

В. М. БУРЛАЄНКО, Г. І. ЛЬВОВ, С. Д. ДІМІТРОВА-БУРЛАЄНКО

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ МЕТАЛ-МАТРИЧНИХ КОМПОЗИТНИХ БАЛОК ЗМІННОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ З АКсіАЛЬНО ГРАДІЄНТНИМ АРМУВАННЯМ

У роботі досліджується стійкість балок зі змінним поперечним перерізом, виготовлених із метал-матричних композитів (ММК) з аксіально функціонально-градієнтним (ФГ) армуванням. Для виведення керівних рівнянь використано теорію Ейлера–Бернуллі в поєднанні з варіаційним принципом Гамільтона. Ефективні характеристики матеріалу, що розподілений уздовж довжини балки відповідно до степеневому закону, обчислено за правилом сумішей. Для одержання розв’язку задачі застосовано напіваналітичний метод диференціального перетворення у формулюванні, що враховує різні граничні умови в межах єдиної схеми розрахунку. Проведено числові експерименти для балок як матеріально однорідних зі змінним перерізом, так і неоднорідних із аксіально ФГ армуванням. Розрахунки показали, що збільшення вмісту аксіально градієнтної армуючої фази суттєво підвищує стійкість ММК балок. Додатково всебічно проаналізовано вплив граничних умов, геометрії поперечного перерізу та аксіального градієнтного профілю властивостей матеріалу.

Ключові слова: метал-матричний композит; аксіально функціонально-градієнтне армування; балка змінного поперечного перерізу; стійкість; метод диференціального перетворення

V. BURLAYENKO, G. LVOV, S. DIMITROVA-BURLAYENKO

STUDY ON THE STABILITY OF VARIABLE CROSS-SECTION METAL-MATRIX COMPOSITE BEAMS WITH AXIALLY GRADED REINFORCEMENT

The paper investigates the stability of beams with variable cross-sections made of metal matrix composites (MMCs) with axially functionally graded (FG) reinforcement. The governing equations are derived using the Euler–Bernoulli beam theory in conjunction with Hamilton’s variational principle. The effective material properties, varying along the beam length according to a power-law distribution, are determined using the rule of mixtures. A semi-analytical differential transform method is employed to solve the problem, enabling the consideration of various boundary conditions within a unified computational framework. Numerical analyses were performed for both homogeneous beams with variable cross-sections and non-homogeneous beams with axially FG reinforcement. The results demonstrated that increasing the content of the axially graded reinforcing phase significantly enhances the stability of MMC beams. Additionally, the effects of boundary conditions, cross-sectional geometry, and the axial gradient profile of material properties are comprehensively analyzed.

Keywords: metal matrix composite; axially functionally graded reinforcement; variable cross-section beam; structural stability; differential transformation method

Вступ. Метал-матричні композити (ММК) є перспективними інженерними матеріалами, які поєднують властивості металевої матриці та дисперсної армуючої фази. Завдяки такому поєднанню ці матеріали демонструють покращені механічні характеристики зокрема, підвищену міцність і жорсткість, зменшену густину та знижену теплопровідність. Саме ці властивості забезпечують широке застосування ММК в авіаційній, космічній, оборонній та транспортній галузях [1]. Проте для ефективного та безпечного використання таких матеріалів у складних умовах навантаження необхідно глибше розуміння їхньої механічної поведінки, зокрема втрати стійкості балочних конструкційних елементів.

Аналіз існуючих моделей та методів досліджень властивостей метал-матричних композитів. Армувальні матеріали відіграють вирішальну роль у формуванні властивостей метал-матричних композитів. Традиційно для армування застосовують керамічні, вуглецеві або інші високомодульні матеріали, вводячи їх в матрицю у формі безперервних довгих кристалічних волокон (віскерів), коротких дискретних волокон або твердих частинок. Серед усіх типів армування особливу увагу привертають вуглецеві матеріали, зокрема графенові пластини (GPL) та вуглецеві нанотрубки (CNT). Модуль пружності цих матеріалів становить кілька терапаскалів [2].

Особливу увагу привертають конструкціям, виготовлених з ММК із функціонально-градієнтним армуванням (ФГ-ММК), у яких матеріальні властивості змінюються уздовж певного напрямку, що дозволяє більш раціонально розподілити напруження та покращити експлуатаційні характеристики, знижуючи ризик деламінації на межі поділу різнорідних матеріалів [3]. Зміна властивостей у таких конструкціях описується певним законом розподілу, а для їхньої ефективної оцінки застосовуються відповідні моделі гомогенізації, зокрема правило сумішей, метод Морі–Танаки тощо [4].

У контексті дослідження стійкості балок, зокрема з неоднорідними властивостями матеріалу, для опису їхньої механічної поведінки широко застосовуються математичні моделі, засновані на класичних і розширених теоріях балки, таких як теорія Ейлера–Бернуллі, Тимошенка та теорії вищих порядків, що враховують просторову змінність матеріальних характеристик. Розв’язання відповідних керівних рівнянь зазвичай здійснюється із залученням числових методів, зокрема скінченно-різницевого та скінченно-елементного схем, а також аналітичних і напів-аналітичних підходів.

© В. М. Бурлаєнко, Г. І. Львов,
С. Д. Дімітрова-Бурлаєнко, 2025

Наприклад, у низці робіт [5–7] досліджується втрата стійкості аксіально функціонально-градієнтних балок із постійним прямокутним поперечним перерізом на основі теорій Ейлера–Бернуллі та Тимошенка. Для отримання рішень у цих роботах застосовувалися степеневі ряди, скінченно-елементний метод і метод диференціальних квадратур. У роботах [8–10] проаналізовано вплив функціонально-градієнтного розподілу армування графеновими нанопластинами (GPL) та вуглецевими нанотрубками (CNT) на критичну силу втрати стійкості при осьовому стисканні та згині. Теоретичні моделі та методи розв’язання відповідних рівнянь ґрунтувалися на різних підходах: теорії балок Тимошенка з використанням методу Рітца, рівняннях двовимірної теорії пружності із застосуванням методу диференціальних квадратур, а також на тригонометричній уточненій теорії балки, реалізований у поєднанні з методом Нав’є для вільно опертих балок. У роботі [11] для дослідження нелінійної поведінки після втрати стійкості пористих балок Тимошенка, армованих графеновими нанопластинами та вуглецевими нанотрубками, було використано безсітковий підхід, заснований на методі Галеркіна у поєднанні з неітераційним методом продовження високого порядку та методом радіальної точкової інтерполяції Чебишева. Динамічну стійкість неоднорідних функціонально-градієнтних балок, армованих вуглецевими нанотрубками та підданих осьовому збуджуючому навантаженню, досліджено в роботі [12] на основі моделі Халпіна-Цая із використанням методу Болотіна.

Однак стійкість балок зі змінним поперечним перерізом досліджено значно меншою мірою, попри те, що саме така геометрія є характерною для реальних конструкцій в аерокосмічному та машинобудівному секторах. Існуючі дослідження переважно обмежуються спрощеними аналітичними оцінками або наближеними чисельними методами, застосованими до ідеалізованих профілів [13–15].

Метод диференціального перетворення (МДП) зарекомендував себе як ефективний інструмент для розв’язання задач, що зводяться до диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами [16]. Цей підхід було успішно застосовано до аналізу власних коливань та стійкості аксіально функціонально-градієнтних балок Ейлера–Бернуллі зі змінним поперечним перерізом [17, 18], а також балок Тимошенка, армованих вуглецевими нанотрубками [19]. Водночас, досі не було проведено досліджень із застосуванням МДП до аналізу втрати стійкості метал-матричних композитних балок з аксіально функціонально-градієнтним (ФГ) армуванням.

Таким чином, попри наявні дослідження стійкості функціонально-градієнтних балок зі змінним перерізом, ця проблема залишається актуальною. Подальші дослідження є важливими для вдосконалення підходів до підвищення надійності композитних конструкцій. У даній роботі розглянуто стійкість балок змінного перерізу з аксіально армованого функціонально-градієнтного

метал-матричного композиту. Математичну модель побудовано на основі теорії балки Ейлера–Бернуллі із застосуванням принципу Гамільтона. Ефективні характеристики матеріалу визначено за правилом сумішей із урахуванням степеневих законів розподілу армування вздовж довжини балки. Розв’язання виконано МДП у формулюванні, що враховує різні граничні умови в межах єдиної схеми розрахунку [20]. Для оцінки точності, отримані результати зіставлено з відомими даними з літературних джерел.

Постановка задачі. Розглянемо балку довжини L , яка навантажена осьовою силою P та має змінну геометрію поперечного перерізу (рис. 1). Ширина $b(x)$ та висота $h(x)$ перерізу змінюються вздовж осі балки симетрично відносно її середньої лінії згідно правил:

$$b(x) = b_0(1 - c_b x/L)^m, \quad h(x) = h_0(1 - c_h x/L)^n, \quad (1)$$

де $c_b = 1 - b_1/b_0$ і $c_h = 1 - h_1/h_0$ – коефіцієнти звуженості ширини та висоти, відповідно, $0 \leq x \leq L$.

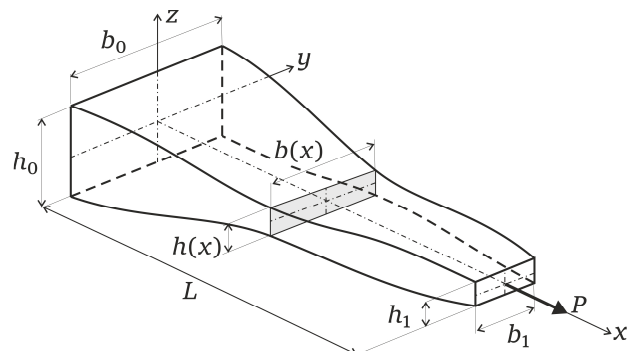


Рисунок 1 – Балка змінного поперечного перерізу

Виходячи з рівнянь (1), випливає, що площа поперечного перерізу $A(x)$ і момент інерції $I(x)$ змінюються уздовж довжини балки за відповідними залежностями:

$$A(x) = A_0(1 - c_b x/L)^m(1 - c_h x/L)^n, \quad (2)$$

$$I(x) = I_0(1 - c_b x/L)^m(1 - c_h x/L)^{3n},$$

де A_0 і I_0 – площа і момент інерції прямокутного перерізу, відповідно, при $x = 0$.

Оцінювання ефективних механічних властивостей композитів на основі характеристик їхніх складових є одним із ключових аспектів структурного аналізу. У роботі припускається, що об’ємна частка нанотрубок у загальному об’ємі ММК-балки змінюється вздовж її осі відповідно до степеневих законів [21]:

$$V_{CNT}(x) = (1 - x/L)^q V_{CNT}^*, \quad (3)$$

де q – показник степеневих законів, а V_{CNT}^* – об’ємна частка нанотрубок у загальному об’ємі ММК, яка визначається через масову частку

нанотрубок W_{CNT} і густини матеріалів нанотрубок ρ^{CNT} та металевої матриці ρ^M за формулою [22]:

$$V_{CNT}^* = \frac{W_{CNT}}{W_{CNT} + \rho^{CNT} / \rho^M - (\rho^{CNT} / \rho^M) W_{CNT}}, \quad (4)$$

Для визначення ефективних властивостей ММК, армованого нанотрубками, застосовується модифіковане правило сумішей [22], за яким модуль пружності E_{11} , коефіцієнт Пуассона ν_{12} та густина ρ композита подаються у вигляді:

$$\begin{aligned} E_{11}(x) &= \eta_1 V_{CNT}(x) E_{11}^{CNT} + V_M(x) E^M, \\ \nu_{12}(x) &= V_{CNT}(x) \nu_{12}^{CNT} + V_M(x) \nu^M, \\ \rho(x) &= V_{CNT}(x) \rho^{CNT} + V_M(x) \rho^M, \end{aligned} \quad (5)$$

де $V_{CNT}(x) + V_M(x) = 1$; η_1 – коефіцієнт ефективності нанотрубок, а інші параметри відносяться до модуля пружності, коефіцієнта Пуассона та густини матеріалів нанотрубок та металевої матриці.

Керівне рівняння. Математичну модель задачі стійкості балки змінного перерізу з аксіально армованого функціонально-градієнтного метал-матричного композиту будуватиметься на припущеннях теорії Ейлера–Бернуллі. Тоді, переміщення середньої лінії балки уздовж осей x та z записуються у формі:

$$\tilde{w}(x, z, t) = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \quad \tilde{w}(x, z, t) = w(x, t). \quad (6)$$

За умов теорії Ейлера–Бернуллі та припущень щодо малих переміщень єдиний компонент тензора деформацій має вигляд:

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (7)$$

Також вважаємо, що функціонально-градієнтний метал-матричний матеріал балки є лінійно ізотропним, тому поздовжнє напруження в перерізі балки визначається як

$$\sigma_{xx} = E_{11}(x) \varepsilon_{xx}. \quad (8)$$

Застосувавши принцип Гамільтона з урахуванням прийнятих припущень для балки, навантаженої осьовою силою, запишемо рівняння руху, що описує поведінку балки при осьовому стисканні та згині [17]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E_{11}(x) I(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho(x) A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (9)$$

Розв'язок рівняння (9) шукаємо у вигляді:

$$w(x, t) = W(x) e^{i\omega t}, \quad (10)$$

де i – уявна одиниця, ω – кругова частота.

Завдяки (10), отримуємо відносно амплітуди

$W(x)$ рівняння втрати статичної стійкості балки ($\omega = 0$) під дією осьової сили стискання та згину:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E_{11}(x) I(x) \frac{d^2 W}{dx^2} \right) + P \frac{d^2 W}{dx^2} = 0. \quad (11)$$

Розв'язок рівняння. З математичної точки зору інтегрування рівняння (11) ускладнене через змінні коефіцієнти, що виникають внаслідок залежності властивостей матеріалу та параметрів поперечного перерізу від координати x . Тому аналітичні розв'язки можливі лише для певних геометричних форм перерізу, профілів градації матеріалу та граничних умов. У цій роботі застосовується метод диференціального перетворення у формулюванні, що дозволяє враховувати різні граничні умови в межах єдиної обчислювальної схеми [20].

Спершу переформулюємо рівняння (11) у форму, більш придатну для застосування МДП:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + D_1(x) \frac{d^3 W}{dx^3} + D_2(x) \frac{d^2 W}{dx^2} + P D_3(x) \frac{d^2 W}{dx^2} = 0, \quad (12)$$

де $D_1(x) = 2D'(x)/D(x)$, $D_2(x) = D''(x)/D(x)$, $D_3(x) = 1/D(x)$, $D(x) = E_{11}(x)I(x)$.

Застосування операцій диференціального перетворення, наведених в оригінальній роботі [16], до рівняння (12) приводить до рекурентного алгебраїчного співвідношення відносно зображень $\bar{W}(k)$ шуканої функції $W(x)$:

$$\begin{aligned} \bar{W}(k+4) &= \\ &= -\frac{k!}{(k+4)!} \left\{ \sum_{p=0}^k (p+1)(p+2)(p+3) \bar{D}_1(k-p) \bar{W}(p+3) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p=0}^k (p+1)(p+2) \bar{D}_2(k-p) \bar{W}(p+2) + \right. \\ &\quad \left. + P \sum_{p=0}^k (p+1)(p+2) \bar{D}_3(k-p) \bar{W}(p+2) \right\}, \quad (13) \end{aligned}$$

де $\bar{D}_1$, $\bar{D}_2$ та $\bar{D}_3$ – зображення відповідних коефіцієнтів в (12), $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ – порядковий номер зображення.

Звідки оригінал шуканого вигину, як функції осьової координати та осьової сили $W(x, P)$, визначається за допомогою оберненого перетворення [16]:

$$W(x, P) = \sum_{k=0}^N \bar{W}(k) (x - x_0)^k, \quad (14)$$

де x_0 – центр околу розвинення шуканої функції в степеневий ряд, N – кількість доданків ряду.

Варто зазначити, що в рівнянні (14) зображення $\bar{W}(0)$, $\bar{W}(1)$, $\bar{W}(2)$ та $\bar{W}(3)$ є невідомими та визначаються за умовами закріплення балки.

Застосувавши до рівняння (14) відомі співвідношення з механіки балок для визначення кута повороту перерізу, вигинального моменту та перерізної сили, сформуємо систему чотирьох лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих зображень $\bar{W} = \{\bar{W}(0), \bar{W}(1), \bar{W}(2), \bar{W}(3)\}^T$:

$$A_{ij}(P)\bar{W} = 0, \quad (15)$$

де $A_{ij}(P)$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ поліноміальні вирази відносно критичної сили стискання P , що відповідають заданим умовам закріплення балки на обох кінцях.

Розв'язок системи рівнянь існує за умови, що визначник системи (15) дорівнює нулю:

$$\det|A_{ij}(P)| = 0. \quad (16)$$

Рівняння (16) може бути розв'язане будь-яким із відомих методів пошуку дійсних коренів полінома відносно сили стискання P . У результаті визначається критичне значення цієї сили $P_{кр}$, при якому відбувається втрата стійкості балки.

Запропонований підхід до розв'язання задачі стійкості балок змінного перерізу з аксіально армованого функціонально-градієнтного метал-матричного композиту реалізовано в середовищі *Matlab* з використанням вбудованих функцій диференціювання функцій, обчислення визначника та знаходження коренів полінома.

Чисельні розрахунки. З метою оцінки точності запропонованого підходу проведено низку розрахунків та порівняння отриманих результатів із даними, наведеними в літературі. У розрахунках, якщо не зазначено інше, використовувався безрозмірний параметр критичної сили стискання, визначений за формулою:

$$\tilde{P} = PL^2/(E_0 I_0).$$

Однорідна балка постійного перерізу. Розглянуто балку постійного прямокутного перерізу – $c_b = c_h = 0$ в (1) з однорідного матеріалу з механічними властивостями алюмінієвого сплаву: $E_{11}(x) = 70$ ГПа, $\nu_{12}(x) = 0.3$ та $\rho(x) = 2702$ кг/м³.

Балка аналізувалася за різних умов закріплення, зокрема: консольна (C–F), жорстко закріплена на обох кінцях (C–C), вільно оперта на обох кінцях (P–P), жорстко закріплена з одного кінця та шарнірно оперта з можливістю позовжнього переміщення на іншому (C–G), а також жорстко закріплена з одного кінця та вільно оперта на іншому (C–P). Результати розрахунків наведено в табл. 1.

Таблиця 1 – Безрозмірна критична сили $\tilde{P}$ однорідної балки постійного перерізу

BCs	[6]	[8]	МДП	Похиб., %
C-F	2.467401	2.467401	2.467401	0.0000
C-C	39.47842	39.47842	39.47842	0.0000
P-P	9.869604	9.869604	9.869604	0.0000
C-G	-	9.869604	9.869604	0.0000
C-P	20.19073	20.19073	20.19073	0.0000

Порівняння результатів у табл. 1 показує повну відповідність між референтними даними та результатами, отриманими методом диференціального перетворення в рамках цього дослідження. Відносна похибка є практично нульовою.

Однорідна балка змінного перерізу. Далі розглянуто матеріально однорідну балку зі змінним прямокутним поперечним перерізом, у якій висота залишається сталою, а ширина змінюється вздовж довжини балки відповідно до рівнянь (1) із $c_b \neq 0$ і $c_h = 0$: (а) за лінійним законом $m=1$; (б) за параболічним законом $m=2$ або (в) за кубічним законом $m=3$. Механічні характеристики матеріалу залишаються такими самими, як у попередньому прикладі. Результати розрахунків наведено в табл. 2, 3 і 4 відповідно.

Порівняння результатів у табл. 2, 3 та 4 свідчить про майже повну відповідність між референтними даними та результатами, отриманими методом диференціального перетворення, подібно до випадку балки постійного перерізу. Відносна похибка знову виявляється майже нульовою.

Таблиця 2 – Безрозмірна критична сили стискання $\tilde{P}$ однорідної балки змінного перерізу:
 $I(x) = I_0(1 - c_b x/L)$

c_b BCs	-0.5			0.5			1.0			
	[8]	МДП	Похиб., %	[8]	МДП	Похиб., %	[13]	[8]	МДП	Похиб., %
C-F	2.062092	2.06209	0.0001	2.810061	2.81006	0.0000	3.117696	3.117696	3.1177	0.0001
C-C	28.69698	28.69698	0.0000	48.81146	48.81146	0.0000	57.39396	57.39396	57.39396	0.0000
P-P	7.255625	7.25562	0.0001	12.25041	12.25041	0.0000	14.51125	14.51125	14.51125	0.0000
C-G	7.168835	7.16884	0.0001	12.1997	12.1997	0.0000	-	14.33767	14.33767	0.0000
C-P	14.73942	14.73942	0.0000	24.99361	24.99361	0.0000	29.44896	29.44896	29.44896	0.0000

Таблиця 3 – Безрозмірна критична сили стискання $\tilde{P}$ однорідної балки змінного перерізу:

$$I(x) = I_0(1 - c_b x/L)^2$$

c_b BCs	-0.5			0.5			1.0			
	[8]	МДП	Похиб., %	[8]	МДП	Похиб., %	[13]	[8]	МДП	Похиб., %
C-F	1.682966	1.682970	0.0002	3.171930	3.171930	0.0000	3.836377	3.836377	3.836380	0.0001
C-C	20.48084	20.48084	0.0000	59.97124	59.97124	0.0000	81.92336	81.92336	81.92336	0.0000
P-P	5.198072	5.198070	0.0000	15.07084	15.07084	0.0000	20.79229	20.79229	20.79229	0.0000
C-G	5.198072	5.198070	0.0000	15.07084	15.07084	0.0000	-	20.79229	20.79229	0.0000
C-P	10.52729	10.52729	0.0000	30.72426	30.72426	0.0000	42.10918	42.10918	42.10918	0.0000

Таблиця 4 – Безрозмірна критична сили стискання $\tilde{P}$ однорідної балки змінного перерізу:

$$I(x) = I_0(1 - c_b x/L)^3$$

c_b BCs	-0.5			0.5			1.0			
	[8]	МДП	Похиб., %	[8]	МДП	Похиб., %	[13]	[8]	МДП	Похиб., %
C-F	1.336426	1.33643	0.0003	3.55101	3.55101	0.0000	-	4.612119	4.612120	0.0000
C-C	14.34849	14.34849	0.0000	73.21719	73.21719	0.0000	-	114.7879	114.7879	0.0000
P-P	3.627812	3.62781	0.0001	18.37562	18.37562	0.0000	-	29.02250	29.02250	0.0000
C-G	3.757964	3.75796	0.0001	18.60382	18.60382	0.0000	-	30.06371	30.06371	0.0000
C-P	7.362241	7.36224	0.0000	37.49811	37.49811	0.0000	-	58.95769	58.95769	0.0000

Аксіально неоднорідна балка постійного перерізу. У подальшому аналізі розглядалася балка постійного прямокутного перерізу з неоднорідного матеріалу. Вважалось, що балка виготовлена з алюмінієвого сплаву, властивості якого змінюються вздовж її осі відповідно до експоненціального закону:

$$E_{11}(x) = E_{11}^0 e^{ax/L}, \quad \rho(x) = \rho^0 e^{ax/L},$$

де значення сталих при $x = 0$ відповідають модулю пружності і густині алюмінієвого сплаву з попередніх прикладів, а коефіцієнт Пуассона

сплаву приймався незмінним по довжині балки; a – експоненціальна стала.

У табл. 5 наведено результати розрахунків безрозмірної критичної сили стискання для різних типів закріплення балки (C-F, C-C, P-P, C-P) і значень сталої a (-1.0 , -0.5 , 0.5 , 1.0), які порівнюються з даними, відомими в літературі.

Слід зазначити, що результати розрахунку за допомогою МДП відмінно узгоджуються з референтними даними з практично нульовою відносною похибкою між ними.

Таблиця 5 – Безрозмірна критична сили стискання $\tilde{P}$ неоднорідної балки постійного перерізу

a BCs	-1.0			-0.5			0.5			1.0		
	[8]	МДП	Похиб., %	[8]	МДП	Похиб., %	[8]	МДП	Похиб., %	[8]	МДП	Похиб., %
C-F	1.782102	1.782100	0.0001	2.112127	2.112130	0.0001	2.844778	2.844780	0.0001	3.241181	3.241180	0.0000
C-C	23.49004	23.49004	0.0000	30.59835	30.59835	0.0000	50.44816	50.44816	0.0000	63.85255	63.85254	0.0000
P-P	5.826546	5.826550	0.0001	7.634493	7.634490	0.0000	12.58715	12.58715	0.0000	15.83820	15.83819	0.0000
C-G	5.972525	5.972530	0.0001	7.682708	7.682710	0.0000	12.66664	12.66664	0.0000	16.23501	16.23501	0.0000
C-P	11.98839	11.98839	0.0000	15.63991	15.63991	0.0000	25.78255	25.78255	0.0000	32.55492	32.55492	0.0000

Аксіально неоднорідна балка змінного перерізу. Наступним розглянуто балку змінного прямокутного поперечного перерізу, у якій ширина та висота можуть змінюватися одночасно вздовж довжини згідно лінійного закону звуження, тобто $m=1$ і $n=1$ у рівняннях (1). Матеріалом балки є алюмінієвий сплав, механічні властивості якого варіюються в осьовому напрямку згідно розподілу:

$$E_{11}(x) = E_{11}^0(1 + x/L), \quad \rho(x) = \rho^0(1 + x/L).$$

Тут значення модуля пружності і густини при

$x = 0$ знову відповідають тим же характеристикам того самого алюмінієвого сплаву, як і в попередніх прикладах, а також значенню коефіцієнта Пуассона сплаву постійного уздовж довжини.

Результати розрахунків, які зіставлені з відомими літературними даними, наведено в табл. 6 для різних умов закріплення (C-F, C-C, P-P, C-P) та значень коефіцієнтів звуження c_b і c_h (0.2 , 0.4 , 0.6).

Проведене порівняння з відомими даними підтверджує високу точність отриманих

результатів. Розраховані значення критичної сили майже повністю збігаються з референтними.

Аксіально армована функціонально-градієнтна ММК балка змінного перерізу. Остаточо, проаналізовано стійкість ММК балки зі змінним прямокутним перерізом. Матеріал балки –

алюмінієва матриця, армована вуглецевими нанотрубками, які функціонально-градієнтно розподілені уздовж осі балки згідно співвідношень (5). Механічні властивості кожного з компонентів композиту наведено в табл. 7.

Таблиця 6 – Безрозмірна критична сили стискання $\tilde{P}$ неоднорідної балки змінного перерізу

BCs	c_b c_h	0.2			0.4			0.6		
		[8]	МДП	Похиб., %	[8]	МДП	Похиб., %	[8]	МДП	Похиб., %
C-F	0.2	2.463779	2.463785	0.0002	2.291515	2.291490	0.0011	2.099165	2.099192	0.0013
	0.4	1.958547	1.958546	0.0001	1.798693	1.798836	0.0080	1.619887	1.619980	0.0057
	0.6	1.421546	1.421709	0.0115	1.279989	1.279844	0.0113	1.120782	1.120834	0.0046
C-C	0.2	37.60233	37.60233	0.0000	32.96384	32.96384	0.0000	27.81708	27.81708	0.0000
	0.4	25.08904	25.08904	0.0000	21.78129	21.78129	0.0000	18.13316	18.13316	0.0000
	0.6	14.39583	14.39583	0.0000	12.32658	12.32658	0.0000	10.06392	10.06392	0.0000
P-P	0.2	9.597121	9.597121	0.0000	8.454289	8.454289	0.0000	7.228449	7.228449	0.0000
	0.4	6.471476	6.471476	0.0000	5.622776	5.622776	0.0000	4.716370	4.716370	0.0000
	0.6	3.789166	3.789166	0.0000	3.228315	3.228315	0.0000	2.633792	2.633792	0.0000
C-P	0.2	19.33541	19.33541	0.0000	16.97287	16.97287	0.0000	14.39114	14.39114	0.0000
	0.4	12.92766	12.92766	0.0000	11.21832	11.21832	0.0000	9.357427	9.357427	0.0000
	0.6	7.447400	7.447400	0.0000	6.361291	6.361291	0.0000	5.186232	5.186232	0.0000

Таблиця 7 – Механічні властивості ММК на основі алюмінієвої матриці

Компонент ММК	E_{11} , ГПа	ρ , кг/м ³	ν	η_1		
				V_{CNT}^*		
				0.12	0.17	0.28
Al-матриця	0.071	2602	0.3	-	-	-
CNT	600	1400	0.175	1.283	1.341	1.323

Розрахунки проведено для різних схем закріплення кінців балки (C-F, C-C, P-P), значень коефіцієнтів звуження c_b і c_h (0.2, 0.4, 0.6) у випадку лінійно звуженої балки, об'ємної частки нанотрубок V_{CNT}^* (0.12, 0.17, 0.28), а також степеневого показника q (0, 0.5, 1, 2, 3, 5). Значення безрозмірної критичної сили для випадку $q = 2$ наведено в табл. 8–10, відповідно.

Отримані результати продемонстрували, що жорсткіші граничні умови забезпечують вищі значення критичної сили, з максимальними значеннями у випадку жорстко закріплених кінців балки. Водночас збільшення коефіцієнтів звуження призводить до помітного зниження критичної сили, найменші значення якої спостерігалися при коефіцієнтах, що дорівнюють 0.8.

Результати, подані в табл. 8 і 9, свідчили про зменшення критичної сили зі зростанням степеневого показника за незмінної об'ємної частки вуглецевих нанотрубок. Така тенденція пояснюється поступовим зниженням жорсткості балки у напрямку до її протилежного кінця, оскільки концентрація нанотрубок зменшується вздовж довжини при зростанні параметра q .

Разом з тим, як показано в таблицях 9–11, збільшення об'ємної частки нанотрубок V_{CNT}^* сприяло зростанню критичної сили, що пов'язано з покращенням жорсткісних властивостей матеріалу метал-матричного композиту.

Таблиця 8 – Безрозмірна критична сили стискання $\tilde{P}$ аксіально армованої ФГ-ММК балки змінного перерізу з $V_{CNT}^* = 0.12$, $q = 0.5$

c_b c_h	0.2			0.4			0.6			0.8		
	C-F	C-C	P-P	C-F	C-C	P-P	C-F	C-C	P-P	C-F	C-C	P-P
0.2	3.16275	2.87874	2.56020	2.17773	43.2847	37.4149	30.9592	23.3670	11.1940	9.67700	8.06070	6.25655
0.4	2.34832	2.10367	1.83044	1.50413	27.6852	23.7007	19.3470	14.2790	7.13262	6.08185	4.96935	3.73782
0.6	1.53410	1.34178	1.12927	0.87930	14.9722	12.6473	10.1294	7.2396	3.85832	3.22821	2.56701	1.84411
0.8	0.72730	0.61045	0.48471	0.34275	5.45184	4.50721	3.49815	2.36581	1.42232	1.15383	0.87591	0.57924

Таблиця 9 – Безрозмірна критична сили стискання $\tilde{P}$ аксіально армованої ФГ-ММК балки змінного перерізу з $V_{CNT}^* = 0.12$, $q = 2$

c_b c_h	0.2			0.4			0.6			0.8		
	C-F	C-C	P-P	C-F	C-C	P-P	C-F	C-C	P-P	C-F	C-C	P-P
0.2	2.81227	2.54384	2.24666	1.89905	33.1666	28.6140	23.6260	17.7934	7.87256	6.78183	5.62714	4.35143
0.4	2.04998	1.82571	1.57872	1.29139	21.1063	18.0461	14.7130	10.8518	4.97025	4.22881	3.44820	2.59201
0.6	1.31504	1.14497	0.95960	0.74671	11.3765	9.60596	7.69273	5.50452	2.67422	2.23686	1.77988	1.28399
0.8	0.62216	0.52149	0.41415	0.29453	4.15891	3.43980	2.67258	1.81256	0.99928	0.81348	0.62165	0.41731

Таблиця 10 – Безрозмірна критична сили стискання $\tilde{P}$ аксіально армованої ФГ-ММК балки змінного перерізу з $V_{CNT}^* = 0.17$, $q = 2$

c_b c_h	0.2			0.4			0.6			0.8		
	C-F	C-C	P-P	C-F	C-C	P-P	C-F	C-C	P-P	C-F	C-C	P-P
0.2	3.19060	2.87157	2.51911	2.10791	36.2366	31.1796	25.6503	19.2057	8.50297	7.29704	6.02326	4.62052
0.4	2.29003	2.02861	1.74169	1.40950	22.8802	19.5140	15.8548	11.6294	5.30874	4.50101	3.65259	2.72523
0.6	1.43766	1.24498	1.03599	0.79757	12.2060	10.2830	8.20896	5.84393	2.81582	2.34827	1.86083	1.33371
0.8	0.65812	0.54916	0.43356	0.30568	4.39353	3.62687	2.81030	1.89726	1.03145	0.83794	0.63849	0.42674

Таблиця 11 – Безрозмірна критична сили стискання $\tilde{P}$ аксіально армованої ФГ-ММК балки змінного перерізу з $V_{CNT}^* = 0.28$, $q = 2$

c_b c_h	0.2			0.4			0.6			0.8		
	C-F	C-C	P-P	C-F	C-C	P-P	C-F	C-C	P-P	C-F	C-C	P-P
0.2	3.87612	3.46217	3.00624	2.47642	41.6306	35.6766	29.1860	21.6568	9.63498	8.22051	6.73124	5.09879
0.4	2.71799	2.38850	2.02869	1.61497	25.9754	22.0696	17.8364	12.9707	5.91379	4.98715	4.01705	2.96199
0.6	1.65162	1.41890	1.16817	0.88487	13.6395	11.4508	9.09674	6.42444	3.06789	2.54669	2.00507	1.42228
0.8	0.71922	0.59624	0.46667	0.32472	4.79239	3.94440	3.04351	2.03993	1.08869	0.88157	0.66861	0.44302

Висновки. У цьому дослідженні виконано моделювання та аналіз стійкості аксіально функціонально градієнтних метало-матричних композитних балок зі змінним прямокутним поперечним перерізом. Для розв'язання задачі стійкості, яка представлена у вигляді диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, пов'язаними з неоднорідністю та функціонально-градієнтними властивостями матеріалів, параметри яких змінюються вздовж осі координати, а також з урахуванням варіації поперечного перерізу вздовж довжини балки, застосовано метод диференціальних перетворень. Запропонований підхід забезпечив практичний і ефективний спосіб розв'язання поставленої задачі.

Результати розрахунків показали, що застосування аксіально функціонально градієнтних метал-матричних композитів суттєво підвищує стійкість балок зі змінним прямокутним поперечним перерізом порівняно з однорідними матеріалами. Зміна властивостей матеріалу вздовж осі балки дозволяє оптимізувати розподіл напружень і підвищити критичні навантаження, а врахування неоднорідності матеріалу та варіації геометричних параметрів забезпечує більш точну інженерну оцінку поведінки балочних конструкцій.

Водночас вплив термомеханічних ефектів, динамічної стійкості та нелінійних деформацій потребує подальших досліджень і становить напрями подальших досліджень авторів.

Список літератури

1. Gupta P.K., Trivedi A.K., Gupta M.K., Dixit M. Metal matrix composites for sustainable products: A review on current development. *Proc. Inst. Mech. Eng., Part L*, 2024, vol. 238 N. 10, pp. 1827-1864.
2. Pooja Km., Tarannum N., Chaudhary P. Metal matrix composites: revolutionary materials for shaping the future. *Discover Materials*, 2024, vol. 5, N. 35, pp. 1-45.
3. Burlayenko, V.N., Altenbach H., Sadowski, T. Dynamic fracture analysis of sandwich composites with face sheet/core debond by the finite element method. In: Altenbach, H., et al. (eds). *Dynamical Processes in Generalized Continua and Structures. Advanced Structured Materials*, 2019, vol. 103, pp. 163-194. Springer, Cham.
4. Divakar S., Sardar S., Sah S., Das D. A state-of-the-art review on SiC and MWCNTs reinforced hybrid metal matrix composites: Processing, properties, and applications. *Hybrid Advances*, 2025, vol. 10, 100454.
5. Huang Y., Luo Q.Z. A simple method to determine the critical buckling loads for axially inhomogeneous beams with elastic restraint. *Comput. Math. App.* 2011, vol. 61, pp. 2510-2517.
6. Shahba A., Attamejad R., Marvi M.T., Hajilar S. Free

- vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions. *Compos. Part B*, 2011, vol. 42, pp. 801-808.
7. Yilmaz Y., Girgin Z., Evran S. Buckling analyses of axially functionally graded nonuniform columns with elastic restraint using a localized differential quadrature method. *Math. Probl. Eng.*, 2013, vol. 2013, pp. 1-12.
 8. Kitipornchai S., Chen D., Yang J. Free vibration and elastic buckling of functionally graded porous beams reinforced by graphene platelets. *Mater. Des.*, 2017, vol. 116, pp. 656-665.
 9. Nejati M., Eslampanah A. Buckling and vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced beam under axial load. *Int. J. Appl. Mech.*, 2016, vol. 8, N. 1, pp. 1-19.
 10. Boutaleb S., Boulal A., Zidour M., et al. On the buckling response of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite imperfect beams. *Period. Polytech. Civil Eng.*, 2024, vol. 68, N. 4, pp. 1052-1063.
 11. Sitli Y., Elmhaia O., Mesmoudi S., et al. Investigating the bending and buckling behaviors of composite porous beams reinforced with carbon nanotubes and graphene platelets using a TRPIM path following mesh-free approach. *Comput. Struct.*, 2024, vol. 303, 107492.
 12. Yuan W.B., Li L.Y., Jang S.H. Dynamic stability of CNTs-reinforced non-uniform composite beams under axial excitation loading. *Comput. Mater. Sci.*, 2022, vol. 210, 111054.
 13. Eisenberger M. Buckling loads for variable cross-section members with variable axial forces. *Int. J. Solids Struct.*, 1991, vol. 27, N 2, pp. 134-143.
 14. Darbandi S.M., Firouz-Abadi R.D., Haddadpour H. Buckling of variable section columns under axial loading. *J. Eng. Mech.*, 2010, vol. 136, pp. 472-476.
 15. Huang Y., Zhang M., Rong H. Buckling analysis of axially functionally graded and non-uniform beams based on Timoshenko theory. *Acta Mech. Solida Sin.*, 2016, vol. 29, N 2, pp. 200-207.
 16. Пухов, Г.Є. Диференціальні перетворення та математичне моделювання фізичних процесів. 1986. Київ: Наукова думка
 17. Shahba A., Rajasekaran S. Free vibration and stability of tapered Euler-Bernoulli beams made of axially functionally graded materials. *Applied Mathematical Modelling*. 2012, vol. 36, N. 7, pp. 3094-3111.
 18. Burlayenko, V. N., Kouhia, R., Dimitrova, S. D. Free vibration analysis of curvilinearly tapered axially functionally graded material beams. *Applied Sciences*, 2024, vol. 14, N 15, 6446
 19. Burlayenko V.N., Sadowski T., Marsavina L. Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced beams with variable cross-section using the differential transform method. *Meccanica*, 2025, in press.
 20. Ghazaryan D., Burlayenko V.N., Avetisyan A., Bhaskar A. Free vibration analysis of functionally graded beams with non-uniform cross-section using the differential transform method. *J. Eng. Math.* 2018, vol. 110, N 1. pp. 97-121.
 21. Shen H.-S., Xiang Y. Nonlinear analysis of nanotube-reinforced composite beams resting on elastic foundations in thermal environments. *Eng. Struct.* 2013, vol. 56, pp. 698-708.
 22. El-Ashmawy A.M., Xu Y. Longitudinal modeling and properties tailoring of functionally graded carbon nanotube reinforced composite beams: A novel approach. *Appl. Math. Model.* 2020, vol. 80, pp. 161-174.
 - current development. *Proc. Inst. Mech. Eng., Part L*, 2024, vol. 238 N. 10, pp. 1827-1864.
 2. Pooja Km., Tarannum N., Chaudhary P. Metal matrix composites: revolutionary materials for shaping the future. *Discover Materials*, 2024, vol. 5, N. 35, pp. 1-45.
 3. Burlayenko, V.N., Altenbach H., Sadowski, T. Dynamic fracture analysis of sandwich composites with face sheet/core debond by the finite element method. In: Altenbach, H., et al. (eds) *Dynamical Processes in Generalized Continua and Structures. Advanced Structured Materials*, 2019, vol. 103, pp. 163-194. Springer, Cham.
 4. Divakar S., Sardar S., Sah S., Das D. A state-of-the-art review on SiC and MWCNTs reinforced hybrid metal matrix composites: Processing, properties, and applications. *Hybrid Advances*, 2025, vol. 10, 100454.
 5. Huang Y., Luo Q.Z. A simple method to determine the critical buckling loads for axially inhomogeneous beams with elastic restraint. *Comput. Math. App.* 2011, vol. 61, pp. 2510-2517.
 6. Shahba A., Attarnejad R., Marvi M.T., Hajilar S. Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions. *Compos. Part B*, 2011, vol. 42, pp. 801-808.
 7. Yilmaz Y., Girgin Z., Evran S. Buckling analyses of axially functionally graded nonuniform columns with elastic restraint using a localized differential quadrature method. *Math. Probl. Eng.*, 2013, vol. 2013, pp. 1-12.
 8. Kitipornchai S., Chen D., Yang J. Free vibration and elastic buckling of functionally graded porous beams reinforced by graphene platelets. *Mater. Des.*, 2017, vol. 116, pp. 656-665.
 9. Nejati M., Eslampanah A. Buckling and vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced beam under axial load. *Int. J. Appl. Mech.*, 2016, vol. 8, N. 1, pp. 1-19.
 10. Boutaleb S., Boulal A., Zidour M., et al. On the buckling response of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite imperfect beams. *Period. Polytech. Civil Eng.*, 2024, vol. 68, N. 4, pp. 1052-1063.
 11. Sitli Y., Elmhaia O., Mesmoudi S., et al. Investigating the bending and buckling behaviors of composite porous beams reinforced with carbon nanotubes and graphene platelets using a TRPIM path following mesh-free approach. *Comput. Struct.*, 2024, vol. 303, 107492.
 12. Yuan W.B., Li L.Y., Jang S.H. Dynamic stability of CNTs-reinforced non-uniform composite beams under axial excitation loading. *Comput. Mater. Sci.*, 2022, vol. 210, 111054.
 13. Eisenberger M. Buckling loads for variable cross-section members with variable axial forces. *Int. J. Solids Struct.*, 1991, vol. 27, N 2, pp. 134-143.
 14. Darbandi S.M., Firouz-Abadi R.D., Haddadpour H. Buckling of variable section columns under axial loading. *J. Eng. Mech.*, 2010, vol. 136, pp. 472-476.
 15. Huang Y., Zhang M., Rong H. Buckling analysis of axially functionally graded and non-uniform beams based on Timoshenko theory. *Acta Mech. Solida Sin.*, 2016, vol. 29, N 2, pp. 200-207.
 16. Pukhov G.E. *Dyferentsial'ni peretvorenniya ta matematychnye modelyuvannya fizychnykh protsesiv*. 1986. Kyiv: Naukova dumka.
 17. Shahba A., Rajasekaran S. Free vibration and stability of tapered Euler-Bernoulli beams made of axially functionally graded materials. *Applied Mathematical Modelling*. 2012, vol. 36, N. 7, pp. 3094-3111.
 18. Burlayenko, V. N., Kouhia, R., Dimitrova, S. D. Free vibration analysis of curvilinearly tapered axially functionally graded material beams. *Applied Sciences*, 2024, vol. 14, N 15, 6446.
 19. Burlayenko V.N., Sadowski T., Marsavina L. Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced

References (transliterated)

1. Gupta P.K., Trivedi A.K., Gupta M.K., Dixit M. Metal matrix composites for sustainable products: A review on

- beams with variable cross-section using the differential transform method. *Meccanica*, 2025, in press.
20. Ghazaryan D., Burlayenko V.N., Avetisyan A., Bhaskar A. Free vibration analysis of functionally graded beams with non-uniform cross-section using the differential transform method. *J. Eng. Math.* 2018, vol. 110, N 1. pp. 97-121.
 21. Shen H.-S., Xiang Y. Nonlinear analysis of nanotube-reinforced composite beams resting on elastic foundations in thermal environments. *Eng Struct.* 2013, vol. 56, pp. 698–708.
 22. El-Ashmawy A.M., Xu Y. Longitudinal modeling and properties tailoring of functionally graded carbon nanotube reinforced composite beams: A novel approach. *Appl. Math. Model.* 2020, vol. 80, pp. 161–174.

Надійшла (received) 20.06.2025

Відомості про авторів / About the authors

Бурлаєнко В'ячеслав Миколайович / Burlayenko Vyacheslav – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідувач кафедри прикладної математики; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0431-3103>; e-mail: burlayenko@yahoo.com

Львов Геннадій Іванович / Lvov Gennadiy – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0297-9227>; e-mail: gennadiy.lvov@khp.edu.ua

Дімітрова-Бурлаєнко Світлана Дімова / Dimitrova-Burlayenko Svitlana – кандидат педагогічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри вищої математики; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5019-1496>; e-mail: s.dimitrovaburlayenko@gmail.com