

*Ю. В. ШАРАБАН, О. В. ШЕХОВ*

## ОПТИМІЗАЦІЯ КОНСТРУКЦІЙ ЗУБЧАСТИХ ЗАЧЕПЛЕНЬ ПЛАНЕТАРНОГО МЕХАНІЗМУ ТИПУ 3К ЗА КРИТЕРІЄМ ТОРЦЕВОГО ПЕРЕКРИТТЯ

У статті розглядається методика оптимізації конструкцій прямозубих циліндричних зубчастих зачеплень планетарного механізму типу 3К за критерієм торцевого перекриття. Оптимізація торцевого перекриття виконується шляхом вибору значень коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс з допустимих діапазонів варіювання їх значень. Допустимі діапазони варіювання визначаються двома граничними значеннями – мінімальним і максимальним. Знайдені допустимі діапазони значень коефіцієнтів зміщень зубчастих коліс задовольняють умовам співвісності зубчастих зачеплень планетарного механізму типу 3К. Пошук допустимих діапазонів значень коефіцієнтів зміщень зубчастих коліс виконується шляхом аналізу властивостей функцій коефіцієнтів торцевого перекриття зубчастих зачеплень. Кожна така функція розглядається як функція двох величин – коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс, що утворюють відповідне зубчасте зачеплення. Побудова двовимірних графіків цих функцій дозволяє визначити характер зміни значення коефіцієнта торцевого перекриття залежно від значень коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс, які приймаються як незалежні величини. Враховуючи умову забезпечення співвісності зубчастих зачеплень, будуються функції коефіцієнтів торцевого перекриття, залежні від однієї величини – коефіцієнта зміщення одного із зубчастих коліс, що утворюють відповідне зубчасте зачеплення. Аналіз графіків цих функцій дозволяє вибрати оптимальні значення коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс.

**Ключові слова:** оптимізація; оптимальне проектування планетарних механізмів; планетарний механізм; планетарний механізм типу 3К; планетарний механізм типу 3К з двовінцевими сателітами; планетарний механізм типу 3К з одновінцевим сателітом; торцеве перекриття зубчастих зачеплень; коефіцієнт торцевого перекриття

*Ju. SHARABAN, A. SHEHOV*

## OPTIMIZATION OF GEAR DESIGNS OF A 3K TYPE PLANETARY MECHANISM ACCORDING TO THE END OVERLAP CRITERION

The article discusses the optimization methodology for the design of spur cylindrical gear engagements of the 3K type planetary mechanism based on the criterion of end overlap. Optimization of end overlap is performed by selecting the values of the gear shift coefficients from the permissible ranges of variation of their values. Permissible ranges of variation are determined by two limit values – minimum and maximum. The found permissible ranges of gear shift coefficient values satisfy the conditions of coaxiality of the gear engagements of the 3K type planetary mechanism. The search for permissible ranges of values of the coefficients of gear shifts is performed by analyzing the properties of the functions of the coefficients of the end overlap of gear engagements. Each such function is considered as a function of two quantities – the coefficients of shift of gears that form the corresponding gear engagement. The construction of two-dimensional graphs of these functions allows us to determine the nature of the change in the value of the end overlap coefficient depending on the values of the gear shift coefficients, which are taken as insignificant quantities. Taking into account the condition of ensuring the coaxiality of the gear engagements, the functions of the end overlap coefficients are constructed, depending on one value – the shift coefficient of one of the gears forming the corresponding gear engagement. Analysis of the graphs of these functions allows us to select the optimal values of the gear shift coefficients.

**Keywords:** optimization; optimal design of planetary mechanisms; planetary mechanism; planetary mechanism type 3K; planetary mechanism type 3K with twin satellites; planetary mechanism type 3K with single-crown satellite; end overlap of gears; end overlap coefficient

**Вступ.** У авіаційних електромеханічних приводах широко застосовують конструкції планетарних передач, у тому числі планетарні передачі (механізми) типу 3К. Проектування і виготовлення планетарних передач типу 3К із дрібномодульними зубчастими колесами є складним і трудомістким завданням. Як правило, складність і трудомісткість обумовлені вибором коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс планетарної передачі. Враховуючи, що цей вибір повинен забезпечити ряд обмежень за багатьма умовами (критеріями), конструктору доводиться виконувати багатокритеріальну оптимізацію параметрів конструкцій зубчастих коліс. Проте, не завжди вдається знайти прийнятне рішення з першого кроку. Доводиться виконувати декілька наближень (ітерацій) розрахункової моделі проектування. Число таких ітерацій залежить від багатьох чинників. До їх числа слід віднести алгоритм (процедуру) оптимізації. У зв'язку з цим розробка методики оптимального вибору (пошуку) коефіцієнтів зміщення проектованих конструкцій зубчастих коліс слід вважати актуальним завданням для практики проектування механічних передач.

**Аналіз існуючих досліджень.** Огляд літературних джерел проведемо по трьох напрямках: оптимальне

проектування планетарних механізмів типу 3К; оптимальне проектування конструкцій простих планетарних механізмів типу 2К-Н; методи збільшення значення коефіцієнта торцевого перекриття зубчастих передач, які можна застосувати в планетарних механізмах (передачах).

У роботі [1] наведена методика оптимального проектування планетарних механізмів типу 3К з урахуванням вимог до якісних характеристик його зубчастих зачеплень. Як критерії оптимізації прийняті обмеження, що накладаються на коефіцієнти торцевого перекриття, питомого тиску і ковзання, значення яких є функціями коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс. Методики оптимального проектування і дослідження (тестування) простої одноступінчатої коробки передач трансмісії електромобіля, в конструкції якої застосована планетарна передача типу 3К, розглядаються у роботах [2, 3]. У цих роботах приведені технології оптимального проектування планетарних передач з поліпшеною ефективністю передачі механічної потужності за рахунок застосування модифікації (коригування) профілів зубців зубчастих коліс. Для досліджуваних варіантів кінематичної схеми коробки передач будуються цільові

функції оптимізації (максимізації) коефіцієнта корисної дії (ККД). У якості змінних цільових функцій авторами були обрані числа зубців і коефіцієнти зміщення зубчастих коліс. Пошук значень чисел зубців зубчастих коліс виконувався методом грубої сили (method brute force) – методом перебору. Оптимізація виконувалася квазіньютонівським методом (quasi-Newton method). Діапазон пошуку значень коефіцієнтів зміщення склав  $[-2, 2]$ . Порівняльний аналіз ефективності передач виконувався шляхом порівняння теоретичних значень і значень їх ККД, отриманих на основі даних експериментів.

Геометричний синтез евольвентних планетарних передач із зв'язаними зубчастими колесами типу 2К-Н розглядається у роботі [4]. На основі основного закону плоского зчеплення розглянуто можливість збільшення передаточного числа дрібно модульних евольвентних циліндричних планетарних передач шляхом використання несиметричного профілю зубця для вимірювальних приладів. Наведено приклад синтезу такого редуктора шляхом оптимального вибору асиметрії між профілями зубців. Також представлено блокуючі контури безумовних областей існування в області незалежних коефіцієнтів зміщення методом прямої оптимізації та заданих якісних показників зачеплення. Нова багатоцільова оптимізація планетарної передачі з використанням дискретної версії генетичного алгоритму неомінованого сортування NSGA-II (Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm) розглядається у роботі [5]. Мінімізація ваги (маси) та загальної втрати потужності планетарного редуктора є двома цільовими функціями. Кількість зубців сонячного колеса, сателітів і епіциклу, модуль, ширина зубчастого вінця, діаметр вхідного валу і діаметр вала сателіта є змінними проектування. Було проведено дослідження трьох різних профілів зубчастих передач. Результати порівнювали з промисловою коробкою передач, що відповідає стандарту AGMA. Обмеження на коефіцієнти торцевого перекриття зубчастих зачеплень задавалися в діапазоні  $[1,2; 2]$ . У роботі представлені математичні формули і блок схема технології оптимального проектування. Розрахункова процедура для визначення коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс простого планетарного механізму типу 2К-Н (механізм Джеймса) представлена у роботі [6]. Корекція профілів зубців зубчастих коліс виконується з метою підвищення несучої здатності планетарного механізму. Геометричні розміри зубчастих коліс описані з урахуванням області технологічної корекції профілів зубців, а умови обмеження (нерівності) визначені з урахуванням рекомендацій стандартів ISO та літератури. Розглядаються два випадки: рівність ділильних міжосьових відстаней зубчастих зачеплень; нерівність ділильних міжосьових відстаней зубчастих зачеплень. У статті [7] розглядається задача обмеженої багатокритерійної нелінійної оптимізації планетарного редуктора (планетарний механізм типу 2К-Н) на основі гібридного метаевристичного алгоритму. Авторами статті було розроблено теоретичне формулювання і чисельну процедуру для розрахунку ККД, планетарної коробки передач. Для вирішення завдання багатокритерійної оптимізації був запропонований і застосований гібридний алгоритм між оптимізацією рою часток (Particle Swarm Optimization) і алгоритмами диференціальної еволюції (Differential Evolu-

tion Algorithm). Показано, що запропонований алгоритм успішно отримує розв'язки невивуклої множини Парето та реалізує ключові ідеї щодо зменшення ваги (маси), підвищення ефективності та запобігання передчасному виходу з ладу передач. Оптимізація планетарної передачі бортового редуктора танка Т-64 з використанням алгоритму методу диференціальної еволюції розглядається у роботі [8]. Запропонований підхід до оптимізації планетарних передач дозволив знизити навантаження на елементи коробки передач та зберегти габаритні розміри й конструктивні особливості бортового редуктора.

У статті [9] розглядаються загальні та прикладні процедури визначення коефіцієнтів зміщення профілю зубців циліндричної зубчастої передачі. Автор показує, чи існують якісь обмеження у виборі чи визначенні цих значень. Методи, які використовувалися раніше для вибору коефіцієнтів зміщення профілю, ґрунтувалися на передбачуваних перевагах без фізичних доказів, які б їх виправдовували. У цій статті запропоновано новий метод, який гарантує позитивний вплив на відмови зубчастих передач та умови експлуатації зубчастих пар. Автором пропонується ввести нове поняття: кумулятивна ефективність коефіцієнтів зміщення (зсуву) профілю. Пропонований автором метод вибору коефіцієнтів зміщення профілю ґрунтується на основі обстеження всієї довжини шляху контакту зубців зубчастої передачі. Підхід до оптимального вибору циліндричних зубчастих передач шляхом застосування методів параметричного оптимального проектування, моделювання та дослідження передач з евольвентним профілем, а також дослідження їх несучої здатності представлено у роботі [10]. Алгоритм вирішення проблеми оптимального проектування циліндричної зубчастої евольвентної передачі зовнішнього зачеплення включає реалізацію семи етапів (кроків). Побудови параметричної моделі геометрії зубчастої пари і відповідного блокуючого контура дозволяють вибрати оптимальні значення коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс. Оцінки якості переданого руху виконуються шляхом визначення групи показників якості, відповідно критеріїв оптимізації.

Математичні моделі оптимізації прямозубих зубчастих передач зі збільшеним коефіцієнтом торцевого перекриття розглядаються в роботах [10, 11]. У цих роботах розглядаються так звані HCR (High Contact Ratio) зубчасті зачеплення. У HCR зачепленнях збільшують робочу висоту зубців шляхом застосування нестандартних вихідних контурів зі збільшеними значеннями коефіцієнтів висоти голівки і ніжки, а також зі меншими значеннями кута профілю вихідного контуру. У роботі [11] цільова функція оптимізації коефіцієнта торцевого перекриття задавалася рівною 2. Змінними цільової функції були коефіцієнти висоти голівки зубців вихідних контурів вестерні та колеса і коефіцієнт зміщення вихідного контуру шестерні. Відомими параметрами зачеплення, що оптимізується, були прийняті: числа зубців шестерні та колеса; модуль зачеплення; ділильна міжосьова відстань передачі; кут профілю вихідного контуру. На змінні цільовій функції були накладені наступні обмеження: умова відсутності підрізання ніжок зубців шестерні та колеса; умова відсутності

загострення вершин зубців шестерні та колеса; умова відсутності інтерференції у зачепленні. Оптимізація виконувалася чисельним методом, який реалізує алгоритм узагальненої оптимізації рою часток GPSO (Generalized Particle Swarm Optimization). У роботі [12] цільова функція оптимізації коефіцієнта торцевого перекриття приймалася залежною від чотирьох змінних величин: коефіцієнтів висоти голівки зубців вихідних контурів вестерні та колеса; сумарного коефіцієнту зміщення вихідного контуру (сума коефіцієнтів зміщення вихідних контурів шестерні та колеса); кута профілю вихідного контуру. Відомими параметрами зачеплення, що оптимізується, були прийняті: числа зубців шестерні та колеса; модуль зачеплення; міжосьова відстань передачі; робоча ширина зубчастого вінця. На змінні цільової функції оптимізації накладені такі ж самі обмеження, як і в роботі [11], і додана умова забезпечення згинальної міцності зубців шестерні та колеса. Для розв'язання оптимізаційної задачі було обрано метод зондування простору параметрів, де у якості пробних точок в одиничному багатомірному кубі використовуються точки ЛПТ-послідовності.

**Мета роботи (дослідження).** Розробити методику оптимального проектування торцевого перекриття зубчастих зачеплень планетарного механізму типу 3К, застосування якої дало б конструктору в наочній формі дані про допустимі діапазони вибору коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс.

**Матеріали досліджень.** На рис. 1 показані кінематичні схеми планетарного механізму типу 3К з дво-вінцевими (рис. 1, а) і одинівцевими сателітами (рис. 1, б) відповідно.

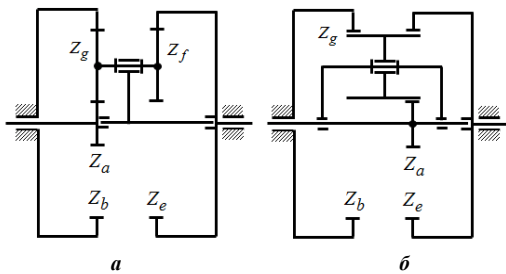


Рисунок 1 – Схема планетарного механізму типу 3К

Передаточне відношення механізму  $U_{ae}^b$ , показаного на рис. 1, а, визначають по формулі

$$U_{ae}^b = \frac{1 + \frac{Z_b}{Z_a}}{1 - \frac{Z_b}{Z_g} \frac{Z_f}{Z_e}} \quad (1)$$

Якщо числа зубців задовольняють умовам  $Z_b > Z_e$  і  $Z_g > Z_f$ , то отримаємо  $U_{ae}^b > 0$ .

Для механізму з одинівцевим сателітом, показаним на рис. 1, б, передаточне відношення  $U_{ae}^b$  визначають по формулі (1) з урахуванням рівності  $Z_g = Z_f$ . Забезпечивши умову  $Z_b < Z_e$ , тоді отримаємо  $U_{ae}^b > 0$ .

Умову забезпечення співвісності зубчастих заче-

плень планетарного механізму типу 3К має вигляд

$$\frac{m_a(Z_a + Z_g)}{\cos(\alpha_{twa})} = \frac{m_b(Z_b - Z_g)}{\cos(\alpha_{twb})} = \frac{m_e(Z_e - Z_f)}{\cos(\alpha_{twe})}, \quad (2)$$

де  $m_a, m_b, m_e$  – модулі в зачепленнях центральних зубчастих коліс  $Z_a, Z_b$  і  $Z_e$  відповідно, але  $m_a = m_b$ ;

$\alpha_{twa}, \alpha_{twb}, \alpha_{twe}$  – кути зачеплення центральних зубчастих коліс  $Z_a, Z_b$  і  $Z_e$  відповідно.

Умова (2) записана з урахуванням рівності ділильного кута  $\alpha_i$  профілю в торцевому перерізі зубчастих коліс планетарного механізму, тобто маємо рівність  $\alpha_{ta} = \alpha_{tb} = \alpha_{te}$ .

У загальному випадку умову співвісності зубчастих зачеплень 3К планетарного механізму мають вигляд

$$a_{wa} = a_{wb} = a_{we}, \quad (3)$$

де  $a_{wa} = m_a \frac{Z_a + Z_g}{2} \frac{\cos(\alpha_{ta})}{\cos(\alpha_{twa})}$  – міжосьова відстань  $a_w$  зубчастого зачеплення  $Z_a-Z_g$ ;

$a_{wb} = m_b \frac{Z_b - Z_g}{2} \frac{\cos(\alpha_{tb})}{\cos(\alpha_{twb})}$  – міжосьова відстань  $a_w$  зубчастого зачеплення  $Z_b-Z_g$ ;

$a_{we} = m_e \frac{Z_e - Z_f}{2} \frac{\cos(\alpha_{te})}{\cos(\alpha_{twe})}$  – міжосьова відстань  $a_w$  зубчастого зачеплення  $Z_f-Z_e$ .

Нехай числа зубців, модулі та профільні кути  $\alpha_i$  зубчастих коліс планетарного механізму відомі. Необхідно підібрати значення коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс, за яких виконується умова співвісності виду (3).

В якості числових значень параметрів планетарного механізму типу 3К набудемо числових значень зубчастих зачеплень, утворених дрібно модульними зубчастими колесами. Параметри цих коліс такі:  $Z_a=17$ ;  $Z_g=29$ ;  $Z_b=73$ ;  $Z_f=29$ ;  $Z_e=76$ ;  $m_a = m_b = m_e = 0,4$  мм;  $\alpha_{ta} = \alpha_{tb} = \alpha_{te} = 20^\circ$ . Передаточне відношення механізму  $U_{ae}^b = 134,1176$ .

Для кожного зубчастого зачеплення планетарного механізму 3К розглянемо функцію залежності міжосьової відстані  $a_w$  залежно від кута зачеплення  $\alpha_{tw}$ :

$$\begin{aligned} a_{wa} &= a_{wa}(\alpha_{twa}), \\ a_{wb} &= a_{wb}(\alpha_{twb}), a_{we} = a_{we}(\alpha_{twe}). \end{aligned} \quad (4)$$

Задаємо діапазон зміни можливих значень кута зачеплення:

$$\alpha_{twn} \leq \alpha_{tw} \leq \alpha_{twb}, \quad (5)$$

де  $\alpha_{twn}, \alpha_{twb}$  – нижнє і верхнє значення діапазону зміни кута  $\alpha_{tw}$ .

На рис. 2 показані графіки функцій  $a_w = a_w(\alpha_{tw})$  для зубчастих зачеплень планетарного механізму типу 3К. Графіки були побудовані для діапазону зміни кутів зачеплення від  $10^\circ$  до  $40^\circ$ .

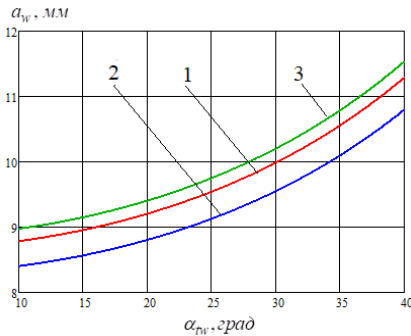


Рисунок 2 – Функції  $a_w = a_w(\alpha_{tw})$  зубчастих зачеплень планетарного механізму типу 3К:  
1 – зачеплення  $Z_a-Z_g$ ; 2 – зачеплення  $Z_g-Z_b$ ;...  
3 – зачеплення  $Z_f-Z_e$

Необхідно визначити кути зачеплень зубчастих коліс, при яких міжосьова відстань  $a_{wa} = a_{wb} = a_{we} = a_w^* = 9,4041$  мм.

Рішення рівняння (3) графічним методом показано на рис. 3.

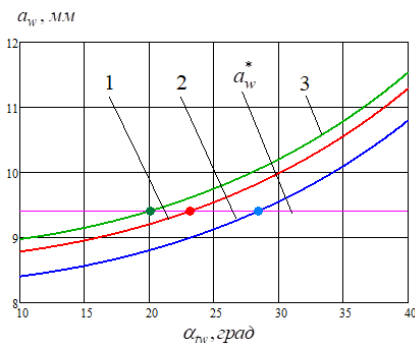


Рисунок 3 – Графіки функцій  $a_w = a_w(\alpha_{tw})$  зубчастих зачеплень планетарного механізму типу 3К і лінія заданої міжосьової відстані  $a_w^*$ :

- 1 – зачеплення  $Z_a-Z_g$ ; 2 – зачеплення  $Z_g-Z_b$ ;  
3 – зачеплення  $Z_f-Z_e$

Точки перетину графіків  $a_w = a_w(\alpha_{tw})$  та лінії заданої міжосьової відстані  $a_w(\alpha_{tw}) = a_w^*$  на рис. 3 показані кружками відповідного кольору. Отримано такі значення кутів зачеплень зубчастих коліс:  $\alpha_{twa}^* = 23,1762^\circ$ ;  $\alpha_{twb}^* = 28,4384^\circ$ ;  $\alpha_{twe}^* = 20,0684^\circ$ .

Знаходимо коефіцієнт суми зміщень для зовнішнього зубчастого зачеплення  $Z_a-Z_g$

$$x_{\Sigma ag} = \frac{(\text{inv}(\alpha_{twa}^*) - \text{inv}(\alpha_{ta})) (Z_a + Z_g)}{2 \text{tg} \alpha_{ta}} = 0,55. \quad (6)$$

Знаходимо коефіцієнти різниці зміщень для внутрішніх зубчастих зачеплень  $Z_g-Z_b$  та  $Z_f-Z_e$

$$x_{Dbg} = \frac{(\text{inv}(\alpha_{twb}^*) - \text{inv}(\alpha_{tb})) (Z_b - Z_g)}{2 \text{tg} \alpha_{tb}} = 1,8325, \quad (6)$$

$$x_{Def} = \frac{(\text{inv}(\alpha_{twe}^*) - \text{inv}(\alpha_{te})) (Z_e - Z_f)}{2 \text{tg} \alpha_{te}} = 0,0103. \quad (7)$$

Значення коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс повинні задовольняти наступним рівнянням

$$x_a + x_g = x_{\Sigma ag}, \quad (8)$$

$$x_b - x_g = x_{Dbg}, \quad (9)$$

$$x_e - x_f = x_{Def}. \quad (10)$$

Рівняння (8)–(10) утворюють систему 3 лінійних алгебраїчних рівнянь щодо 5 значень коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс для випадку двовінцевих сателітів. У разі одновінцевих сателітів число невідомих коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс дорівнюватиме 4.

Таким чином, для розв'язування системи рівнянь (8)–(10) необхідно задати одне значення коефіцієнта зміщення у разі одновінцевих сателітів або два значення коефіцієнтів зміщення у разі двовінцевих сателітів. При цьому в якості значень, що задаються, можна вибирати будь-які коефіцієнти зміщення. Можливий інший підхід для визначення значень коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс, ґрунтований на рішенні трьох оптимізаційних задач [1]. При постановці цих задач рівняння (8)–(10) розглядатимуться як обмеження для пошуку оптимальних рішень. До цих обмежень потрібно буде додати ще обмеження на діапазони варіювання шуканих змінних.

Розглянемо приклад розв'язання системи рівнянь (8)–(10) для випадку одновінцевого сателіта. Нехай прийнято рішення, що коефіцієнт зміщення для сателіта  $x_g^* = 0,25$ .

Враховуючи рівність  $x_f = x_g = 0,25$ , отримаємо наступний розв'язок системи рівнянь (8)–(10):  $x_a = 0,3$ ;  $x_b = 2,0825$ ;  $x_e = 0,2603$ .

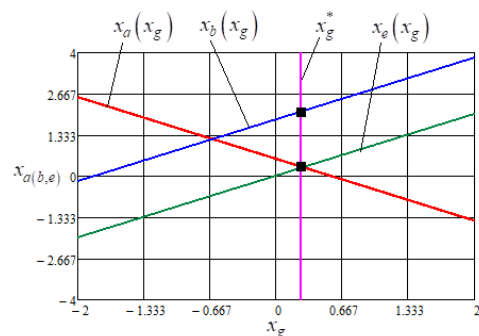


Рисунок 4 – Графічне розв'язування системи рівнянь (8)–(10)

Розв'язок системи рівнянь (8)–(10) графічним методом показано на рис. 4. Точки перетину графіків  $x_a = x_a(x_g)$ ,  $x_b = x_b(x_g)$ ,  $x_e = x_e(x_g)$  та лінії заданого значення коефіцієнта зміщення  $x_g^*$  на рис.4 показані квадратиком чорного кольору.

Оскільки значення знайдених коефіцієнтів зміщення  $x_a$  і  $x_e$  є близькими ( $x_a \approx x_e$ ), то на рис. 4

вони відзначені одним квадратиком.

Коефіцієнти торцевого перекриття зубчастих зачеплень визначаються по формулі

$$(\varepsilon_{\alpha})_{pq} = \frac{z_p \cdot \operatorname{tg}(\alpha_{ap}) \pm z_q \cdot \operatorname{tg}(\alpha_{aq})}{2\pi} \mp \frac{(z_p \pm z_q) \cdot \operatorname{tg}(\alpha_{twpq})}{2\pi} \quad (11)$$

Тут  $p = a, g, f$ ,  $q = g, b, e$  – індекси зубчастих коліс планетарного механізму типу 3К, схема якого наведена на рис. 1, причому індекс  $p$  вказує на шестерню, а індекс  $q$  – на колесо відповідно зубчастого зачеплення  $Z_p - Z_q$ ;  $\alpha_{api}$ ,  $\alpha_{aqi}$  – кути профілю зубця на колі вершин зубчастого колеса  $Z_p$  і  $Z_q$  відповідно,  $\alpha_{twpq}$  – кут зачеплення зубчастих коліс  $Z_p$  і  $Z_q$  відповідно.

У формулі (11) верхні знаки відповідають зовнішньому, а нижні – внутрішньому зубчастому зачепленню.

Отримані наступні результати розрахунків, виконаних по формулі (11):  $(\varepsilon_{\alpha})_{ag} = 1,415$ ;  $(\varepsilon_{\alpha})_{gb} = 1,547$ ;  $(\varepsilon_{\alpha})_{fe} = 1,564$ .

Отримаємо оцінку вибору значень коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс за критерієм максимального значення коефіцієнта торцевого перекриття зубчастих зачеплень  $Z_a - Z_b$ ,  $Z_g - Z_b$  і  $Z_g - Z_b$  відповідно.

Введемо до розгляду для кожного зубчастого зачеплення функції залежності значення коефіцієнта торцевого перекриття зачеплення від значень коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс, що утворюють зачеплення. При цьому варійовані значення коефіцієнтів зміщення задовольняють двом умовам: кожен коефіцієнт зміщення задається в заданому діапазоні значень; сума (для зовнішнього зачеплення) або різниця (для внутрішнього зачеплення) дорівнює заданому значенню.

Функція коефіцієнта торцевого перекриття зовнішнього зачеплення  $Z_a - Z_b$  як функція двох незалежних змінних записується у вигляді

$$\varepsilon_{\alpha_{ag}} = \varepsilon_{\alpha_{ag}}(x_a, x_g) = \frac{z_a \cdot \operatorname{tg}(\alpha_{aa})}{2\pi} + \frac{z_g \cdot \operatorname{tg}(\alpha_{ag})}{2\pi} - \frac{(z_a + z_g) \cdot \operatorname{tg}(\alpha_{twa})}{2\pi}, \quad (12)$$

де кути  $\alpha_{aa}$ ,  $\alpha_{aa}$  і  $\alpha_{ag}$  є функціями коефіцієнтів зміщення  $x_a$  та  $x_g$ , числа зубців  $z_a$  і  $z_g$  є параметрами.

**Зубчасте зачеплення  $Z_a - Z_g$ .** На рис. 5 показаний графік функції (12), що відображає характер залежності коефіцієнта торцевого перекриття зубчастого зачеплення  $Z_a - Z_g$  від значень коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс.

Графік функції  $\varepsilon_{\alpha_{ag}}(x_a, x_g)$  був побудований для прямокутної області можливих значень коефіцієнтів

$x_a$  та  $x_g$ . Прямокутна область, де  $x_a \in [x_{a \min}, x_{a \max}]$  і  $x_g \in [x_{g \min}, x_{g \max}]$ , задавалася наступними параметрами:  $x_{a \min} = 0,006$ ;  $x_{a \max} = 2$ ;  $x_{g \min} = -0,696$ ;  $x_{g \max} = 2$ . Значення  $x_{a \min}$  і  $x_{g \min}$  визначалися з умови відсутності підрізання зубців. Значення параметрів  $x_{a \max}$  і  $x_{g \max}$  були набуті такими, як при побудові графічного розв'язку системи рівнянь (8)–(10) (рис. 4). При цьому слід зазначити, що при таких значеннях буде присутньою інтерференція зубців і значення коефіцієнта торцевого перекриття, розраховане по формулі (12), буде невірним. Проте для поточного аналізу набутих значень параметрів  $x_{a \max}$  і  $x_{g \max}$  вважатимемо прийнятними.

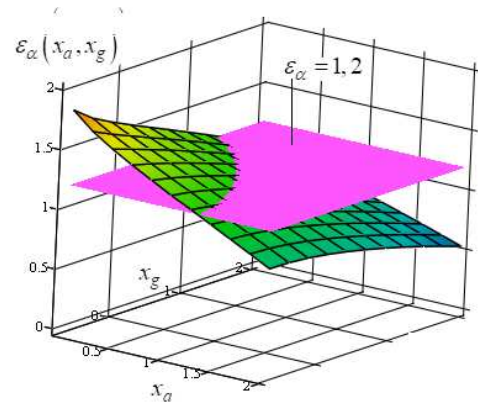


Рисунок 5 – Графік функції  $\varepsilon_{\alpha}(x_a, x_g)$  з урахуванням обмежень на її значення

Лінія перетину поверхні функції  $\varepsilon_{\alpha_{ag}}(x_a, x_g)$  і площини  $\varepsilon_{\alpha} = 1,2$  (рис. 5), яка задає значення коефіцієнта торцевого перекриття, рівне 1,2, визначає значення коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс, при яких функція  $\varepsilon_{\alpha_{ag}}(x_a, x_g) = 1,2$ .

У разі, коли задається значення кута зачеплення, то функція коефіцієнта торцевого перекриття (12) буде функцією однієї незалежної змінної. В якості цієї змінної можна вибрати коефіцієнт зміщення будь-якого колеса зубчастого зачеплення  $Z_a - Z_g$ .

Отже, маємо наступну функцію однієї незалежної змінної

$$\varepsilon_{\alpha_{ag}} = \varepsilon_{\alpha_{ag}}(x) = \frac{z_a \cdot \operatorname{tg}(\alpha_{aa})}{2\pi} + \frac{z_g \cdot \operatorname{tg}(\alpha_{ag})}{2\pi} - \frac{(z_a + z_g) \cdot \operatorname{tg}(\alpha_{twa}^*)}{2\pi}. \quad (13)$$

Позначимо коефіцієнти зміщення зубчастих коліс зовнішнього зачеплення  $Z_a - Z_g$  через  $x_1$  і  $x_2$  відповідно. Коефіцієнт зміщення  $x_1$  прийматимемо як варійовану (змінну) величину, а коефіцієнт зміщення  $x_2$  – як залежну величину.

Введемо наступну функцію однієї незалежної змінної

$$f_{ag\_x2}(x_1) = x_{\Sigma ag} - x_1, \quad (14)$$

де  $x_1$  – коефіцієнт зміщення зовнішнього зубчастого зачеплення  $Z_a-Z_g$ , що задається (може бути як  $x_a$  або як  $x_g$ );

$x_{\Sigma ag}$  – коефіцієнт суми зміщень для зовнішнього зубчастого зачеплення  $Z_a-Z_g$ , при якому кут зачеплення дорівнює  $\alpha_{nva}^*$ .

Таким чином, функція (14) визначає значення коефіцієнта зміщення  $x_2$ . Для системи координат  $x_a, x_g$  графік цієї функції є прямою лінією, яка перетинає координатні осі під кутом  $45^\circ$ .

Обчислення функції (13), ґрунтоване на зверненні до функції (12), показане нижче:

$$\varepsilon_{\alpha-ag}(x) = \begin{cases} \varepsilon_{\alpha-ag}(x, f_{ag-x_2}(x)), & x = x_1 = x_a; \\ \varepsilon_{\alpha-ag}(f_{ag-x_2}(x), x), & x = x_1 = x_g. \end{cases} \quad (15)$$

Із (15) видно, що від варіанту вибору коефіцієнта зміщення  $x_1$ , маємо дві функціональні залежності.

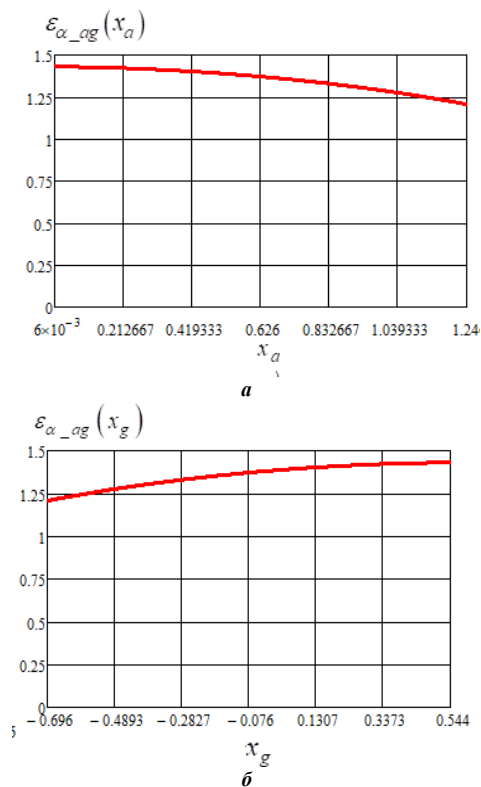


Рисунок 6 – Графіки функції  $\varepsilon_{\alpha-ag}(x)$

На рис. 6 показані графіки функції (15). Максимальні значення функцій виду (15) визначаються при  $x = 0,006$  у разі вибору  $x = x_a$ , і при  $x = 0,544$  у разі вибору  $x = x_g$ . В результаті маємо однакові значення максимумів, рівні 1,4305.

Таким чином, аналіз властивостей функціональних залежностей виду (15) дозволяє оптимізувати вибір коефіцієнтів зміщення зубчастих колі зачеплення  $Z_a-Z_g$ , що задовольняють умовам забезпечення заданого кута зачеплення  $\alpha_{nva}^*$  і найбільш прийнятному значенню

коєфіцієнта торцевого перекриття  $\varepsilon_{\alpha-ag}$ .

Зв'язок функцій  $\varepsilon_{\alpha-ag}(x_a, x_g)$ ,  $\varepsilon_{\alpha-ag}(x)$  і  $f_{ag-x_2}(x_1)$  продемонстрований на рис. 7.

Площина  $\Pi$ , яка перпендикулярна координатній площині  $x_a, x_g$ , проходить через відрізок прямої лінії  $F$  графіку функції  $f_{ag-x_2}(x_1)$ . Лінія перетину  $L$  площини  $\Pi$  з поверхнею функції  $\varepsilon_{\alpha-ag}(x_a, x_g)$  утворює графік функції  $\varepsilon_{\alpha-ag}(x)$ . Відрізок прямої лінії  $F$ , показаний на рис. 7, задавався на координатній площині  $x_a, x_g$  двома точками. Координати цих точок  $(x_a, x_g)$  дорівнювали: (0,006, 0,544); (2, 1,45). Перпендикуляр до координатної площини  $h$ , опущений з правої граничної точки відрізка лінії  $L$ , перетне точку відрізка лінії  $F$  з координатами (1,246, -0,696) (див. рис. 6, а). У цій точці координатної площини  $x_a, x_g$  значення функції  $\varepsilon_{\alpha-ag}(x_a, x_g)$  дорівнює 1,2066.

Аналіз характеру лінії  $L$  (рис. 6) показує, що зміна значення функції торцевого перекриття (15) відбувається в діапазоні  $1,2066 \leq \varepsilon_{\alpha-ag}(x) \leq 1,4305$ .

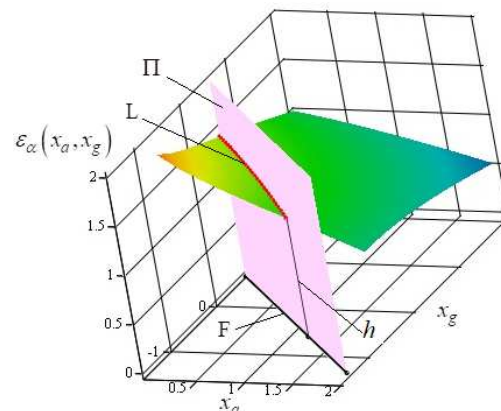


Рисунок 7 – Графіки функцій  $\varepsilon_{\alpha-ag}(x_a, x_g)$ ,  $\varepsilon_{\alpha-ag}(x)$  і  $f_{ag-x_2}(x_1)$

Отже, аналіз властивостей функціональних залежностей виду (15) дозволяє оптимізувати вибір коефіцієнтів зміщення зубчастих колі зачеплення  $Z_a-Z_g$ , що задовольняють умовам забезпечення заданого кута зачеплення  $\alpha_{nva}^*$  і найбільш прийнятному значенню коефіцієнта торцевого перекриття  $\varepsilon_{\alpha-ag}$ .

**Зубчасте зачеплення  $Z_a-Z_b$ .** Функція коефіцієнта торцевого перекриття внутрішнього зачеплення  $Z_g-Z_b$  як функція двох незалежних змінних записується у вигляді

$$\varepsilon_{\alpha-gb} = \varepsilon_{\alpha-gb}(x_g, x_b) = \frac{z_g \cdot \operatorname{tg}(\alpha_{ag})}{2\pi} - \frac{z_b \cdot \operatorname{tg}(\alpha_{ab})}{2\pi} + \frac{(z_b - z_g) \cdot \operatorname{tg}(\alpha_{twb})}{2\pi} \quad (16)$$

де кути  $\alpha_{nb}$ ,  $\alpha_{ag}$  і  $\alpha_{ab}$  є функціями коефіцієнтів змі-

щення  $x_g$  та  $x_b$ , числа зубців  $z_g$  і  $z_b$  є параметрами.

На рис. 8 показаний графік функції (16), що відображає характер залежності коефіцієнта торцевого перекриття зубчастого зачеплення  $Z_g-Z_b$  від значень коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс.

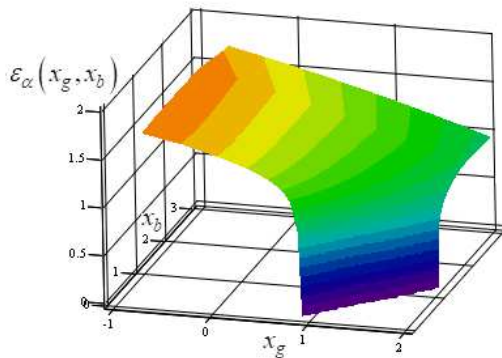


Рисунок 8 – Графік функції  $\varepsilon_\alpha(x_g, x_b)$

Графік функції  $\varepsilon_{\alpha_{gb}}(x_g, x_b)$  був побудований для прямокутної області можливих значень коефіцієнтів зміщення  $x_g$  та  $x_b$ . Прямокутна область, де  $x_g \in [x_{g \min}, x_{g \max}]$  і  $x_b \in [x_{b \min}, x_{b \max}]$ , задавалася наступними параметрами:  $x_{g \min} = -0,696$ ;  $x_{g \max} = 2$ ;  $x_{b \min} = 0$ ;  $x_{b \max} = 2,0825$ . Значення  $x_{g \min}$  і  $x_{b \min}$  визначалися з умови відсутності підрізання зубців. Значення параметрів  $x_{g \max}$  і  $x_{b \max}$  були набуті такими, як при побудові графічного розв'язку системи рівнянь (8)–(10) (див. рис. 3).

Лінія перетину поверхні функції  $\varepsilon_{\alpha_{gb}}(x_g, x_b)$  і площини  $\varepsilon_\alpha = 1,2$  (рис. 9), що задає значення коефіцієнта торцевого перекриття, рівне 1,2, визначає значення коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс, при яких функція  $\varepsilon_{\alpha_{gb}}(x_g, x_b) = 1,2$ .

У разі, коли задається значення кута зачеплення  $\alpha_{nb}$ , то функція коефіцієнта торцевого перекриття (16) буде функцією однієї незалежної змінної. В якості цієї змінної можна вибрати коефіцієнт зміщення будь-якого колеса зубчастого зачеплення  $Z_g-Z_b$ .

Введемо наступні функції однієї незалежної змінної

$$f_{gb-x_2}(x_1) = x_{Dbg} + x_1, \quad (17)$$

$$ff_{gb-x_2}(x_1) = x_1 - x_{Dbg}, \quad (18)$$

де  $x_1$  – коефіцієнт зміщення внутрішнього зубчастого зачеплення  $Z_g-Z_b$ , що задається (може бути як  $x_g$  або як  $x_b$ );

$x_{Dbg}$  – коефіцієнт різниці зміщень для внутрішнього зубчастого зачеплення  $Z_g-Z_b$ , при якому кут

зачеплення дорівнює  $\alpha_{nb}^*$ .

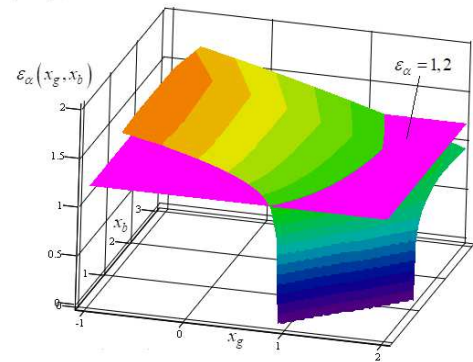


Рисунок 9 – Графіки функцій  $\varepsilon_\alpha(x_g, x_b)$  і  $\varepsilon_\alpha = 1,2$

Отже, функції (17) і (18) визначають значення коефіцієнта зміщення  $x_2$ . Для системи координат  $x_g, x_b$  графіки цих функцій є пряма лінія, яка перетинає координатні осі під кутом  $45^\circ$  (у нашому випадку ця пряма проходить через точки  $x_g = -x_{Dbg}$  і  $x_b = x_{Dbg}$ ).

Обчислення функції (16), ґрунтоване на зверненні до функцій (17) і (18), показано нижче

$$\varepsilon_{\alpha_{gb}}(x) = \begin{cases} \varepsilon_{\alpha_{gb}}(x, f_{gb-x_2}(x)), & x = x_1 = x_g; \\ \varepsilon_{\alpha_{gb}}(ff_{gb-x_2}(x), x), & x = x_1 = x_b. \end{cases} \quad (19)$$

Із (19) видно, що залежно від варіанту вибору коефіцієнта зміщення  $x_1$ , маємо дві функціональні залежності, графіки яких показані на рис. 10.

Графіки функцій (19) були побудовані для інтервалів зміни аргументів функцій (19)  $x_g \in [x_{g \min}, x_{g \max}]$  і  $x_b \in [x_{b \min}, x_{b \max}]$ . Чисельні значення параметрів інтервалів дорівнювали:  $x_{g \min} = -0,696$ ;  $x_{g \max} = 2$ ;  $x_{b \min} = 1,1365$ ;  $x_{b \max} = 2,8325$ .

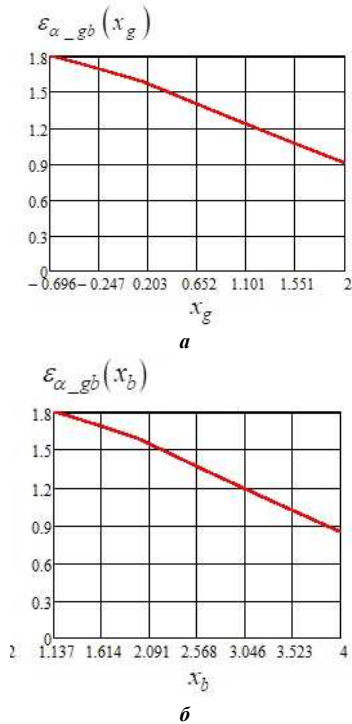
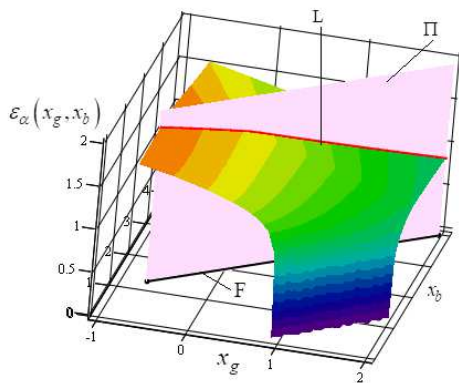
Максимальні значення функцій виду (19) визначаються при  $x = -0,696$  у разі вибору  $x = x_g$ , і при  $x = 1,1365$ , у разі вибору  $x = x_b$ . В результаті маємо однакові значення максимумів, рівні 1,799.

Отже, аналіз властивостей функціональних залежностей виду (19) дозволяє оптимізувати вибір коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс зачеплення  $Z_g-Z_b$ , що задовольняють умовам забезпечення заданого кута зачеплення  $\alpha_{nb}^*$  і найбільш прийнятному значення коефіцієнта торцевого перекриття  $\varepsilon_{\alpha_{gb}}$ . Але є ще одна умова – рівність значень коефіцієнтів зміщень  $x_g$ , вибраних для зачеплень  $Z_a-Z_g$  і  $Z_g-Z_b$  відповідно.

Зв'язок функцій  $\varepsilon_{\alpha_{gb}}(x_g, x_b)$ ,  $\varepsilon_{\alpha_{gb}}(x)$  і  $f_{gb-x_2}(x_1)$  продемонстрований на рис. 11.

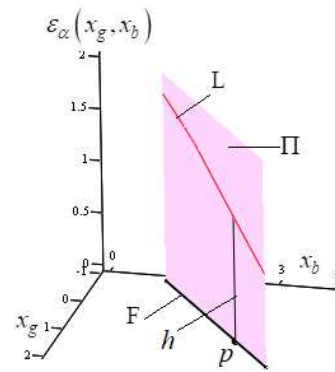
Площина  $\Pi$ , яка перпендикулярна координатній площині  $x_g, x_b$ , проходить через відрізок прямої лінії

F графіку функції  $f_{gb\_x2}(x_1)$ . Лінія перетину L цієї площини з поверхнею функції  $\varepsilon_{\alpha\_gb}(x_g, x_b)$  утворює графік функції  $\varepsilon_{\alpha\_gb}(x)$ . Відрізок прямої лінії F, показаний на рис. 11 чорним кольором, задавався на координатній площині  $x_g, x_b$  двома точками. Координати цих точок  $(x_g, x_b)$  були рівні:  $(-0,696, 1,1365)$ ;  $(2, 3,8325)$ .

Рисунок 10 – Графіки функції  $\varepsilon_{\alpha\_gb}(x)$ Рисунок 11 – Графіки функцій  $\varepsilon_{\alpha}(x_g, x_b)$ ,  $\varepsilon_{\alpha\_gb}(x)$  і  $f_{gb\_x2}(x_1)$ 

Розглянемо наступний графік, показаний на рис. 12. На рис. 12 перпендикуляр до координатної площини  $h$ , проведений з точки  $p$  лінії F до перетину з лінією L, перетинає лінію L в точці, у якій значення функції коефіцієнту торцевого перекриття  $\varepsilon_{\alpha}=1,2$  (на рисунку графік  $\varepsilon_{\alpha}$  не показаний). Координати точки  $p$  дорівнюють  $(1,74, 3,0065)$ .

Аналіз характеру лінії L (рис. 10, a) показує, що зміна значення функції торцевого перекриття (19) відбувається в діапазоні  $1,2 \leq \varepsilon_{\alpha}(x_g, x_b) \leq 1,799$ .

Рисунок 12 – Графіки функцій  $\varepsilon_{\alpha\_gb}(x)$  і  $f_{gb\_x2}(x_1)$ 

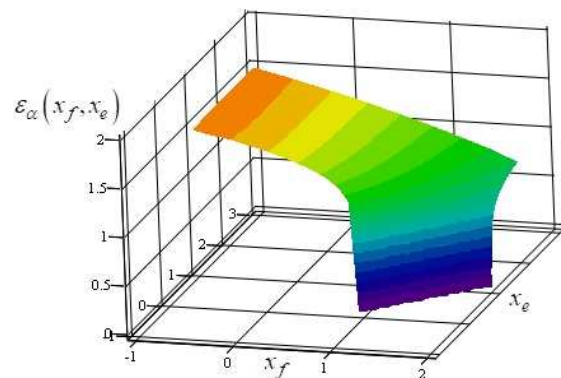
**Зубчасте зачеплення  $Z_f-Z_e$ .** Функція коефіцієнта торцевого перекриття внутрішнього зачеплення  $Z_f-Z_e$  як функція двох незалежних змінних записується у вигляді:

$$\varepsilon_{\alpha\_fe} = \varepsilon_{\alpha\_fe}(x_f, x_e) = \frac{z_f \cdot \operatorname{tg}(\alpha_{af})}{2\pi} - \frac{z_e \cdot \operatorname{tg}(\alpha_{ae})}{2\pi} + \frac{(z_e - z_f) \cdot \operatorname{tg}(\alpha_{rve})}{2\pi}, \quad (20)$$

де кути  $\alpha_{rve}$ ,  $\alpha_{af}$  і  $\alpha_{ae}$  є функціями коефіцієнтів зміщення  $x_e$  та  $x_e$ , числа зубців  $z_f$  і  $z_e$  є параметрами.

На рис. 13 показаний графік функції (20), що відображає характер залежності коефіцієнта торцевого перекриття зубчастого зачеплення  $Z_f-Z_e$  від значень коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс.

Графік функції  $\varepsilon_{\alpha\_fe}(x_f, x_e)$  був побудований для прямокутної області можливих значень коефіцієнтів зміщення  $x_f$  та  $x_e$ . Прямокутна область, де  $x_f \in [x_{f \min}, x_{f \max}]$  і  $x_e \in [x_{e \min}, x_{e \max}]$ , задавалася наступними параметрами:  $x_{f \min} = -0,696$ ;  $x_{f \max} = 2$ ;  $x_{e \min} = 0$ ;  $x_{e \max} = 2,0103$ . Значення  $x_{f \min}$  і  $x_{e \min}$  визначалися з умови відсутності підрізання зубців. Значення параметрів  $x_{f \max}$  і  $x_{e \max}$  були набуті такими, як при побудові графічного розв'язку системи рівнянь (8)–(10) (рис. 3).

Рисунок 13 – Графік функції  $\varepsilon_{\alpha}(x_f, x_e)$ 

Лінія перетину поверхні функції  $\varepsilon_{\alpha\_fe}(x_f, x_e)$  і



площини  $\varepsilon_\alpha = 1,2$  (рис. 14), що задає значення коефіцієнта торцевого перекриття, рівне 1,2, визначає значення коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс, при яких функція  $\varepsilon_{\alpha\_fe}(x_f, x_e) = 1,2$ .

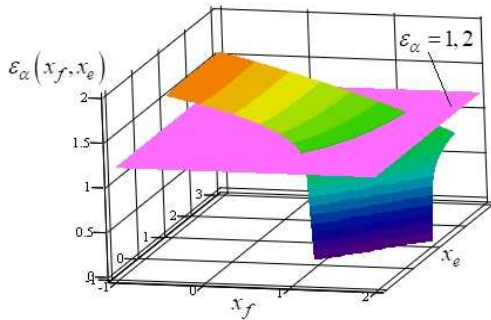


Рисунок 14 – Графіки функцій  $\varepsilon_\alpha(x_f, x_e)$  і  $\varepsilon_\alpha = 1,2$

У разі, коли задається значення кута зачеплення  $\alpha_{me}$ , то функція коефіцієнта торцевого перекриття (20) буде функцією однієї незалежної змінної. В якості цієї змінної можна вибрати коефіцієнт зміщення будь-якого колеса зубчастого зачеплення  $Z_f-Z_e$ .

Введемо наступні функції однієї незалежної змінної

$$f_{fe\_x2}(x_1) = x_{Def} + x_1, \quad (21)$$

$$ff_{fe\_x2}(x_1) = x_1 - x_{Def}, \quad (22)$$

де  $x_1$  – коефіцієнт зміщення внутрішнього зубчастого зачеплення  $Z_f-Z_e$ , що задається (може бути як  $x_f$  або як  $x_e$ );

$x_{Def}$  – коефіцієнт різниці зміщень для внутрішнього зубчастого зачеплення  $Z_f-Z_e$ , при якому кут зачеплення рівний  $\alpha_{me}^*$ .

Функції (21) і (22) визначають значення коефіцієнта зміщення  $x_2$ . Для системи координат  $x_f, x_e$  графіки цих функцій є пряма лінія, яка перетинає координатні осі під кутом  $45^\circ$  (у нашому випадку ця пряма проходить через точки  $x_f = -x_{Def}$  і  $x_e = x_{Def}$ ).

Обчислення функції (20), ґрунтоване на зверненні до функцій (21) і (22), показано нижче:

$$\varepsilon_{\alpha\_fe}(x) = \begin{cases} \varepsilon_{\alpha\_fe}(x, f_{fe\_x2}(x)), & x = x_1 = x_f; \\ \varepsilon_{\alpha\_fe}(ff_{fe\_x2}(x), x), & x = x_1 = x_e. \end{cases} \quad (23)$$

Із (23) видно, що від варіанту вибору коефіцієнта зміщення  $x_1$ , маємо дві функціональні залежності, графіки яких показані на рис. 15.

Графіки функцій (23) були побудовані для інтервалів зміни аргументів функцій  $x_f \in [x_{f\min}, x_{f\max}]$  і  $x_e \in [x_{e\min}, x_{e\max}]$ . Чисельні значення параметрів інтервалів дорівнювали:  $x_{f\min} = -0,0103$ ;  $x_{f\max} = 2$ ;  $x_{e\min} = 0$ ;  $x_{e\max} = 2,0103$ .

Графіки функцій (23) були побудовані для ін-

тервалів зміни аргументів функцій  $x_f \in [x_{f\min}, x_{f\max}]$  і  $x_e \in [x_{e\min}, x_{e\max}]$ . Чисельні значення параметрів інтервалів склали:  $x_{f\min} = -0,0103$ ;  $x_{f\max} = 2$ ;  $x_{e\min} = 0$ ;  $x_{e\max} = 2,0103$ .

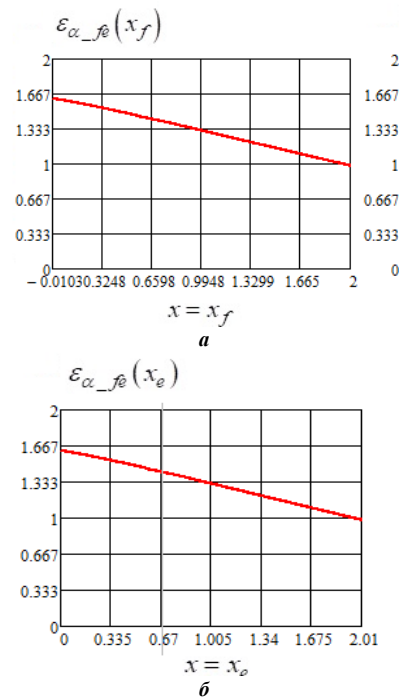


Рисунок 15 – Графіки функції  $\varepsilon_{\alpha\_fe}(x)$

Максимальні значення функцій виду (23) визначаються при  $x = -0,0103$  у разі вибору  $x = x_f$ , і при  $x = 0$ , у разі вибору  $x = x_e$ . У результаті маємо однакові значення максимумів, які дорівнюють 1,622.

Зв'язок функцій  $\varepsilon_{\alpha\_fe}(x_f, x_e)$ ,  $\varepsilon_{\alpha\_fe}(x)$  і  $f_{fe\_x2}(x_1)$  продемонстрований на рис. 16.

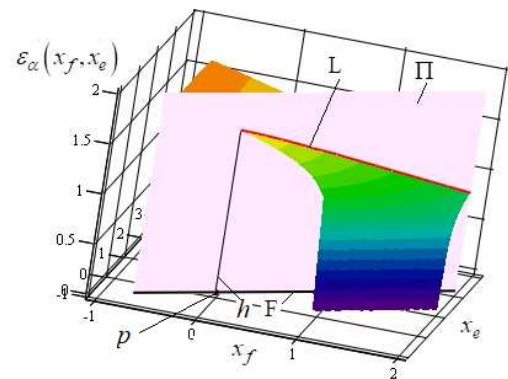


Рисунок 16 – Графіки функцій  $\varepsilon_\alpha(x_f, x_e)$ ,  $\varepsilon_{\alpha\_gb}(x)$  і  $f_{gb\_x2}(x_1)$

Площина  $\Pi$ , яка перпендикулярна координатній площині  $x_f, x_e$ , проходить через відрізок прямої лінії  $F$  графіку функції  $f_{fe\_x2}(x_1)$ . Лінія перетину  $L$  цієї площини з поверхнею функції  $\varepsilon_{\alpha\_fe}(x_f, x_e)$  утворює графік функції  $\varepsilon_{\alpha\_fe}(x)$ . Відрізок прямої лінії  $F$ , показаний на рис. 16 чорним кольором, задавався на координатній площині  $x_f, x_e$  двома точками. Координати цих точок  $(x_f, x_e)$

склали:  $(-0,696, -0,6854)$ ;  $(2, 2,0103)$ .

На рис. 16 перпендикуляр до координатної площини  $h$ , проведений з точки  $p$  лінії F до перетину з лінією L, перетинає лінію L у точці, у якій значення функції торцевого перекриття  $\varepsilon_{\alpha_{fe}}(x_f, x_e)$  буде максимальним, рівним 1,622 (див. рис. 15). Координати точки  $p$  дорівнюють  $(-0,0103, 0)$ . Координати точки лінії F, в якій значення функції  $\varepsilon_{\alpha_{fe}}(x_f, x_e)$  дорівнює 1,2:  $x_f = 1,344$ ;  $x_e = 1,3543$ .

Аналіз характеру лінії L (рис. 15, а) показує, що зміна значення функції торцевого перекриття (23) відбувається в діапазоні  $1,2 \leq \varepsilon_{\alpha_{fe}}(x) \leq 1,622$ .

**Оптимізація торцевого перекриття зубчастих зачеплень.** Аналіз графіків, показаних на рис. 6, 10 і 15, дозволяє для кожного зубчастого зачеплення планетарного механізму типу ЗК визначити допустимий діапазон варіювання коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс. Результати такого аналізу наведені у табл. 1.

Допустимий діапазон варіювання коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс розглядатимемо як відрізок числової осі, що задається двома точками  $x_{il}$  і  $x_{ir}$  у табл. 1. Помітимо, що для коефіцієнтів зміщення ведучих зубчастих коліс зубчастих зачеплень ці точки відповідають мінімальному і максимальному значенням. Для ведених зубчастих коліс може бути навпаки (див. зубчасте зачеплення  $Z_a-Z_g$ ). Точки відповідають значенням коефіцієнтів зміщення, які були визначені при рішенні рівнянь (8)–(10), в табл. 1 позначені як  $x_{is}$ . Точки, для яких коефіцієнти торцевого перекриття зубчастих зачеплень дорівнюють 1,2, в табл. 1 позначені як  $x_{i12}$ . Якщо ці точки не належать допустимому діапазону, то вони виділяються курсивом (див. зубчасте зачеплення  $Z_a-Z_g$ ).

Таблиця 1 – Допустимі діапазони варіювання коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс

| Зубчасте зачеплення $Z_a-Z_g$    |          |          |          |                |
|----------------------------------|----------|----------|----------|----------------|
| $x_i$                            | $x_{il}$ | $x_{ir}$ | $x_{is}$ | $x_{i12}$      |
| $x_a$                            | 0,006    | 1,246    | 0,3      | <i>1,2637</i>  |
| $x_g$                            | 0,544    | -0,696   | 0,25     | <i>-0,7137</i> |
| $\varepsilon_{\alpha}(x_a, x_g)$ | 1,4305   | 1,2066   | 1,4148   | 1,2            |
| Зубчасте зачеплення $Z_g-Z_b$    |          |          |          |                |
| $x_g$                            | -0,696   | 2        | 0,25     | 1,174          |
| $x_b$                            | 1,1365   | 3,8325   | 2,0825   | 3,0065         |
| $\varepsilon_{\alpha}(x_a, x_b)$ | 1,799    | 0,9018   | 1,5466   | 1,2            |
| Зубчасте зачеплення $Z_f-Z_e$    |          |          |          |                |
| $x_f$                            | -0,0103  | 2        | 0,25     | 1,344          |
| $x_e$                            | 0        | 2,0103   | 0,2603   | 1,3543         |
| $\varepsilon_{\alpha}(x_f, x_e)$ | 1,622    | 0,9808   | 1,5537   | 1,2            |

На рис. 17 показані допустимі діапазони варіювання (діапазони пошуку) значень коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс планетарного механізму типу ЗК для варіанту одновінцевої схеми.

Як видно з рис. 17, а, зменшення значення коефіцієнта зміщення одновінцевого сателіта  $x_g$  в порівнянні зі значенням 0,3 призводить до зменшення коефіцієнта торцевого перекриття зовнішнього зубчастого

зачеплення  $Z_a-Z_g$  і до збільшення коефіцієнтів торцевого перекриття внутрішніх зубчастих зачеплень  $Z_g-Z_b$  і  $Z_f-Z_e$  відповідно. Зворотний ефект має місце при збільшенні коефіцієнта зміщення одновінцевого сателіта  $x_g$  в порівнянні зі значенням 0,3.

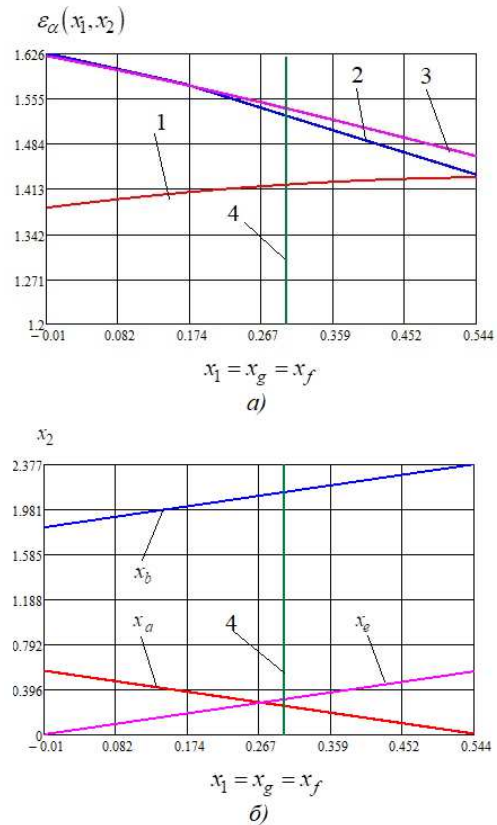


Рисунок 17 – Допустимі діапазони варіювання коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс планетарного механізму типу ЗК.

Варіант одновінцевої схеми:

- 1 – зачеплення  $Z_g-Z_b$ ; 2 – зачеплення  $Z_a-Z_g$ ; ...  
3 – зачеплення  $Z_f-Z_e$ ; 4 – точка  $x_{gs}$

Графіки зміни значень коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс при варіюванні значення коефіцієнта зміщення  $x_g$  в межах допустимого діапазону показані на рис. 17, б. С цього рисунку видно, що зменшення значення коефіцієнта зміщення одновінцевого сателіта  $x_g$  в порівнянні зі значенням 0,3 призводить до збільшення значення коефіцієнта зміщення  $x_a$  і до зменшення значень коефіцієнтів зміщення  $x_b$  і  $x_e$  відповідно. При збільшенні значення коефіцієнта зміщення одновінцевого сателіта  $x_g$  в порівнянні зі значенням 0,3 призводить до зворотного ефекту – до зменшення значення  $x_a$  і збільшення значень  $x_b$  і  $x_e$  відповідно.

Також з рис. 17, б видно, що при  $x_g < 0,3$  має місце рівності значень коефіцієнтів  $x_a$  і  $x_e$  (див. на перетин двох графіків).

Під оптимізацією торцевого перекриття зубчастих зачеплень механізму розумітимемо процедуру

вибору такого закону розподілу значень коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс зачеплень, при якому забезпечується виконання встановлених критеріїв (вимог). При цьому вважається, що для кожного зубчастого зачеплення задана сума коефіцієнтів зміщень або їх різниця. Іншими словами, якщо заданий кут зачеплення відповідного зачеплення планетарного механізму.

Алгоритм оптимізації вибору коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс планетарного механізму типу 3К наступний.

1. Задаються початкові дані: числа зубців зубчастих коліс; модулі зубчастих зачеплень; мінімальні значення коефіцієнтів торцевого перекриття зубчастих зачеплень. Для кожного зубчастого колеса необхідно також задати тип зуборізного інструменту і параметри вихідного контура. З умови відсутності підрізу зубця для кожного зубчастого колеса визначають мінімальне допустиме значення коефіцієнта зміщення  $x_{i\min}$ , де індекс  $i$  набуває значення індексу відповідного зубчастого колеса. Максимальне допустиме значення коефіцієнта зміщення  $x_{i\max}$  задається, наприклад, рівним 2.

2. Будуються графіки функціональних залежностей  $a_{wa} = a_{wa}(\alpha_{rw})$ ,  $a_{wb} = a_{wb}(\alpha_{rw})$  і  $a_{we} = a_{we}(\alpha_{rw})$ .

3. Приймається рішення про вибір значення міжосьової відстані  $a_w^*$  (див. рис. 3).

4. Розв'язується система рівнянь (8)–(10).

Можна вказати на два різних підходів до рішення системи рівнянь (8)–(10). Перший підхід розглядався в статті раніше стосовно схеми з одновинцевим сателітом. Другий підхід ґрунтований на додаванні до вказаної системи рівнянь деяких рівнянь зв'язку між шуканими коефіцієнтами зміщення. При цьому число таких рівнянь має бути таким, щоб нова система рівнянь була однозначно вирішувана.

5. Обчислюються значення суми коефіцієнтів зміщення  $x_{\Sigma ag}$  і різниць коефіцієнтів зміщення  $x_{Dbg}$  та  $x_{Def}$  відповідно.

6. Будуються графіки функціональних залежностей  $\varepsilon_{\alpha\_ag}(x)$ ,  $\varepsilon_{\alpha\_gb}(x)$  і  $\varepsilon_{\alpha\_fe}(x)$ .

7. Аналізуються графіки функцій  $\varepsilon_{\alpha\_ag}(x)$ ,  $\varepsilon_{\alpha\_gb}(x)$  і  $\varepsilon_{\alpha\_fe}(x)$ , на основі яких визначаються допустимі діапазони варіювання значень коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс.

8. Враховуючи умови заданих обмежень на значення коефіцієнтів торцевого перекриття зубчастих зачеплень, з одного боку, і якихось додаткових обмежень, з іншого боку, приймається рішення про розподіл значень коефіцієнтів, знайдених на кроці 5, між коефіцієнтами зміщення відповідних зубчастих коліс зубчастих зачеплень.

9. Остаточне рішення за визначенням значень коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс приймається після їх перевірки за умовами забезпечення якісних характеристик зубчастих зачеплень за вибраними критеріями, умов міцності і довговічності та конструкторським обмеженням на габаритні розміри.

У разі незадовільної перевірки слід повторити

дії кроку 8 для іншого варіанту розподілу коефіцієнтів  $x_{\Sigma ag}$ ,  $x_{Dbg}$  і  $x_{Def}$ . При цьому новий варіант задається тільки для тих зачеплень, для яких були отримані незадовільні результати перевірки.

Якщо не вдається підібрати відповідний варіант розподілу коефіцієнтів  $x_{\Sigma ag}$ ,  $x_{Dbg}$  і  $x_{Def}$ , то слід перейти до виконання кроку 3, але з новим значенням параметра  $a_w^*$ .

Комп'ютерна реалізація наведеного вище алгоритму була виконана засобами математичного пакету Mathcad. Відповідний документ програми Mathcad створений як розширення функціональних можливостей програмного забезпечення методики оптимального проектування планетарних механізмів типу 3К, розглянутої в роботі [1].

### Висновки

1. Розроблена методика вибору коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс планетарного механізму типу 3К, що забезпечує оптимізацію торцевого перекриття його зубчастих зачеплень, показала свою достатню ефективність на практиці проектування.

2. Оптимізація торцевого перекриття зубчастих зачеплень дозволяє вирішити проблеми забезпечення як мінімально допустимих значень коефіцієнта торцевого перекриття кожному за зубчастого зачеплення, а також зменшити у яких контактні навантаження, і навіть збільшити їх ресурс, особливо зовнішнього зачеплення (сонячне колесо і сателіт).

3. Математична модель оптимізації не використовує складних математичних моделей. У ній застосовані зрозумілі для конструктора як математичні розрахунки, так і їхнє графічне подання.

4. Аналіз конструктором наданих графіків дозволяє йому прийняти правильні розв'язки оптимізаційної задачі.

5. Підхід, застосований для організації обчислень параметрів геометрії зубчастих зачеплень, може бути застосований при створенні подібних функціональних розширень для оптимізації зубчастих зачеплень за іншими критеріями (характеристиками) якості зачеплень.

6. У подальшому розвитку методики оптимального проектування планетарних механізмів типу 3К планується розробити алгоритми оптимального розподілу коефіцієнтів зміщення зубчастих коліс зовнішнього і внутрішніх зачеплень механізму, якщо будуть відомі відповідно їх сума і різниця.

### Список літератури

1. Матусевич В. А., Шарабан Ю. В., Шехов А. В. Оптиміальне проектування планетарних механізмів типу 3К. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: Проблеми механічного приводу. Харків, НТУ «ХПІ». 2017. №25 (11247). С. 102–110.
2. Hamrayev T., Kahwa A., Fujimoto F. *Design and test of 3K planetary gear for electric vehicle* [Design and test of 3K planetary gear for electric vehicle]. Режим доступу: [https://www.researchgate.net/publication/376345334\\_Design\\_and\\_test\\_of\\_3K\\_planetary\\_gear\\_for\\_electric\\_vehicle](https://www.researchgate.net/publication/376345334_Design_and_test_of_3K_planetary_gear_for_electric_vehicle) (дата звертання: 30 січня 2023).
3. Oba S., Fujimoto F. *Hybrid 3K compound planetary reduction gearbox with a roller transmission mechanism* [Hybrid 3K compound planetary reduction gearbox with a roller transmission mechanism]. Режим доступу: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9502938> (дата звертання: 30 січня 2023).

4. Cvetanov G., Karadzhov T. *Geometric synthesis of involute planetary gears with connected gear wheels of type 2K-H* [Geometric synthesis of involute planetary gears with connected gear wheels of type 2K-H]. Режим доступу: <https://journals.rta.lv/index.php/ETR/article/download/6643/5386/7918> (дата звертання: 2 березня 2023).
5. Abhishek Parmar, P. Ramkumar, K. Shankar. *Macro geometry multi-objective optimization of planetary gearbox considering scuffing constraint* [Macro geometry multi-objective optimization of planetary gearbox considering scuffing constraint]. Режим доступу: [https://www.researchgate.net/publication/343661934\\_Macro\\_geometry\\_multi-objective\\_optimization\\_of\\_planetary\\_gearbox\\_considering\\_scuffing\\_constraint](https://www.researchgate.net/publication/343661934_Macro_geometry_multi-objective_optimization_of_planetary_gearbox_considering_scuffing_constraint) (дата звертання: 10 січня 2021).
6. Rys J. *The procedure of modification coefficients in planetary gear transmission* [The procedure of modification coefficients in planetary gear transmission]. Режим доступу: [https://journals.pan.pl/Content/84598/PDF/05\\_paper.pdf](https://journals.pan.pl/Content/84598/PDF/05_paper.pdf) (дата звертання: 10 березня 2024).
7. Sedak M., Rosic, B. *Multi-objective optimization of planetary gearbox with adaptive hybrid particle swarm differential evolution Algorithm* [Multi-objective optimization of planetary gearbox with adaptive hybrid particle swarm differential evolution algorithm]. Режим доступу: <https://www.mdpi.com/2076-3417/11/3/1107> (дата звертання: 10 травня 2023).
8. Клітній В. В., Клітній В. В., Батрак П. О. *Оптимізація планетарної передачі бортового редуктора з використанням методу диференціальної еволюції* [Оптимізація планетарної передачі бортового редуктора з використанням методу диференціальної еволюції]. Режим доступу: [https://www.researchgate.net/publication/347959823\\_Optimization\\_of\\_planetary\\_gear\\_of\\_onboard\\_gear-box\\_using\\_the\\_method\\_of\\_differential\\_evolution](https://www.researchgate.net/publication/347959823_Optimization_of_planetary_gear_of_onboard_gear-box_using_the_method_of_differential_evolution) (дата звертання: 15 травня 2024).
9. Tomor Z. *An optimal choice of profile shift coefficients for spur gears* [An optimal choice of profile shift coefficients for spur gears]. Режим доступу: <https://www.mdpi.com/2075-1702/9/6/106> (дата звертання: 10 грудня 2021).
10. Dahterova D., Nikolova I. *Improving the load capacity of cylindrical gears and transmissions by parametric optimal design with CAD/CAM systems* [Improving the load capacity of cylindrical gears and transmissions by parametric optimal design with CAD/CAM systems]. Режим доступу: [https://www.researchgate.net/publication/364207273\\_Improving\\_the\\_load\\_capacity\\_of\\_cylindrical\\_gears\\_and\\_transmissions\\_by\\_parametric\\_optimal\\_design\\_with\\_CAD/CAM\\_systems](https://www.researchgate.net/publication/364207273_Improving_the_load_capacity_of_cylindrical_gears_and_transmissions_by_parametric_optimal_design_with_CAD/CAM_systems) (дата звертання: 20 грудня 2022).
11. Rackov M., Veres M., Kanovic Ž., Kuzmanovic S. *HCR gearing and optimization of its geometry* [HCR gearing and optimization of its geometry]. Режим доступу: [https://www.researchgate.net/publication/272054201\\_HCR\\_Gearing\\_and\\_Optimization\\_of\\_its\\_Geometry](https://www.researchgate.net/publication/272054201_HCR_Gearing_and_Optimization_of_its_Geometry) (дата звертання: 12 березня 2024).
12. Черельов С. В., Устименко О., В., Бондаренко О., В., Протасов Р.В., Андриєнко С. В. *Математична модель оптимізації зубчастих передач із підвищенням коефіцієнтом перекриття* [Математична модель оптимізації зубчастих передач із підвищенням коефіцієнтом перекриття]. Режим доступу: <http://magazine.mdp.org.ua/index.php/spm/article/view/3169/3549> (дата звертання: 12 березня 2024).
- electric vehicle]. Available at: [https://www.researchgate.net/publication/376345334\\_Design\\_and\\_test\\_of\\_3K\\_planetary\\_gear\\_for\\_electric\\_vehicle](https://www.researchgate.net/publication/376345334_Design_and_test_of_3K_planetary_gear_for_electric_vehicle) (accessed 30.01.2023).
3. Oba S., Fujimoto F. *Hybrid 3K compound planetary reduction gearbox with a roller transmission mechanism* [Hybrid 3K compound planetary reduction gearbox with a roller transmission mechanism]. Available at: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9502938> (accessed 30.01.2023).
4. Cvetanov G., Karadzhov T. *Geometric synthesis of involute planetary gears with connected gear wheels of type 2K-H* [Geometric synthesis of involute planetary gears with connected gear wheels of type 2K-H]. Available at: <https://journals.rta.lv/index.php/ETR/article/download/6643/5386/7918> (accessed 02.03.2023).
5. Abhishek Parmar, P. Ramkumar, K. Shankar. *Macro geometry multi-objective optimization of planetary gearbox considering scuffing constraint* [Macro geometry multi-objective optimization of planetary gearbox considering scuffing constraint]. Available at: [https://www.researchgate.net/publication/343661934\\_Macro\\_geometry\\_multi-objective\\_optimization\\_of\\_planetary\\_gearbox\\_considering\\_scuffing\\_constraint](https://www.researchgate.net/publication/343661934_Macro_geometry_multi-objective_optimization_of_planetary_gearbox_considering_scuffing_constraint) (accessed 10.01.2021).
6. Rys J. *The procedure of modification coefficients in planetary gear transmission* [The procedure of modification coefficients in planetary gear transmission]. Available at: [https://journals.pan.pl/Content/84598/PDF/05\\_paper.pdf](https://journals.pan.pl/Content/84598/PDF/05_paper.pdf) (accessed 10.03.2024).
7. Sedak M., Rosic, B. *Multi-objective optimization of planetary gearbox with adaptive hybrid particle swarm differential evolution algorithm* [Multi-objective optimization of planetary gearbox with adaptive hybrid particle swarm differential evolution algorithm]. Available at: <https://www.mdpi.com/2076-3417/11/3/1107> (accessed 10.05.2023).
8. Klitnoy V. V., Klitnoy V. V., Batrak P. O. *Optimizatsiya planetarnoy peredachi borovogo reduktora z vykorystannym metodom dyferentsial'noyi evolyutsiyi* [Optimization of planetary gear of onboard gear-box using the method of differential evolution]. Available at: [https://www.researchgate.net/publication/347959823\\_Optimization\\_of\\_planetary\\_gear\\_of\\_onboard\\_gear-box\\_using\\_the\\_method\\_of\\_differential\\_evolution](https://www.researchgate.net/publication/347959823_Optimization_of_planetary_gear_of_onboard_gear-box_using_the_method_of_differential_evolution) (accessed 5.05.2024).
9. Tomor Z. *An optimal choice of profile shift coefficients for spur gears* [An optimal choice of profile shift coefficients for spur gears]. Available at: <https://www.mdpi.com/2075-1702/9/6/106> (accessed 10.12.2021).
10. Dahterova D., Nikolova I. *Improving the load capacity of cylindrical gears and transmissions by parametric optimal design with CAD/CAM systems* [Improving the load capacity of cylindrical gears and transmissions by parametric optimal design with CAD/CAM systems]. Available at: [https://www.researchgate.net/publication/364207273\\_Improving\\_the\\_load\\_capacity\\_of\\_cylindrical\\_gears\\_and\\_transmissions\\_by\\_parametric\\_optimal\\_design\\_with\\_CAD/CAM\\_systems](https://www.researchgate.net/publication/364207273_Improving_the_load_capacity_of_cylindrical_gears_and_transmissions_by_parametric_optimal_design_with_CAD/CAM_systems) (20.12.2022).
11. Rackov M., Veres M., Kanovic Ž., Kuzmanovic S. *HCR gearing and optimization of its geometry* [HCR gearing and optimization of its geometry]. Available at: [https://www.researchgate.net/publication/272054201\\_HCR\\_Gearing\\_and\\_Optimization\\_of\\_its\\_Geometry](https://www.researchgate.net/publication/272054201_HCR_Gearing_and_Optimization_of_its_Geometry) (accessed 12.03.2024).
12. Chere'ov S. V., Ustyimenko O., V., Bondarenko O., V., Protasov R.V., Andriyenko S. V. *Matematychna model' optymizatsiyi zubchastykh peredach iz pidvyshchenym koefitsiyentom perekryt'ya* [Mathematical model for optimization of gear transmissions with increased overlap coefficient]. Available at: <http://magazine.mdp.org.ua/index.php/spm/article/view/3169/3549> (accessed 12.03.2024).

#### References (transliterated)

1. Matushevych V. A., Sharaban Yu. V., Shekhov A. V. *Optymal'ne proektuvannya planetarnykh mekhanizmiv typu 3K*. Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Seriya: Problemy mekhanichnoho pryvodu. Kharkiv, NTU «KhPI». 2017. No. 25(11247). P. 102–110.
2. Namrayev T., Kahwa A., Fujimoto F. *Design and test of 3K planetary gear for electric vehicle* [Design and test of 3K planetary gear for

Надійшла (received) 07.07.2024

#### Відомості про авторів / About the Authors

**Шарабан Юрій Володимирович / Sharaban Jurij** – Товариство з обмеженою відповідальністю «Харківське агрегатне конструкторське бюро», заступник головного конструктора, м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7295-0927>; e-mail: [suv-kharkov@ukr.net](mailto:suv-kharkov@ukr.net)

**Шехов Олександр Володимирович / Shehov Oleksandr** – Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», старший викладач кафедри теоретичної механіки, машинознавства і робототехнічних систем, м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2312-0155>; e-mail: [shav01@ukr.net](mailto:shav01@ukr.net)