таким чином, ключовим є формування обґрунто-

ваної моделі контактної взаємодії та НДС елементів машинобудівних конструкцій.

Особливо важливою є фізично адекватна та математично коректна постановка задач аналізу НДС елементів військових колісних і гусеничних машин з урахуванням контактної взаємодії тіл, а саме, ТВ СП легкої броньованої машини зі спряженими деталями

Дослідження механізмів контактної взаємодії ускладнюється обмеженою доступністю зони контакту для безпосереднього експериментального контролю, у зв'язку з чим практичні дослідження становлять неабиякі труднощі [4, 5].

Відомі методи досліджень [6–9] не забезпечують універсального та повного розв'язання задач контактної взаємодії з урахуванням багатьох експлуатаційних чинників, а аналіз літературних джерел свідчить про наявність протиріччя між зростаючими потребами промислової практики у точних моделях контактної взаємодії та обмеженими можливостями існуючих теорій. При цьому особливої уваги в силу своєї високонавантаженості потребують дослідження ТВ, які є пружними елементами ходової частини гусеничних машин, для яких характерні складні напружені стани та підвищені вимоги до втомної довговічності.

© О. І. Зінченко, 2026

Установлено, що виникнення пластичних деформацій на мікрорівні може спричинити розвиток тріщин і макроруйнування, а отже дослідження розподілу контактних напружень і НДС торсіонних валів є важливим етапом їх проектування.

Результати експериментальних досліджень підтверджують істотний вплив технологічних залишкових напружень, що формуються в процесі механічної та термічної обробки, на циклічну міцність і довговічність ТВ. Загальним висновком є те, що традиційні технологічні процеси не гарантують формування оптимального напруженого стану поверхневих шарів, що зумовлює необхідність застосування методів поверхнево-пластичної деформації, зокрема обкочування роликками [10, 11].

Таким чином, подальший розвиток і адаптація пружно-пластичних моделей контактної взаємодії з урахуванням реальних умов навантаження є актуальним науково-практичним завданням, особливо для високонавантажених елементів типу торсіонних валів спеціальної техніки. Це становить *мету роботи*.

**Математична та чисельна моделі контактної взаємодії торсіонного вала зі спряженими деталями.** При формуванні математичної моделі НДС торсіонного валу СП ЛБМ необхідно задовольняти двом конкуруючим вимогам: по-перше, достатня міра адекватності задля відтворення основних характерних рис процесу, який досліджується; по-друге, – задовільна ефективність при чисельних дослідженнях, причому у вигляді багатоваріантних розрахунків.

Перша із зазначених вимог призводить зазвичай до потреби в ускладненні моделі, що будується. Дійсно, задача визначення НДС ТВ, по-перше, фізично, а по-друге, – структурно нелінійна. Крім того, цей шуканий НДС суттєво залежить від історії навантаження. Отже, якщо підходити до розв'язання задачі традиційними способами, то це призведе до нашарування низки процедур, що враховують нелінійності різної природи. А це одразу ж позначиться на термінах та обсягах обчислювальних ресурсів, що потребуються. Відтак, друга із перелічених критеріальних вимог не задовольняється.

Таким чином, необхідно розробити комплексну математичну модель, яка би, по-перше, природним чином урахувала нелінійності різного типу в єдиному узагальненому формулюванні, а, по-друге, також природним чином давала можливість ефективної чисельної реалізації.

Зазначеним вимогам можна задовольнити, спираючись на поєднання та розвиткові двох потужних математичних апаратів: I – теорії течії із співвідношеннями інкрементального типу для опису пружно-пластичного деформування матеріалу ТВ; II – теорії варіаційних нерівностей, адаптованій до покрокового опису при аналізі контактної взаємодії ТВ зі спряженими деталями.

Відповідно, вихідна задача зводиться до проблеми мінімізації на кожному кроці прирощення навантаження  $\Delta f$  функціонала повної енергії системи (зокрема, досліджуваного ТВ) [12]:

$$I(\Delta u(P), \Delta u(P)) = \frac{1}{2} \int_{(\Omega)} \Delta \sigma_{ij}(P) \cdot \Delta \varepsilon_{ij}(P) \cdot d\Omega - \int_{(S)} \Delta f_i(P) \cdot \Delta u_i(P) \cdot ds \rightarrow \min, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

де  $\Delta u(P)$ ,  $\Delta \sigma(P)$ ,  $\Delta \varepsilon(P)$  – прирощення компонент вектора переміщень і тензорів напружень та деформацій відповідно,

$\Omega$  – область простору, який займає ТВ,

$S$  – границя області  $\Omega$ .

Тут  $u_i(P) = u_i(r, P)$ ,  $\sigma_{ij}(P) = \sigma_{ij}(r, P)$ ,

$\varepsilon_{ij}(P) = \varepsilon_{ij}(r, P)$ ,

де  $r$  – радіус-вектор довільної точки із компонентами  $r = \{x_1, x_2, x_3\}^T$ ;

$x_i$  – декартові координати у обраній системі координат.

У (1) та далі  $P$  – це масив параметрів, що описує досліджуваний об'єкт.

Слід зазначити, що у випадку контакту декількох тіл  $\Omega = \bigcup_{\gamma} \Omega_{\gamma}$ .

Також слід зазначити, що у (1) важливою є залежність:

$$\Delta \sigma_{ij}(P) = C_{ijkl}(P) \cdot \Delta \varepsilon_{ijkl}(P), \quad (2)$$

яка описує лінеаризовану залежність на кожному кроці навантажень між компонентами тензора напружень та деформацій. Тут у компонентах тензора модулів жорсткості  $C_{ijkl}$  міститься інформація про властивості матеріалу у довільній точці у вигляді функції від поточного НДС та його історії (див. відповідні співвідношення (1), (2) [13]).

Важливим аспектом моделі, що розроблена, є те, що функціонал  $I$  в (1) мінімізується не безумовно, а на множині:

$$K(P) = \left\{ \Delta u(P) : u_v^{(\alpha)} + \Delta u_v^{(\alpha)} + u_v^{(\beta)} + \Delta u_v^{(\beta)} \leq \delta^{(\alpha, \beta)} \right\}. \quad (3)$$

Тут, на відміну від традиційного підходу теорії варіаційних нерівностей [14, 15], умови непроникнення точок спряжених тіл  $\alpha$  і  $\beta$  подані у вигляді нерівностей (3), які можна записати у вигляді:

$$\Delta u_v^{(\alpha)} + u_v^{(\beta)} \leq \bar{\delta}^{(\alpha, \beta)}. \quad (4)$$

У (3), (4)  $u_v(P)$  та  $\Delta u_v(P)$  – нормальні переміщення точок контактуючих поверхонь тіл  $\alpha$  і  $\beta$ , а  $\delta^{(\alpha, \beta)}$  – початковий зазор між цими тілами. Вигляд нерівності (4) подібний до традиційної умови непроникнення [14, 15], проте із модифікованим зазором  $\bar{\delta}^{(\alpha, \beta)}$ , який враховує історію процесу вибирання зазору на попередніх етапах навантаження.

Побіжно варто зазначити, що у ході мінімізації  $I$  визначається також і розподіл контактної тиску  $q$ .

Отже, співвідношення (1)–(4) містять у загальному вигляді покроковий опис НДС ТВ систем підресорювання ЛБМ. Важливо, що він зводить вихідну задачу до послідовності задач про контактну взаємодію пружних неоднорідних анізотропних тіл. При цьому у (2) «зашито» інформацію про історію розвитку пластичних деформацій, а у (4) – про історію розвитку контактної взаємодії.

Інший аспект проблеми, як уже зазначалося, – чисельна ефективність методів досліджень задач, що сформована. Потенційно, ця ефективність може бути забезпечена якраз структурою самої математичної моделі (1)–(4). Проте постає інша проблема, яка впливає із необхідності здійснення багатоваріантних розрахунків НДС ТВ. Як правило, у сучасних умовах для цього застосовуються чисельні методи, зокрема, метод скінченних елементів (МСЕ) [16]. Разом із тим, цей метод не адаптований до варіювання нечисельних параметрів. Але ж у випадку, що досліджується, варіюваною є діаграма деформування матеріалу ТВ, яка є певною кривою у координатах " $\sigma - \varepsilon$ " [17], тобто не зводиться до однієї або декількох величин.

Для усунення протиріччя, що сформувалося, ефективним є поєднання, адаптація та розвиток чисельного МСЕ, з одного боку, та методу узагальненого параметричного моделювання процесів і станів у складних та надскладних механічних системах [18]. Відповідно, згідно із МСЕ шукані розподіли величин  $\Delta u(P)$  подаються у вигляді:

$$\Delta u(P) = \sum_k a_k \cdot \varphi_k, \quad (5)$$

де  $a_k$  – невизначені параметри,

$\varphi_k$  – базисні функції МСЕ [16].

Тоді (1), (2) перетворюються на задачу квадратичного програмування [19]:

$$I^{\wedge} = (a_k, a_k) \rightarrow \min, \quad I(a_k) \geq \bar{\delta}, \quad (6)$$

де  $I^{\wedge}$  – квадратична форма, яка апроксимує (1), а  $I$  – лінійний оператор, що апроксимує (4).

Проте слід зазначити, що досліджуваний об'єкт є не одиничним: передбачається дослідити широку множину ТВ, наприклад, із різними варіюваними діаграмами деформування його матеріалу. Задля моделювання такої плинності та змінюваності об'єкта досліджень вводиться його узагальнене параметричне моделювання:

$$P = \bigcup_r p_r, \quad (7)$$

де  $P$  – множина узагальнених параметрів із компонентами  $p_r$ . Наприклад, це може бути та ж згадана вище діаграма деформування матеріалу.

Спираючись на (7), в усі попередні співвідношення в (1)–(6) можна ввести їх параметричну залежність від  $P$ . І тоді у підсумку, наприклад, задача (6) набуває вигляду:

$$I^{\vee} = (P, a_k, a_k) \rightarrow \min, \quad I^{\vee}(P, a_k) \geq \bar{\delta}. \quad (8)$$

Тут  $I^{\vee}$  та  $I^{\wedge}$  – ті ж  $I^{\wedge}$  та  $I$ , що і у (6), проте із інтегрованими параметричними залежностями від  $P$ .

Важливою обставиною, як зазначалося у [18], є те, що в силу зазначеної узагальненості та довільності  $P$  не варто будувати якусь універсальну процедуру опису будь-якого досліджуваного об'єкта. Проте для певного класу об'єктів можливо побудувати таку процедуру. Вона є зовнішньою відносно загальної процедури розв'язання задач за МСЕ. Тобто, передбачається створення спеціальних програмних модулів, які за певним алгоритмом варіюють той чи інший параметр  $p_r$  (або їх сукупність) та постачають у програмний комплекс, що реалізує МСЕ, у відповідному форматі вихідні дані про властивості досліджуваного об'єкта. Цим самим поєднуються суперечливі вимоги та конкуруючі критерії: автоматизація – точність, якість – оперативність тощо.

Отже, удалося забезпечити ефективність розв'язання задач чисельного визначення НДС ТВ із урахуванням контактної взаємодії при варіюванні властивостей досліджуваного об'єкта, зокрема, діаграми деформування його матеріалу.

У цілому побудована комплексна узагальнена математична модель НДС ТВ систем підресорювання ЛБМ та методи досліджень задовольняють усім сформульованим вимогам, тобто адекватності та ефективності. Це дає можливість розв'язувати із застосуванням розроблених моделей та методів прикладні задачі стосовно ТВ СП, наприклад, машин серії БТР-3 та БТР-4.

**Спеціалізований програмно-моделний комплекс (СПМК) для аналізу напружено-деформованого стану торсійних валів систем підресорювання легких броньованих машин.** Розглянемо програмну реалізацію розроблених моделей та методів дослідження напружено-деформованого стану ТВ систем підресорювання ЛБМ.

Із метою розроблення інструменту чисельної реалізації створених моделей створено СПМК «Торсіон-ЛБМ». Його структура наведена на рис. 1.

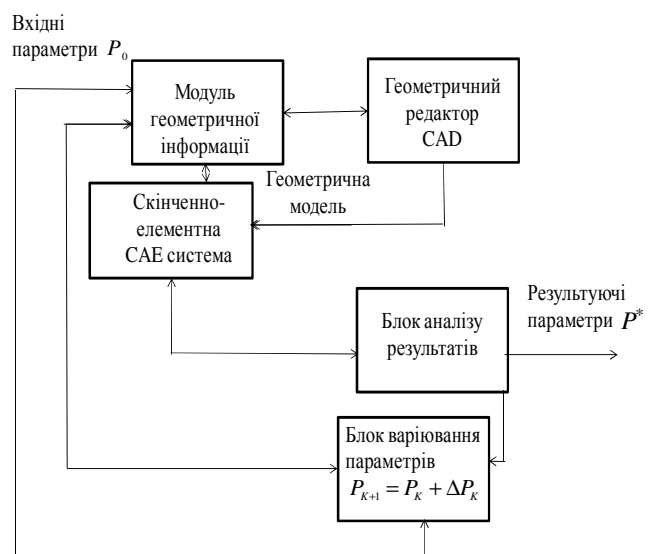


Рисунок 1 – Структура СПМК «Торсіон-ЛБМ»

Зокрема, при реалізації структури, наведеної на рис. 1, можливе задане, стохастичне або цілеспрямоване варіювання діаграми деформування матеріалу ТВ.

Окрім чисельних параметрів  $\sigma_T, \sigma_B, \delta$  (межа плинності, тимчасовий опір, межа відносного подовження при розриві), варіюваним є вигляд кривої  $\Gamma$ , яка визначає ділянки течії та зміцнення матеріалу ТВ (рис. 2). Її вигляд залежить від хімічного складу, мікроструктури, виду та інтенсивності термічної обробки тощо. При цьому вплив того чи іншого із перелічених чинників має характер поєднання відомих – недостатньо відомих, детермінованих – стохастичних, бажаних – небажаних тенденцій, причому у їх плинному поєднанні. Більш строго регламентуються саме обмеження на хімічний склад матеріалів та параметри  $\sigma_T, \sigma_B, \delta$ .

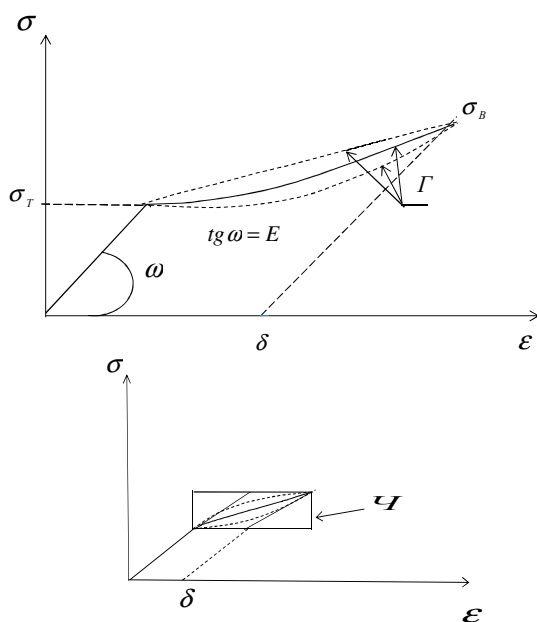


Рисунок 2 – Схема варіювання діаграми деформування матеріалу торсійного валу

Таким чином, якщо згадану криву апроксимувати розкладанням

$$\sigma = \sum_{\theta} \mu_{\theta} \cdot \psi_{\theta}, \quad (9)$$

де  $\mu_{\theta}$  – певні коефіцієнти,

$\psi_{\theta}$  – деякі базисні функції, то шляхом варіювання  $\mu_{\theta}$  можна варіювати і криву  $\Gamma$ , а, отже, заповнити чотирикутну область  $\mathcal{C}$  сімейством кривих.

Якщо  $\sigma_T, \sigma_B, \delta$  – задані, то  $\mathcal{C}$  – фіксована і задає область варіювання кривих  $\Gamma$ .

**Методи дискретизації задачі аналізу технологічного процесу заневолювання та експлуатаційних навантажень торсійних валів систем підресорювання легких броньованих машин.** У роботах [20–28] викладено загальний підхід до задач аналізу міцності та довговічності елементів СП ЛБМ та синтезу їхніх прогресивних

технічних рішень за цими критеріями. Зокрема, для розв'язання задач аналізу НДС ТВ систем підресорювання ЛБМ розроблено удосконалену варіаційну постановку, яка враховує структурну та фізичну нелінійності. Тобто, на кожному кроці розв'язання відбувається пошук екстремуму функціоналу повної енергії системи контактуючих тіл за виконання умов непроникнення тіл одне в одне та за пружно-пластичного деформування їхніх матеріалів.

При цьому для аналізу НДС тіл такої складної форми як ТВ, необхідно залучати чисельні методи. Тоді шукані змінні та їхні прирощення подаються у вигляді:

$$U(\bar{n}) = \sum_D \chi_D \cdot z_D(\vec{r}) \quad (10)$$

де  $\chi_D$  – елементи масиву шуканих коефіцієнтів,

$z_D$  – деякі базисні функції,

$D$  – індексний масив,

$r$  – радіус-вектор точок у області, яку займають досліджувані тіла.

Тоді, враховуючи структуру функціоналів, що мінімізуються, на кожному кроці пошуку розв'язку маємо їх апроксимацію:

$$P_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} A_{ij} \chi_i \chi_j - \sum_i B_i \chi_i \rightarrow \min. \quad (11)$$

Тут  $P_i$  – дискретний аналог квадратичного функціонала, що мінімізується,  $A_{ij}$  – коефіцієнти, що обчислюються при підстановці у ці функціонали як білінійні форми базисних функцій  $z_i, z_j$ ,  $B_i$  – коефіцієнти лінійних форм у функціоналах при підстановці у них базисних функцій  $z_i$ .

Мінімізація  $P_i$  здійснюється не безумовно, а на множині обмежень (апроксимують умови непроникнення (3)–(5)):

$$G_i \cdot \chi_i \leq \Delta_i, \quad (12)$$

де  $G_i$  – апроксимаційна матриця в умовах непроникнення, а  $\Delta_i$  – масив апроксимації поточних зазорів між контактуючими тілами.

Тут  $\Delta_i \equiv 0$  для номінально конгруентних контактуючих поверхонь, а надалі

$$\Delta_{i+1} = \Delta_i + \sum_{j=1}^i \bar{\Delta}_j, \quad (13)$$

$$\text{де} \quad \bar{\Delta}_i = \sum_{j=1}^i G_j \cdot \chi_j. \quad (14)$$

– прирощення актуального зазору на  $i$ -му кроці розв'язання.

Слід відзначити, що:

1) сформовані задачі є послідовністю задач квадратичного програмування [19];

2) на відміну від традиційних задач квадратичного програмування [19], система односторонніх обмежень є змінюваною та залежною від зміни

розв'язків на попередніх кроках;

3) враховуючи параметричну залежність усіх компонент у наведених співвідношеннях від узагальнених параметрів  $P$ , і дискретизовані їхні варіанти теж будуть параметрично залежати від цих  $P$ ;

4) при застосуванні МСЕ [16]  $A_{ij}$  – компоненти матриці жорсткості конструкції, причому, враховуючи пп.1) – 3),  $A_{ij} = A_{ij}(P)$ ;

5) аналогічно, у разі застосування МСЕ масив вузлових невідомих із компонентами –  $\chi_i = \chi_i(P)$ .

Отже, у цілому дискретна постановка аналізу НДС «спадкує» від континуальної постановки якраз основну принципову методологічну новизну – узагальнену параметризацію. При цьому виникає кожен раз при зміні об'єкту аналізу проблема створення узагальненої параметричної дискретної моделі саме поточного об'єкта. Стосовно ТВ систем підресорювання ЛБМ важливо виокремити множину потенційно варійованих параметрів: геометричну форму та розміри головки ТВ (ГТВ), стебла ТВ (СТВ) та галтельного переходу (ГП), властивості його матеріалу, технологічні режими оброблення та експлуатаційні режими тощо.

Таким чином, розроблено та описано нову дискретну постановку, яка відрізняється саме узагальненим параметричним описом об'єкту досліджень, що дає можливість, із одного боку, гнучко змінювати сам об'єкт, а, з іншого, здійснювати цілеспрямований пошук прогресивних технічних рішень за критеріями міцності та довговічності.

**Дослідження розподілів контактного тиску і напружено-деформованого стану елементів конструкцій торсіонних валів підвіски бойових броньованих машин за варіювання властивостей матеріалів, форми контактуючих поверхонь та із урахуванням пружно-пластичного деформування.** Як зазначається у [1], основну складність становить пружно-пластичне деформування тіла вала із урахуванням контактної взаємодії зі спряженими деталями (контактує ГТВ із шлицьовою втулкою (ШВ), і саме цей контакт передає крутний момент на вал). Таким чином, має місце фізична та структурна нелінійності. При цьому контактна взаємодія та НДС ТВ суттєво залежать від історії навантаження. Відомим фактом є те, що на етапі виготовлення торсіонний вал проходить технологічну операцію подвійного заневолювання. Відповідно, будемо мати відчутний вплив форми поверхонь у контактному спряженні ГТВ із ШВ.

Як зазначено у [1], для розрахунків обирається ТВ, близький за розмірами та конструктивним виконанням до аналогічних елементів у системі підресорювання ЛБМ типу БТР-80 та йому подібних. Номінальна форма та розміри ТВ наведені на рис. 3.

На рис. 4 представлена діаграма деформування ТВ, на рис. 5 – типовий сектор ТВ, на рис. 5, в – умови антисиметрії, викликані закручуванням муфти на ГТВ. ТВ навантажується завдяки його

повороту на певний кут закручування  $\gamma$ .

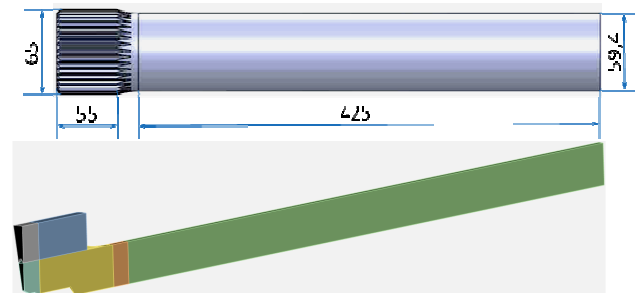


Рисунок 3 – Геометрична модель торсіонного валу, що досліджується, зі зрізом на головці (симетрична половина) [коротка]

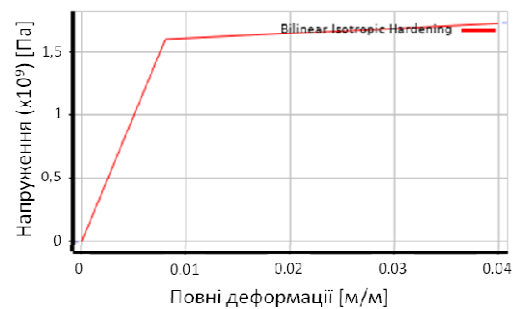


Рисунок 4 – Діаграма деформування матеріалу торсіонного вала

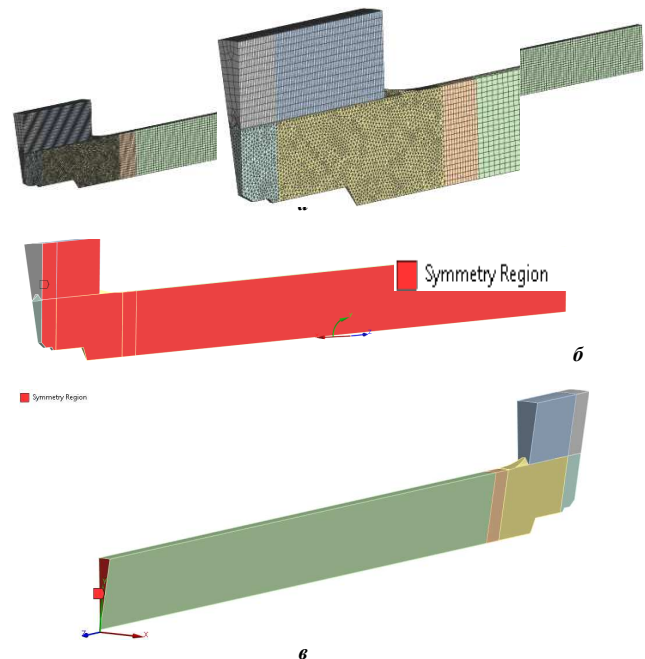


Рисунок 5 – Розрахункова схема сектора торсіонного валу:

- а – скінченно-елементна модель (220 тис. вузлів),
- б – циклосиметрична постановка (умови симетрії),
- в – умови анти симетрії

Номінальна форма спряження «ГТВ – ШВ» передбачає повне співпадіння їх робочих поверхонь у зоні контакту. Порушення (збурення) форми контактуючих поверхонь моделюється шляхом видалення матеріалу вздовж осьового напрямку, яке в проекції описується дугою кола радіуса  $R$

(рис. 6). Величина зрізу на головці торсіонного валу змінюється в діапазоні  $\Delta R \in [0;0,1;0,2;0,3;0,4;0,5]$  мм, що дозволяє дослідити вплив геометричних відхилень на характер контактної взаємодії.

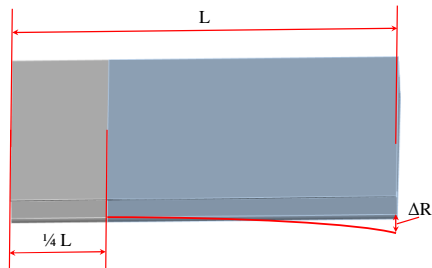


Рисунок 6 – Збурення форми зазору у спряженні «головка торсіонного валу – шліцьова втулка»

У результаті такого моделювання зазор між робочими поверхнями головки торсіонного валу та шліцьової втулки набуває ненульового значення. При цьому величина зазору зростає в напрямку гальтельного переходу, який є перехідною зоною між головкою торсіонного валу та його стеблом. Як і у роботі [1], обираються такі характеристики матеріалу ТВ: модуль пружності  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па, коефіцієнт Пуасона  $\nu = 0,3$ , межа плинності  $\sigma_T = 1600$  МПа, дотичний модуль  $E_K = 4000$  МПа.

Обирається наступна історія навантаження: два етапи – закрутка I  $\tau \in [0;1]$  (закручування на кут  $20^\circ$ ) та зняття навантаження II – розвантаження  $\tau \in [1;2]$ , а також  $\tau$  – параметр умовного «часу» та розподіл крутного моменту,  $\tau_0$  – момент, що відповідає нульовому крутному моменту (рис. 7).

Розглядаються такі варіанти:

№ 1 – номінальний (нульовий зазор контакту);

№ 2 – змінний початковий зазор із коловим розподілом та максимальною величиною його

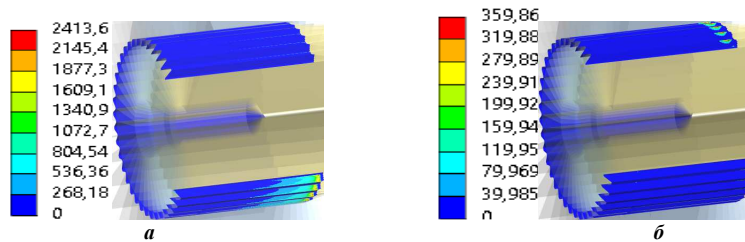


Рисунок 8 – Розподіл контактної тиску (варіант № 1) у головці торсіонного валу, МПа: а –  $\tau = 1$  с; б –  $\tau = \tau_0 = 1,695$  с

Таблиця 1 – Розподіл компонент напружено-деформованого стану (варіант № 1) у торсіоні

$\tau, c$	Значення	Картинка розподілу (варіант № 1)
<i>еквівалентні напруження за Мізесом у стеблі торсіонного валу, МПа</i>		
1	<ul style="list-style-type: none"> <li>1624,4</li> <li>1455,2</li> <li>1286</li> <li>1116,8</li> <li>947,64</li> <li>778,45</li> <li>609,26</li> <li>440,07</li> <li>270,89</li> <li>101,7</li> </ul>	

стрілки  $\Delta = 100$  мкм;

№ 3 – варіант, подібний до варіанту № 2, проте зі значенням  $\Delta = 200$  мкм;

№ 4 – варіант, подібний до варіанту № 2, проте зі значенням  $\Delta = 300$  мкм;

№ 5 – варіант, подібний до варіанту № 2, проте зі значенням  $\Delta = 400$  мкм;

№ 6 – варіант, подібний до варіанту № 2, проте зі значенням  $\Delta = 500$  мкм.

Результати розрахунків – розподіл еквівалентних напружень за Мізесом у СТВ, еквівалентних пластичних деформацій у ГТВ та у СТВ для всіх варіантів – представлені у табл. 1–6.

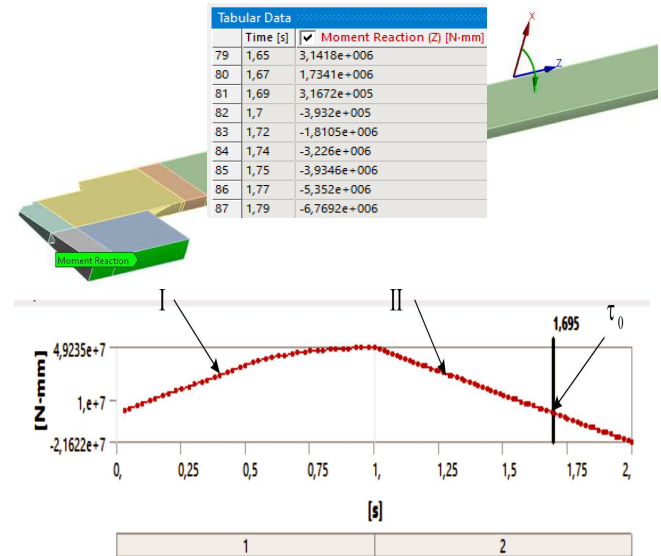
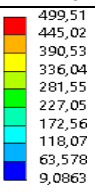
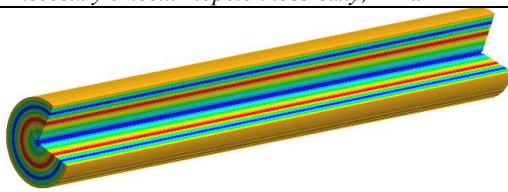
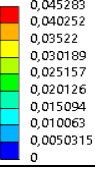
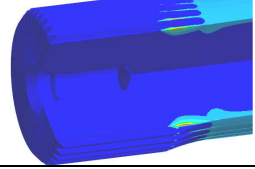
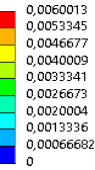
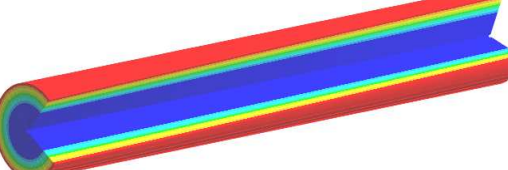


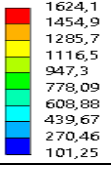
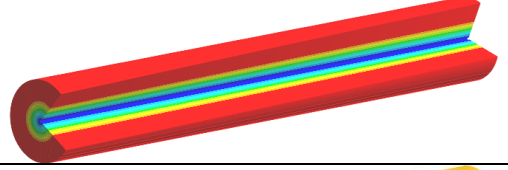
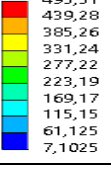
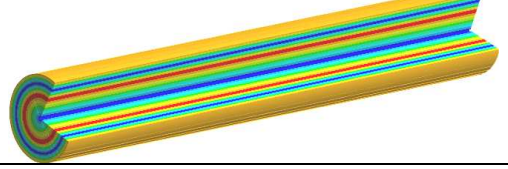
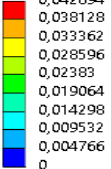
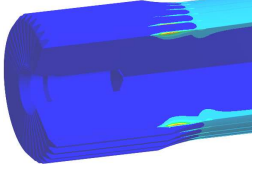
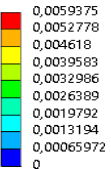
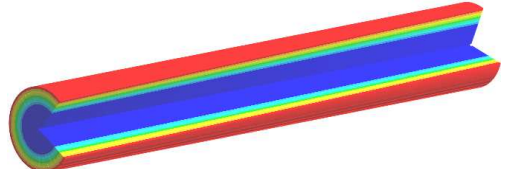
Рисунок 7 – Історія двоетапного навантаження (варіант № 1)

На рис. 8–13 представлені розподіли контактної тиску у ГТВ.

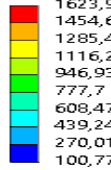
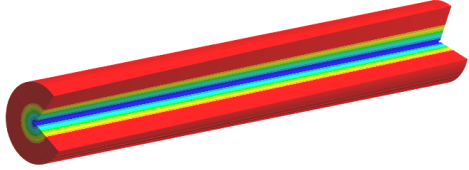
Закінчення табл. 1

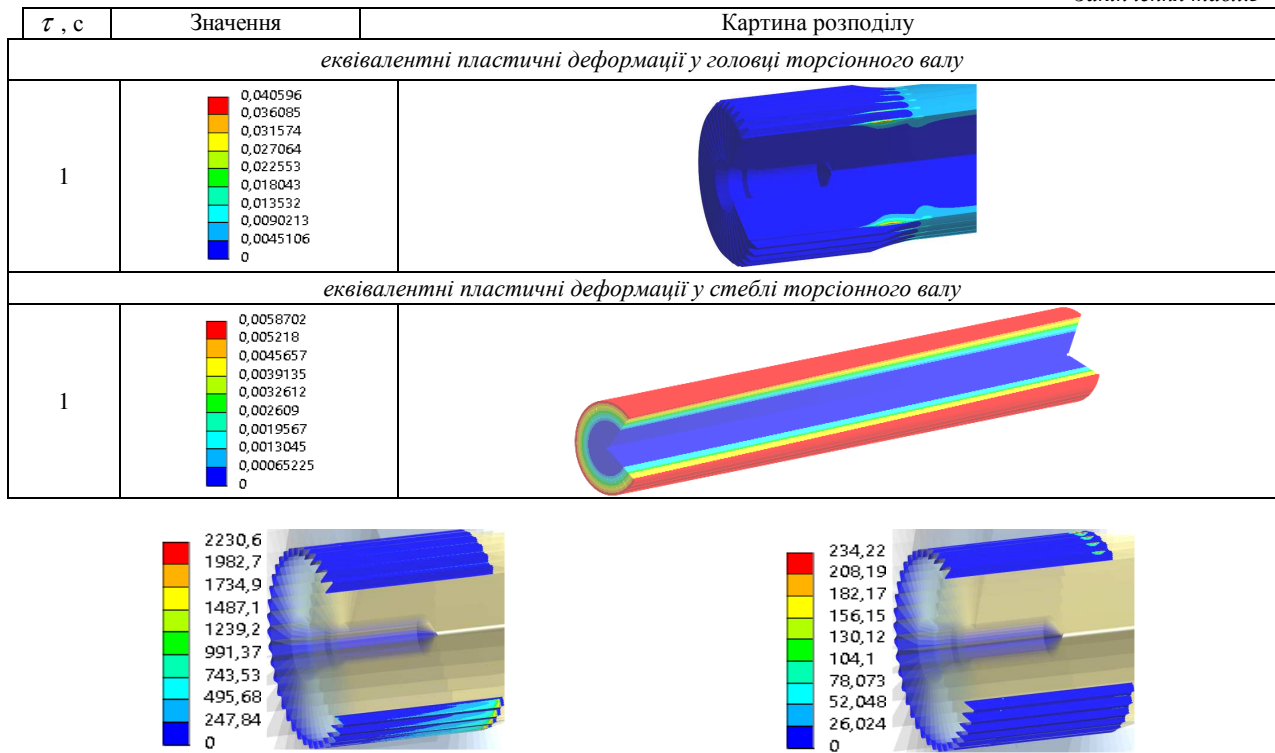
$\tau, \text{с}$	Значення	Картина розподілу (варіант № 1)
<i>еквівалентні напруження за Мізесом у стеблі торсійного валу, МПа</i>		
1,695 ( $\tau_0$ )	 <ul style="list-style-type: none"> <li>499,51</li> <li>445,02</li> <li>390,53</li> <li>336,04</li> <li>281,55</li> <li>227,05</li> <li>172,56</li> <li>118,07</li> <li>63,578</li> <li>9,0863</li> </ul>	
<i>еквівалентні пластичні деформації у головці торсійного валу</i>		
1	 <ul style="list-style-type: none"> <li>0,045283</li> <li>0,040252</li> <li>0,03522</li> <li>0,030189</li> <li>0,025157</li> <li>0,020126</li> <li>0,015094</li> <li>0,010063</li> <li>0,0050315</li> <li>0</li> </ul>	
<i>еквівалентні пластичні деформації у стеблі торсійного валу</i>		
1	 <ul style="list-style-type: none"> <li>0,0060013</li> <li>0,0053345</li> <li>0,0046677</li> <li>0,0040009</li> <li>0,0033341</li> <li>0,0026673</li> <li>0,0020004</li> <li>0,0013336</li> <li>0,00066682</li> <li>0</li> </ul>	

Таблиця 2 – Розподіл компонент напружено-деформованого стану (варіант № 2,  $\Delta = 100$  мкм) у торсії

$\tau, \text{с}$	Значення	Картина розподілу
<i>еквівалентні напруження за Мізесом у стеблі торсійного валу, МПа</i>		
1	 <ul style="list-style-type: none"> <li>1624,1</li> <li>1454,9</li> <li>1285,7</li> <li>1116,5</li> <li>947,3</li> <li>778,09</li> <li>608,88</li> <li>439,67</li> <li>270,46</li> <li>101,25</li> </ul>	
1,699 ( $\tau_0$ )	 <ul style="list-style-type: none"> <li>493,31</li> <li>439,28</li> <li>385,26</li> <li>331,24</li> <li>277,22</li> <li>223,19</li> <li>169,17</li> <li>115,15</li> <li>61,125</li> <li>7,1025</li> </ul>	
<i>еквівалентні пластичні деформації у головці торсійного валу</i>		
1	 <ul style="list-style-type: none"> <li>0,042894</li> <li>0,038128</li> <li>0,033362</li> <li>0,028596</li> <li>0,02383</li> <li>0,019064</li> <li>0,014298</li> <li>0,009532</li> <li>0,004766</li> <li>0</li> </ul>	
<i>еквівалентні пластичні деформації у стеблі торсійного валу</i>		
1	 <ul style="list-style-type: none"> <li>0,0059375</li> <li>0,0052778</li> <li>0,004618</li> <li>0,0039583</li> <li>0,0032986</li> <li>0,0026389</li> <li>0,0019792</li> <li>0,0013194</li> <li>0,00065972</li> <li>0</li> </ul>	

Таблиця 3 – Розподіл компонент напружено-деформованого стану (варіант № 3,  $\Delta = 200$  мкм) у торсії

$\tau, \text{с}$	Значення	Картина розподілу
<i>еквівалентні напруження за Мізесом у стеблі торсійного валу, МПа</i>		
1	 <ul style="list-style-type: none"> <li>1623,9</li> <li>1454,6</li> <li>1285,4</li> <li>1116,2</li> <li>946,93</li> <li>777,7</li> <li>608,47</li> <li>439,24</li> <li>270,01</li> <li>100,77</li> </ul>	



$a - \tau = 1 c; b - \tau = \tau_0 = 1,695 c$

Рисунок 9 – Розподіл контактної тиску (варіант № 2) у головці торсійного валу, МПа

Таблиця 4 – Розподіл компонент напружено-деформованого стану (варіант № 4,  $\Delta = 300 \text{ мкм}$ ) у торсії

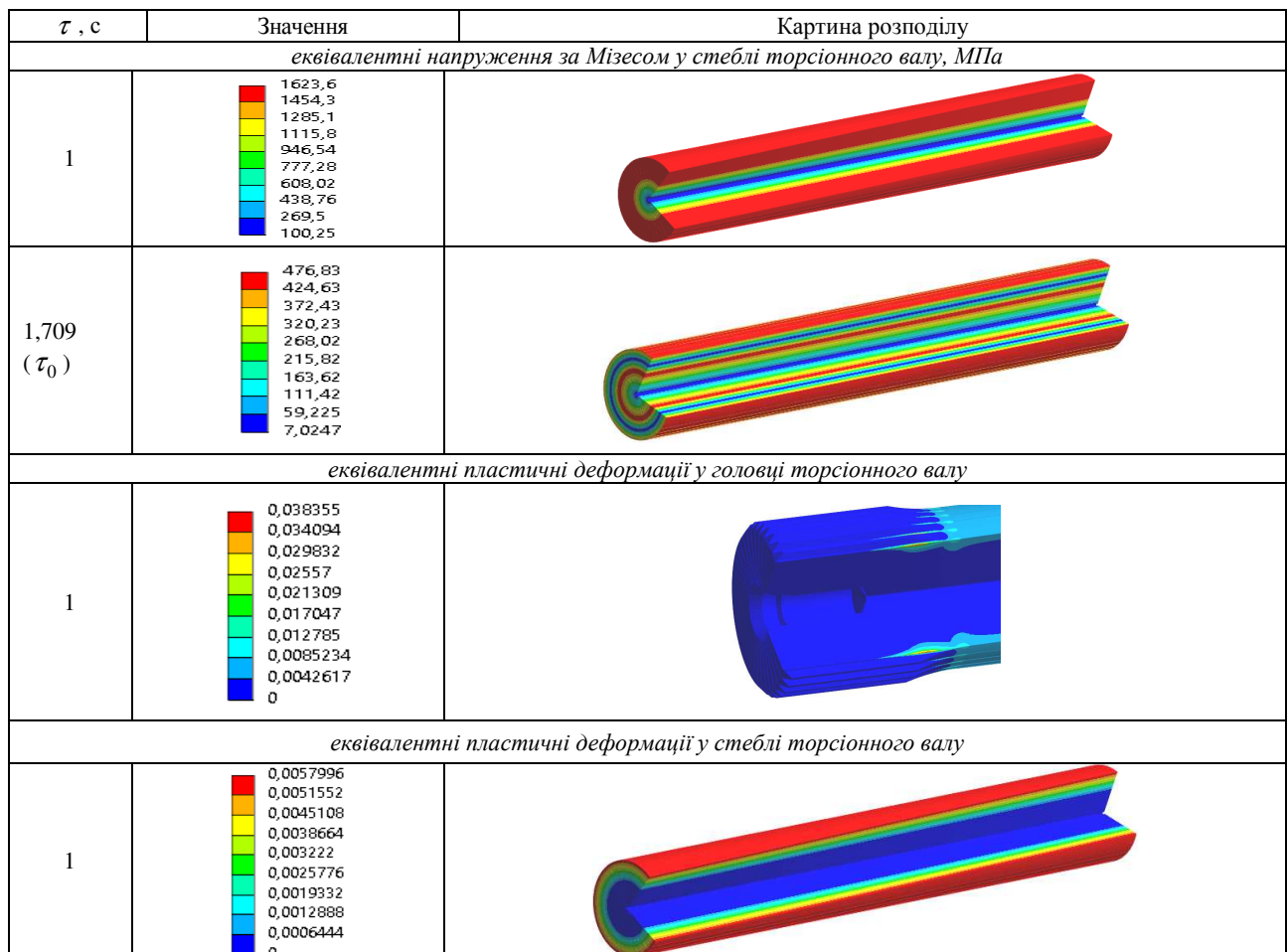
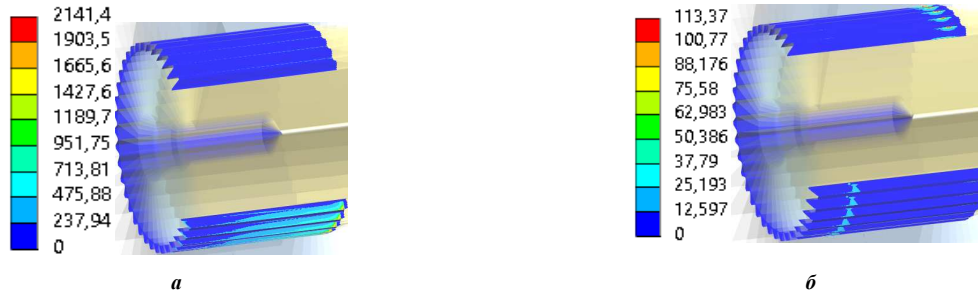
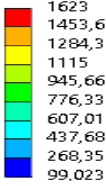
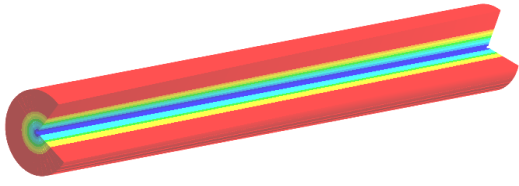
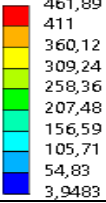
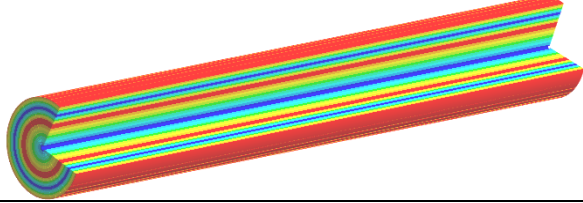
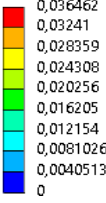
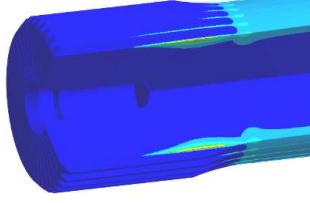
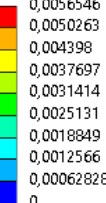
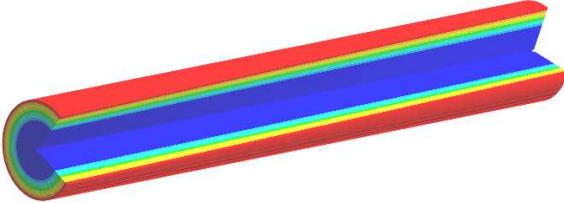


Рисунок 11 – Розподіл контактної тиску (варіант № 4,  $\Delta = 300$  мкм) у головці торсійного валу, МПаРисунок 10 – Розподіл контактної тиску (варіант № 3) у ГТВ, МПа: а –  $\tau = 1$  с; б –  $\tau = \tau_0 = 1,704$ сТаблиця 5 – Розподіл компонент напружено-деформованого стану (варіант № 5,  $\Delta = 400$  мкм) у торсіоні

$\tau$ , с	Значення	Картина розподілу
<i>еквівалентні напруження за Мізесом у стеблі торсійного валу, МПа</i>		
1		
1,713 ( $\tau_0$ )		
<i>еквівалентні пластичні деформації у головці торсійного валу</i>		
1		
<i>еквівалентні пластичні деформації у стеблі торсійного валу</i>		
1		

а –  $\tau = 1$  с; б –  $\tau = \tau_0 = 1,713$ сРисунок 12 – Розподіл контактної тиску (варіант № 5,  $\Delta = 400$  мкм) у головці торсійного валу, МПа

Таблиця 6 – Розподіл компонент напружено-деформованого стану (варіант № 6,  $\Delta = 500$  мкм) у торсіоні

$\tau, c$	Значення	Картина розподілу
<i>еквівалентні напруження за Мізесом у стеблі торсіонного валу, МПа</i>		
1	 <ul style="list-style-type: none"> <li>1623</li> <li>1453,6</li> <li>1284,3</li> <li>1115</li> <li>945,66</li> <li>776,33</li> <li>607,01</li> <li>437,68</li> <li>268,35</li> <li>99,023</li> </ul>	
1,716 ( $\tau_0$ )	 <ul style="list-style-type: none"> <li>461,89</li> <li>411</li> <li>360,12</li> <li>309,24</li> <li>258,36</li> <li>207,48</li> <li>156,59</li> <li>105,71</li> <li>54,83</li> <li>3,9483</li> </ul>	
<i>еквівалентні пластичні деформації у головці торсіонного валу</i>		
1	 <ul style="list-style-type: none"> <li>0,036462</li> <li>0,03241</li> <li>0,028359</li> <li>0,024308</li> <li>0,020256</li> <li>0,016205</li> <li>0,012154</li> <li>0,0081026</li> <li>0,0040513</li> <li>0</li> </ul>	
<i>еквівалентні пластичні деформації у стеблі торсіонного валу</i>		
1	 <ul style="list-style-type: none"> <li>0,0056546</li> <li>0,0050263</li> <li>0,004398</li> <li>0,0037697</li> <li>0,0031414</li> <li>0,0025131</li> <li>0,0018849</li> <li>0,0012566</li> <li>0,00062828</li> <li>0</li> </ul>	

 $a - \tau = 1 c; b - \tau = \tau_0 = 1,716 c$ Рисунок 13 – Розподіл контактної тиску (варіант № 6,  $\Delta = 500$  мкм) у головці торсіонного валу, МПа

Аналіз результатів розрахунків свідчить, що для варіанта 1 еквівалентні напруження за Мізесом, а також пластичні деформації в головці торсіонного валу перевищують відповідні значення у його стеблі. Для варіанта 2 істотних якісних змін у характері розподілів напружень і деформацій порівняно з варіантом 1 не спостерігається, однак їх кількісні рівні мають тенденцію до зниження.

Аналогічне зменшення відзначається і для рівня контактної тиску в зоні ГТВ. Відзначені вище тенденції стосовно розподілів та рівнів контактної тиску, напружень та деформацій зберігається і для варіанту 3. Аналогічний характер змін фіксується і для варіанта 4, що свідчить про стабільність виявлених закономірностей.

Для варіанта 6 тенденції, характерні для по-

передніх варіантів, у частині розподілу контактної тиску зберігаються, тоді як вплив на НДС проявляється менш виражено.

Узагальнюючи результати для варіантів 1–6, можна зробити висновок, що варіювання зазору в контакті між головкою торсіонного валу та шліцьовою втулкою істотно впливає на характер контактної взаємодії та напружено-деформований стан елементів спряження.

**Аналіз результатів досліджень контактної взаємодії та напружено-деформованого стану торсіонних валів легкоброньованих машин.** Як зазначено у [1], рівень модифікації (величина зрізу  $\Delta$  (тотожно дорівнює  $\Delta R$  на рис. 6) на шліці у зоні, наближеній до ГП) суттєво впливає на рівень переміщень – вони знижуються при зростанні  $\Delta$  від

0 до  $5 \cdot 10^{-4}$  м із  $5 \cdot 10^{-2}$  м до  $10^{-2}$  м, тобто в п'ятеро.

У результаті модифікації робочої поверхні ГТВ спостерігається зниження загального рівня напружень у ТВ приблизно на 140 МПа відносно початкового значення 1775 МПа, тоді як у СТВ істотних змін не зафіксовано.

Виявлене зниження зумовлене значним зниженням рівня контактного тиску в зоні ГТВ – з приблизно 2500 МПа до близько 1000 МПа, що відповідає зменшенню майже у 2,5 раза.

Рівень пластичних деформацій у ТВ також знижується, однак ступінь цього зниження є менш вираженим порівняно зі зменшенням контактного тиску.

Узагальнюючи отримані результати, можна констатувати позитивний вплив модифікації робочої поверхні ГТВ на напружений стан, рівень контактного тиску та переміщень у ТВ.

**Висновки.** Здійснені розробки та дослідження дають основу для таких висновків.

1. Розроблено принципово новий підхід до моделювання напружено-деформованого стану торсіонних валів систем підресорювання легких броньованих машин, що базується на покроковому відтворенні їх напружено-деформованого стану. На відміну від традиційних методів, у межах єдиної комплексної моделі одночасно враховуються структурна та фізична нелінійності матеріалу, історія навантаження, а також параметричне моделювання геометрії об'єкта і умов його навантаження.

Запропонований підхід забезпечує поєднання фізичної адекватності опису реальних процесів деформування з можливістю суттєвого скорочення обчислень без зниження точності результатів.

2. З метою інтенсифікації чисельного аналізу напружено-деформованого стану торсіонних валів адаптовано та розвинено інтегрований метод, що поєднує варіаційні постановки задач механіки деформівного твердого тіла з методом узагальненого параметричного моделювання. Зазначений метод, на відміну від традиційних підходів, забезпечує гнучке варіювання об'єкта дослідження у всіх його аспектах. Це створює можливість організації цілеспрямованого пошуку раціональних проектно-технологічних рішень торсіонних валів на основі строгих постановок задач аналізу їх міцності та довговічності.

3. Розроблено узагальнені постановки чисельного аналізу міцності та довговічності торсіонних валів систем підресорювання легких броньованих машин, що ґрунтуються на інтеграції методу скінченних елементів і методу узагальненого параметричного моделювання процесів і станів у механічних системах. На відміну від традиційних постановок, запропонований підхід забезпечує можливість не лише одиничного аналізу, а й проведення багатоваріантних чисельних досліджень із подальшим обґрунтуванням прогресивних технічних рішень за критеріями міцності та довговічності.

4. Практичні можливості розроблених підходів, моделей і методів досліджень підтверджено на тестових стендах, що демонструє їх придатність для використання у прикладних інженерних і проектних задачах.

#### Список літератури

1. Ткачук М. М., Зінченко О. І., Грабовський А. В., Ткачук М. А., Льозний О. С., Бондаренко О. В. Дослідження розподілів контактного тиску і напружено-деформованого стану елементів конструкцій торсіонних валів підвищених бойових броньованих машин. *Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Серія: Автомобіле- та тракторобудування*. 2024. № 2. С. 71-96.
2. Грабовський А.В., Ткачук М.М., Заворотній А.В., Куценко С.В., Саверська М.С., Ключков І.С., Ткачук М.А., Зінченко О.І., Дерев'янкін Р.П. Контактна взаємодія торсіонного вала із шліцевою втулкою при пружно-пластичних деформаціях. *Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Серія: Машинознавство та САПР*. 2021. №1. С. 34-46.
3. Ткачук М.М., Грабовський А.В., Заворотній А.В., Куценко С.В., Саверська М.С., Ключков І.С., Зінченко О.І., Ткачук М.А., Назаренко С.О., Пінчук Н.В., Марусенко С.І. Чисельне моделювання пружно-пластичного деформування торсіонних валів систем підресорювання транспортних засобів із урахуванням контактної взаємодії. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ», серія: Машинознавство та САПР*, №1, 2022. С. 91-114.
4. Tkachuk, M. M., Zinchenko, O., Grabovskiy, A., Tkachuk, M. A., Sierykov, V., Domina, N., Hrechka, I. Contact interaction of bodies along congruent surfaces. *International Journal of Mechatronics and Applied Mechanics*, 2024. Issue 17, p. 32-43. (Scopus, Article, Q4)
5. Tkachuk, M.M., Zinchenko, O., Grabovskiy, A., Sierykov, V., Vasiliev, A. (2025). Computational and Experimental Studies on Contact Interaction of Mock-Up Samples of Complex-Profiled Bodies. In: Pavlenko, D., Tryshyn, P., Honchar, N., Kozlova, O. (eds) *Smart Innovations in Energy and Mechanical Systems. SIEMS 2025. Lecture Notes in Networks and Systems*, vol 1480. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-95191-6\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-031-95191-6_12) (Scopus, Conference Paper).
6. Močilnik V. V., N. Gubeljak, J. Predan. Model for fatigue lifetime prediction of torsion bars subjected to plastic presetting. *Tehnicky Vjesnik*. 2011.18(4): 537-546.
7. Močilnik V., Nenad Gubeljak, Jozef Predan. Surface residual stresses induced by Torsional Plastic Pre-setting of Solid Spring Bar. *International Journal of Mechanical Sciences*. 92 (2015): 269-278.
8. Sun Weiqun, He Feng-ming. Design and manufacture of vehicle torsion bar spring. *J. Automobile Science and Technology*. 2002, 2(2):23-27.
9. Zhou G., X. Li, Y. Shi, Y. Zhu, B. Xu. Numerical simulation of the working process and life prediction of a tank torsion shaft. *Journal of Mechanical Strength*. 2006, 28(4): 578-581.
10. Белозеров В.В., Махатилова А.И., Субботина В.В. Циклическая прочность деталей с зонами перекрытия, сформированными при обкатывании роликами. *Проблемы прочности*. 2006. № 3. С. 144-148.
11. Белозеров В.В., Легейда С.Н., Махатилова А.И. и др. Краевой эффект при упрочнении деталей обкатыванием роликами. *Вестник машиностроения*. 1993. № 4. С. 46-48.
12. Ткачук М.М. *Мікромеханічні моделі та методи осереднення властивостей матеріалів мережевої структури та проміжних шарів контактуючих тіл*: дис... на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук: 05.03.20/ Ткачук Микола Миколайович. Харків, 2020. 464 с.
13. Васидзу К. *Вариационные методы в теории упругости и пластичности*: Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 542 с.
14. Кравчук А. С. *Вариационные и квазивариационные неравенства в механике*. М.: МГАПИ, 1997. 340 с.
15. Кравчук А.С. Метод вариационных неравенств в контактных задачах. *Механика контактных взаимодействий*. 2001. С. 93-115.
16. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Govindjee, S. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. 8th ed., Elsevier, 2024. 800 p.
17. Работнов Ю.Н. *Механика деформируемого твердого тела*. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 712 с.
18. Ткачук Н.А. Г.Д. Гриценко, А.Д. Чепурной, Е.А. Орлов, Ткачук Н.Н. Конечно-элементные модели элементов сложных механических систем: технология автоматизированной генерации и параметризованного описания. *Механика та машинобудування*. Харків: НТУ "ХПІ", 2006. №1.

- C. 57-79.
19. Карманов В.Г. *Математическое программирование*: Учеб. Пособие. 5-е изд., стереотип. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 264 с.
  20. Ткачук, М. М., Новіков, М., Грабовський, А., Дьоміна, Н., Васильєв, А., Ткачук, Г., Гречка, І., Ткачук, М. А., Льозний, О., Пінчук, Н. і Кравченко, С. (2025). Методи посилення ефектів при дискретно-континуальному зміцненні елементів машинобудівних конструкцій. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: *Машинознавство та САПР*, № 2. С. 103–114. doi: 10.20998/2079-0775.2025.2.13.
  21. Tkachuk, M.A. et al. (2025). Complex Technologies for Reinforcing Stressed Machine Components. In: Marchenko, A., Koruba, Z. (eds) Decarbonization of Transport Energy Installations in the Context of Sustainable Development Strategies. *Studies in Systems, Decision and Control*, vol 635. Springer, Cham. Pp. 183-203. [https://doi.org/10.1007/978-3-032-05884-3\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-032-05884-3_10)
  22. Ткачук М.М., А.В Грабовський, М.А Ткачук, С.О. Кравченко, Г.В. Ткачук, О.С. Льозний. Дискретно-континуальні методи та засоби зміцнення елементів машин військового та цивільного призначення. *Движуні внутрішнього згоряння*, 2025. С. 97-107.
  23. Контактна взаємодія елементів конструкцій, що мають зміцнені поверхневі шари [Електронний ресурс] / М. М. Ткачук, А. В. Грабовський, О. В. Кохановська, Н. В. Пінчук, С. О. Кравченко, М. А. Ткачук, О. С. Льозний // *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я = Information technologies: science, engineering, technology, education, health : тези доп. 33-ї міжнар. наук.-практ. конф. MicroCAD-2025, 14-17 травня 2025 р. / ред. Є. І. Сокол; уклад. Г. В. Лісачук; Нац. техн. ун-т "Харків. політехн. ін-т" [та ін.]*. Електрон. текст. дані. Харків : НТУ "ХПІ", 2025. С. 544. URI <https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/94671>
  24. Напружено-деформований стан елементів конструкцій бойових броньованих машин при пружно-пластичному деформуванні та контактній взаємодії [Elektronische ressourc] / О. І. Зінченко, М. М. Ткачук, І. П. Гречка, А. В. Грабовський, М. А. Ткачук, Л. М. Бондаренко, А. О. Зарубіна. *Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я = Information technologies: science, engineering, technology, education, health: тези доп. 33-ї міжнар. наук.-практ. конф. MicroCAD-2025, 14-17 травня 2025 р. / ред. Є. І. Сокол; уклад. Г. В. Лісачук; Нац. техн. ун-т "Харків. політехн. ін-т" [та ін.]*. Електрон. текст. дані. Харків : НТУ "ХПІ", 2025. С. 526. URI <https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/94559>
  25. Ткачук М.М., Грабовський А.В., Скрипченко Н.Б., Ткачук М.А., Кротенко Г.А., Саверська М.С. (2019). Контактна взаємодія складнопрофільних тіл за наявності між ними проміжних шарів із нелінійними властивостями, *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: *Машинознавство та САПР*, № 7(1332). С. 116–133. doi: 10.20998/2079-0775.2019.7.18.
  26. Ткачук, М. М., Пінчук, Н., Ткачук, Г., Клочков, І., Ткачук, М. А., Сериков, В., Грабовський, А., Гречка, І., Куценко, С., Цимбал, Г. і Коба, А. (2022). Нові фізичні чинники за контактної взаємодії пружних тіл уздовж поверхонь близької форми, *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: *Машинознавство та САПР*, № 2. С. 94–126. doi: 10.20998/2079-0775.2022.2.10.
  27. Ткачук, М. А., Саверська, М., Грабовський, А., Ткачук, М. М., Куценко, С., Ткачук, Г., Клочков, І., Пінчук, Н., Кохановська, О., Жадан, Ю., Марусенко, С., Храмова, І., Бондаренко, Л., Цимбал, Г., Александров, Є. і Сопрунов, І. (2023). Розрахунково-експериментальне дослідження напружено-деформованого стану елементів технологічних систем методами скінчених елементів та голографічної інтерферометрії, *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: *Машинознавство та САПР*, № 1. С. 92–114. doi: 10.20998/2079-0775.2023.1.10.
  28. Грабовський, А., Ткачук, М. А., Кохановська, О., Ткачук, М. М., Дьоміна, Н., Ткачук, Г., Саверська, М., Куценко, С., Клочков, І., Волошина, І. і Третяк, В. (2022). Контактна взаємодія тіл близької форми за малого збурення розподілу початкового зазору, *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: *Машинознавство та САПР*. № 2. С. 23–34. doi: 10.20998/2079-0775.2022.2.03.
  29. Ткачук М.М., Марченко А.П., Кравченко С.О., Ткачук М.А., Веретельник О.В., Грабовський А.В., Веретельник В.В. Багатокритеріальна оцінка контактної взаємодії дискретно-континуально зміцнених деталей. *Технологія виробництва ДВЗ. Движуні внутрішнього згоряння*, 2022. №1. С. 65-76. doi: 10.20998/0419-8719.2022.1.09.

## References (transliterated)

1. Tkachuk M. M., Zinchenko O. I., Hrabovskiy A. V., Tkachuk M. A., Loznyi O. S., Bondarenko O. V. (2024). Doslidzhennia rozpodiliv kontaktnoho tysku i napruzhenno-deformovanoho stanu elementiv konstruktсии torsionnykh valiv pidvisky boiovykh bronovanykh mashyn. *Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu "KhPI". Seriya: Avtomobile- ta traktorobuduvannia*, no. 2, pp. 71-96.
2. Hrabovskiy A.V., Tkachuk M.M., Zavorotnii A.V., Kutsenko S.V., Saverska M.S., Klochkov I.Ye., Tkachuk M.A., Zinchenko O.I., Dereviankin R.P. (2021). Kontaktna vzaiemodiia torsionnoho vala iz shlitsevoiu vulkoiu pry pruzhno-plastychnykh deformatsiakh. *Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu "KhPI". Seriya: Mashynoznavstvo ta SAPR*, no.1. pp. 34-46.
3. Tkachuk M.M., Hrabovskiy A.V., Zavorotnii A.V., Kutsenko S.V., Saverska M.S., Klochkov I.Ye., Zinchenko O.I., Tkachuk M.A., Nazarenko S.O., Pinchuk N.V., Marusenko S.I. (2022). Chyselne modeliuвання pruzhno-plastychnoho deformuvannia torsionnykh valiv system pidresoriuvannia transportnykh zasobiv iz urakhuvanniam kontaktnoi vzaiemodii. *Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «KhPI», seriya: Mashynoznavstvo ta SAPR*, no.1, pp. 91-114.
4. Tkachuk, M. M., Zinchenko, O., Grabovskiy, A., Tkachuk, M. A., Sierykov, V., Domina, N., Hrechka, I. (2024). Contact interaction of bodies along congruent surfaces. *International Journal of Mechatronics and Applied Mechanics*, Issue 17, pp. 32-43. (Scopus, Article, Q4)
5. Tkachuk, M.M., Zinchenko, O., Grabovskiy, A., Sierykov, V., Vasiliev, A. (2025). Computational and Experimental Studies on Contact Interaction of Mock-Up Samples of Complex-Profiled Bodies. In: Pavlenko, D., Tryshyn, P., Honchar, N., Kozlova, O. (eds) Smart Innovations in Energy and Mechanical Systems. SIEMS 2025. *Lecture Notes in Networks and Systems*, vol 1480. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-95191-6\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-031-95191-6_12) (Scopus, Conference Paper).
6. Močilnik V. V., N. Gubeljak, J. Predan. (2011). Model for fatigue lifetime prediction of torsion bars subjected to plastic presetting. *Tehnicki Vjesnik*. no. 18(4), pp. 537-546.
7. Močilnik V., Nenad Gubeljak, Jozef Predan. (2015). Surface residual stresses induced by Torsional Plastic Pre-setting of Solid Spring Bar. *International Journal of Mechanical Sciences*. no.92. pp. 269-278.
8. Sun Weiqun, He Feng-ming. (2002). Design and manufacture of vehicle torsion bar spring. *J. Automobile Science and Technolgy*, no. 2(2), pp. 23-27.
9. Zhou G., X. Li, Y. Shi, Y. Zhu, B. Xu. Numerical simulation of the working process and life prediction of a tank torsion shaft/ *Journal of Mechanical Strength*/2006, 28(4): 578-581.
10. Belozherov V.V., Makhatilova A.I., Subbotina V.V. (2006). Sfirkicheskaya prochnost' detaley s zonami perekrytiya, sformirovannymi pri obkativanii rolíkami. *Problemy prochnosti*, no. 3, pp. 144-148.
11. Belozherov V.V., Legeyda S.N., Makhatilova A.I. i dr. (1993). Kravevoy effekt pri uprochnenii detaley obkativaniyem rolíkami. *Vestnik mashinostroyeniya*, no. 4, pp. 46-48.
12. Tkachuk M.M. Mikromekhanichni modeli ta metody oserednennia vlastyvostei materialiv merezhevoi struktury ta promizhnykh shariv kontaktuiuychkh til: dys... na zdobuttia naukovoho stepeniya doktora tekhnichnykh nauk: 05.03.20/ Tkachuk Mykola Mykolaiovych. Kharkiv, 2020. 464 p.
13. Vasidzu K. Variatsionnyye metody v teorii uprugosti i plastichnosti: Per. s angl. M.: Mir, 1987. 542 p.
14. Kravchuk A. S. Variatsionnyye i kvzivariatsionnyye neravenstva v mekhanike / A. S. Kravchuk. M.: MGAPI, 1997. 340 p.
15. Kravchuk A.S. (2001). Metod variatsionnykh neravenstv v kontaktnykh zadachakh. *Mekhanika kontaktnykh vzaimodeystviy*, pp. 93–115.

16. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Govindjee, S. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. 8th ed., Elsevier, 2024. 800 p.
17. Rabotnov YU.N. Mekhanika deformiruyemogo tverdogo tela / YU.N. Rabotnov. M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1988. 712 p.
18. Tkachuk N.A., G.D. Gritsenko, A.D. Chepurnoy, Ye.A. Orlov, Tkachuk N.N. (2006). Konechno-elementnyye modeli elementov slozhnykh mekhanicheskikh sistem: tekhnologiya avtomatizirovannoy generatsii i parametrizovannogo opisaniya/ N.A. Tkachuk. *Mekhanika ta mashinobuduvannya*. Kharkiv: NTU "KHP", no. 1, pp. 57-79.
19. Karmanov V.G. Matematicheskoye programmirovaniye: Ucheb. Posobiye. 5-ye izd., stereotip. M.: FIZMATLIT, 2004. 264 p.
20. Tkachuk, M. M., Novikov, M., Hrabovskiy, A., Domina, N., Vasyliiev, A., Tkachuk, H., Hrechka, I., Tkachuk, M. A., Loznyi, O., Pinchuk, N. i Kravchenko, S. (2025). Metody posyleniia effektiv pry dyskretno-kontynualnomu zmitsnenni elementiv mashynobudivnykh konstruksii. *Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «KhPI»*. Serii: *Mashynoznavstvo ta SAPR*, no. 2, pp. 103–114. doi: 10.20998/2079-0775.2025.2.13.
21. Tkachuk, M.A. et al. (2025). Complex Technologies for Reinforcing Stressed Machine Components. In: Marchenko, A., Koruba, Z. (eds) Decarbonization of Transport Energy Installations in the Context of Sustainable Development Strategies. *Studies in Systems, Decision and Control*, vol 635. Springer, Cham. Pp. 183-203. [https://doi.org/10.1007/978-3-032-05884-3\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-032-05884-3_10)
22. Tkachuk M.M., A.V Hrabovskiy, M.A Tkachuk, S.O. Kravchenko, H.V. Tkachuk, O.S. Loznyi. (2025). Diskretno-kontynualni metody ta zasoby zmitsnenniia elementiv mashyn viiskovoho ta tsyvilnoho pryznachenniia. *Dvyhuny vnutrishnoho zghorianniia*, pp. 97-107.
23. Kontaktna vzaiemodiia elementiv konstruksii, shcho maiut zmitsneni poverkhevi shary [Elektronnyi resurs] / M. M. Tkachuk, A. V. Hrabovskiy, O. V. Kokhanovska, N. V. Pinchuk, S. O. Kravchenko, M. A. Tkachuk, O. S. Loznyi // *Informatsiini tekhnologii: nauka, tekhnika, tekhnologiiia, osvita, zdorovia = Information technologies: science, engineering, technology, education, health: tezy dop. 33-yi mizhmar. nauk.-prakt. konf. MicroCAD-2025, 14-17 travnia 2025 r. / red. Ye. I. Sokol; ukklad. H. V. Lisachuk; Nats. tekhn. un-t "Kharkiv. politekhn. in-t" [ta in.]*. Elektron. tekst. dani. Kharkiv: NTU "KhPI", 2025. pp. 544. URI <https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/94671>
24. Napruzhenno-deformovanyi stan elementiv konstruksii boiovykh bronovanykh mashyn pry pruzhno-plastychnomu deformuvanni ta kontaktnei vzaiemodii [Elektronische ressource] / O. I. Zinchenko, M. M. Tkachuk, I. P. Hrechka, A. V. Hrabovskiy, M. A. Tkachuk, L. M. Bondarenko, A. O. Zarubina // *Informatsiini tekhnologii: nauka, tekhnika, tekhnologiiia, osvita, zdorovia = Information technologies: science, engineering, technology, education, health: tezy dop. 33-yi mizhmar. nauk.-prakt. konf. MicroCAD-2025, 14-17 travnia 2025 r. / red. Ye. I. Sokol; ukklad. H. V. Lisachuk; Nats. tekhn. un-t "Kharkiv. politekhn. in-t" [ta in.]*. Elektron. tekst. dani. Kharkiv: NTU "KhPI", 2025. pp. 526. URI <https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/94559>
25. Tkachuk M.M., Hrabovskiy A.V., Skrypchenko N.B., Tkachuk M.A., Krotenko H.A., Saverska M.S. (2019). Kontaktna vzaiemodiia skladnoprofilnykh til za naiavnosti mizh nymy promizhnykh shariv iz neliniinymy vlastyvoostiamy, *Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «KhPI»*. Serii: *Mashynoznavstvo ta SAPR*, (7(1332)), pp. 116–133. doi: 10.20998/2079-0775.2019.7.18.
26. Tkachuk, M. M., Pinchuk, N., Tkachuk, H., Klochkov, I., Tkachuk, M. A., Sierykov, V., Hrabovskiy, A., Hrechka, I., Kutsenko, S., Tsymbal, H. i Koba, A. (2022). Novi fizychni chynnyky za kontaktnoi vzaiemodii pruzhnykh til uzdovzh poverkhon blyzkoii formy, *Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «KhPI»*. Serii: *Mashynoznavstvo ta SAPR*, (2), s. 94–126. doi: 10.20998/2079-0775.2022.2.10.
27. Tkachuk, M. A., Saverska, M., Hrabovskiy, A., Tkachuk, M. M., Kutsenko, S., Tkachuk, H., Klochkov, I., Pinchuk, N., Kokhanovska, O., Zhadan, Yu., Marusenko, S., Khrantsova, I., Bondarenko, L., Tsymbal, H., Aleksandrov, Ye. i Soprunov, I. (2023). Rozrakhunkovo-eksperymentalne doslidzhenniia napruzhenno-deformovanoho stanu elementiv tekhnolohichnykh system metodamy skinchennykh elementiv ta holohrafichnoi interferometrii, *Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «KhPI»*. Serii: *Mashynoznavstvo ta SAPR*, no. 1, pp. 92–114. doi: 10.20998/2079-0775.2023.1.10.
28. Hrabovskiy, A., Tkachuk, M. A., Kokhanovska, O., Tkachuk, M. M., Domina, N., Tkachuk, H., Saverska, M., Kutsenko, S., Klochkov, I., Voloshyna, I. i Tretiak, V. (2022). Kontaktna vzaiemodiia til blyzkoii formy za maloho zburennia rozpodilu pochatkovoho zazoru, *Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «KhPI»*. Serii: *Mashynoznavstvo ta SAPR*, no.2, pp. 23–34. doi: 10.20998/2079-0775.2022.2.03.
29. Tkachuk M.M., Marchenko A.P., Kravchenko S.O., Tkachuk M.A., Veretelnyk O.V., Hrabovskiy A.V., Veretelnyk V.V. (2022). Bahatokryterialna otsinka kontaktnoi vzaiemodii dyskretno-kontynualno zmitsnennykh detalei. *Tekhnologiiia vyrobnytstva DVZ. Dvyhuny vnutrishnoho zghorianniia*, no.1. pp. 65-76. doi: 10.20998/0419-8719.2022.1.09.

Надійшла (received) 20.03.2026  
Стаття прийнята до друку 21.04.2026  
Опублікована 28.04.2026

#### Відомості про авторів / About the Authors

**Зінченко Олена Іванівна / Zinchenko Olena** – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2961-5861>; e-mail: [ez99953@gmail.com](mailto:ez99953@gmail.com)