

**О. І. ЗІНЧЕНКО**

## **ФОРМУВАННЯ МОДЕЛЕЙ ТА МЕТОДІВ АНАЛІЗУ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ З УРАХУВАННЯМ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТІЛ (ОГЛЯДОВА СТАТТЯ)**

Проведений аналіз літератури з питань розвитку моделей та методів аналізу напружено-деформованого стану із урахуванням контактної взаємодії тіл. Прослідкована історія розвитку моделей та методів аналізу напружено-деформованого стану з урахуванням контактної взаємодії дає можливість застосовувати деякі викладки з приводу того, що є необхідність: поєднання різних типів нелінійностей; переходу до варіаційної постановки задачі; урахування поверхні контактуючих тіл; застосування методу узагальненого параметричного моделювання разом із поєднанням із методом скінченних елементів. Зроблено висновок, що методики розрахунку напружено-деформованого стану, які сформувалися, не враховують усієї множини чинників, які впливають на роботу елементів броньованих машин, тобто не дають адекватну оцінку їх міцності та довговічності. Прослідковано необхідність переходу до варіаційної постановки задачі та узагальненого параметричного моделювання процесів і станів при проєктних дослідженнях елементів бойових броньованих машин разом із поєднанням із методом скінченних елементів, що забезпечить гнучку зміну та варіювання об'єкту досліджень. Це дасть можливість організувати цілеспрямований пошук раціональних проєктно-технологічних рішень торсійних валів у складі легких броньованих машин із високими тактико-технічними характеристиками.

**Ключові слова:** легка броньована машина; тактико-технічні характеристики; торсійний вал; напружено-деформований стан; міцність; довговічність; пружно-пластичне деформування; контактна взаємодія

**O. ZINCHENKO**

## **FORMATION OF MODELS AND METHODS FOR ANALYSIS OF STRESS-STRAIN STATE WITH CONTACT INTERACTIONS (REVIEW ARTICLE)**

An analysis of the literature and developing models and methods for analyzing the stress-strain system based on the contact interaction between bodies has been conducted. The history of the development of models and methods of analysis of the stress-strain state with the protection of contact interaction is considered, which makes it possible to apply the postulates with the drive of what is not necessary: the combination of different types of nonlinearities; transition to a variational formulation of the problem; protection of the surface of contacting bodies; establishment of the method of formalized parametric modeling simultaneously with the combined elements method. Therefore, it is necessary to develop the model, since, in view of the known previous models, they will operate from variable, rather than permanent, physical-mechanical influences on the material of the torsion shafts. It has been concluded that the methods for breaking up the stress-deforming machine, which have been formed, do not support many factors that influence on the elements of armored vehicles, so as not to give an adequate assessment of their value and efficiency durability. The need to move to a variable formulation of the problem and a formalized parametric modeling of processes and stages in the design research of elements of combat armored vehicles simultaneously from the combined element method has been considered. This will make it possible to organize the search for rational design and technological solutions for torsion shafts being part of light armored vehicles with high tactical and technical characteristics. In this case, it is necessary to ensure sufficient adequacy of the model and satisfactory efficiency in numerical investigations.

**Keywords:** light armored vehicle; tactical and technical characteristics; torsion shaft; stress-strain state; strength; durability; elastic-plastic deformation; contact interaction

**Вступ.** Проблема, яка виникає при проєктних дослідженнях елементів систем підресорювання (СП) та в цілому елементів легких броньованих машин (ЛБМ), складається із протиріччя між прагненням задовольнити конкуруючим вимогам до різних компонент технічних і тактико-технічних характеристик (ТТТХ), з одного боку, та плинністю критеріїв і обмежень, які визначають процеси і стани у об'єктах, що розглядаються, – з іншого.

Тобто має місце системна проблема, яку потрібно вирішувати на основі системного підходу. Ця проблема розглядалася різними вченими, і був запропонований новий підхід для її розв'язання. Цей підхід опирався на відомий метод узагальненого параметричного моделювання об'єктів і удосконалювався [1, 2]. Основною ідеєю цього підходу є спосіб розробки моделей процесів і станів у досліджуваних об'єктах, критеріїв обмежень та розподілів, тобто усієї сукупності чинників, які дають змогу ідентифікувати ці об'єкти, а також ставити та розв'язувати задачі аналізу та синтезу.

Стосовно напружено-деформованого стану (НДС) мова йде про геометричну, фізичну та структурну нелінійності. Їх урахування дає змогу більш адекватно враховувати особливості розподілу навантажень, деформування та міцності елементів бойових броньованих машин. Особлива увага

концентрується на математичних моделях, які одночасно поєднують різні типи нелінійностей. Стосовно дослідження НДС торсіонів підвіски бойових броньованих машин (ББМ) суттєвим аспектом є врахування контактної взаємодії, пластичних деформацій та великих переміщень, а також урахування історії навантаження. В цілому задача визначення НДС торсійних валів (ТВ) зводиться до аналізу пружно-пластичного деформування та контактної взаємодії при змінному характері діаграми деформування матеріалу валів.

**Мета роботи** – на основі проведеного аналізу існуючих методів та моделей аналізу напружено-деформованого стану з урахуванням контактної взаємодії тіл обґрунтувати необхідність створення нової математичної моделі напружено-деформованого стану торсійних валів із урахуванням сукупності різних чинників із метою поліпшення тактико-технічних характеристик сучасних вітчизняних легких броньованих машин.

**Існуючі моделі та методи аналізу НДС з урахуванням контактної взаємодії тіл та їх порівняльний аналіз.** Прослідкуємо історію формування моделей та методів аналізу НДС з

© О. І. Зінченко, 2023

урахуванням контактної взаємодії тіл. У подальшому ця історія буде врахована при розгляді контактної взаємодії ТВ зі спряженими деталями задля формування загальної постановки задач аналізу процесів і станів елементів СП ЛБМ. Розгляд контактних задач різного класу є актуальним і зберігається у теперішній час [3]. Задачі про контакт тіл зводяться до досліджень варіаційних рівнянь. Основи теорії варіаційних рівнянь були закладені в роботах Ж.-Л. Ліонса, Р. Гловінські, Р. Тремольєра [4], А. Капело, К. Байоккі [5] та інших. Систематичному застосуванню нерівностей і негладких функціоналів в механіці присвячена монографія [6] і робота [7]. Контактна задача з невідомою областю активної взаємодії елементів розглядається в монографії Михайловського Є.І. [8].

Великий внесок у розвиток розв'язання контактних задач як варіаційних вніс J. Kalker [9].

У роботі [4] викладені основні чисельні методи розв'язання стаціонарних і еволюційних варіаційних нерівностей. Наголошено, що більшість стаціонарних задач можна привести до таких двох задач:

- мінімізації диференційованого функціоналу  $J$  на деякій замкненій випуклій множині  $K$ ;
- мінімізації на всьому просторі (за відсутності обмежень) деякого недиференційованого функціоналу.

Зазначається клас задач, де зустрічаються варіаційні нерівності – стаціонарні і еволюційні. Це: задачі теорії пружності з односторонніми крайовими умовами і з крайовими умовами, які ураховують тертя пружного тіла об обмежуючу поверхню – такі задачі зводяться до еліптичних варіаційних нерівностей, а в еволюційному випадку – до гіперболічних варіаційних нерівностей; задачі мінімізації з обмеженнями у теорії пружно-пластичних середовищ; задачі гідродинаміки пористих середовищ та інші [4].

У контактних задачах у класичній постановці передбачається наявність стискних напружень в області контакту і нульових - на вільній поверхні тіл, що взаємодіють. З метою отримання аналітичних розв'язків задачі про адгезійну взаємодію пружних тіл різні автори використовують спрощені форми потенціалів взаємодії між поверхнями. У роботах О. С. Кравчука [10, 11] використовувалася залежність сили взаємодії поверхонь від відстані між ними. Для розв'язання контактної задачі у цих роботах використовувалися варіаційні методи.

Як зазначається в роботі [11], першою роботою із застосування варіаційного підходу у дослідженнях контактних задач теорії пружності з урахуванням тертя у строгій математичній постановці була робота Дюво і Ліонса, яка була опублікована в 1971 році, повна викладка роботи з деякими узагальненнями представлена у [7]. Одним із основних припущень у їх роботах було те, що нормальний тиск в зоні контакту є відома функція координат точок поверхні тіла. Потім це припущення було знято у роботі О.С. Кравчука

[12]. У роботах Кравчука О.С. відзначається, що у багатьох практичних задачах взаємний вплив нормальних і дотичних зусиль невеликий. Він наголошує, що можна спочатку визначити нормальну компоненту вектора зусиль контактної взаємодії  $\sigma_N$ , нехтуючи тертям, а потім розв'язувати задачу визначення дотичної компоненти  $\sigma_T$  при умові, що  $\sigma_N$  задані. Як зазначено у [11], система контактуючих тіл повинна знаходитися у рівновазі, тобто головний вектор і головний момент силового впливу повинні дорівнювати нулю. Крім того, кожне із контактуючих тіл повинно бути розміщене в системі стійким чином – мале “похитування” тіла як абсолютно жорсткого і з початкового (недеформованого) стану, і з кінцевого (яке виникло в результаті прикладання навантажень) повинно потребувати затрат енергії; іншими словами, робота прикладених зовнішніх силових впливів на вказаних полях повинна бути строго від'ємною. Ці міркування, які були висловлені вперше для задачі Сіньоріні – про рівновагу лінійно-деформованого тіла в жорсткій оболонці без тертя, згодом були оформлені у вигляді теорем, найбільш загальна із яких належить, як вважається, Ліонсу і Стампаккья [13].

У роботах [11, 14] детально викладено задачу про контакт системи деформованих тіл. Відмінністю від цих викладок при розробці нової моделі будемо вважати ту обставину, що усі компоненти досліджуваної нами системи будуть залежати від узагальнених параметрів  $P$ .

Таким чином, бачимо, що перехід від сукупності локальних умов до задачі про мінімум функціоналу потребував введення варіаційних нерівностей.

У роботі [15] запропонована нелокальна теорія контактної взаємодії шорстких тіл по еліптичній області контакту при пружному, пластичному чи пружно-пластичному деформуванні. Також розглянуто контакт по круговій області та по області у вигляді смуги. Побудовані наближені розв'язки за допомогою методу простої ітерації. Особливості постановки задачі в цій роботі підкреслюють вагому роль властивостей поверхонь контактуючих тіл у формуванні області контакту при малих навантаженнях.

Методологія чисельного розрахунку, яка пропонується у роботі [16], базується на переході до узагальненого формулювання контактної задачі у вигляді варіаційної нерівності. Розглянутий адгезійний спосіб руху тіла по поверхні. Процес деформування автори вважають квазістатичним, а переміщення і деформації, які виникають, – малими на кожному кроці. При формулюванні умов контактної взаємодії враховується, що механізм зчеплення забезпечує адгезію тільки до певної межі. При досяганні порогових значень напружень має місце деформування адгезійного шару, і може виникнути відрив тіла від поверхні переміщення. Чисельний розв'язок задачі базується на

наближеній заміні варіаційної задачі деякою скінченномірною задачею пошуку мінімуму функції багатьох змінних з додатковими умовами у вигляді нерівностей. Одержана в результаті дискретизації задача є задачею нелінійного програмування. У роботі викладений алгоритм розв'язання задачі з урахуванням обмеження контактних напружень.

І. І. Прокопишин, І. І. Дяк, Р. М. Мартиняк розглядали задачу числового дослідження контакту трьох пружних тіл методами декомпозиції області. [17]. Вони досліджували методи декомпозиції області для числового розв'язання задач про односторонній контакт без тертя пружних тіл скінченних розмірів.

Метод декомпозиції області типу Діріхле-Неймана, як вказується у [18], годиться для розв'язання задач про односторонній контакт двох пружних тіл. Тут розв'язання задачі здійснюється послідовно на кожному кроці як спочатку задачі про односторонній контакт з жорсткою поверхнею (задача Сінйоріні) для одного тіла, потім задачі теорії пружності з умовою Неймана – для іншого. У [19, 20] пропонуються схеми декомпозиції для задачі Сінйоріні області типу Діріхле-Неймана. Також у статті [17] згадуються і інші дискретні методи декомпозиції області для розв'язання контактних задач, такі, в яких застосовані алгоритми на основі методу підструктур, на основі методу скінченних елементів, розривів і зв'язків та інші. В інших роботах авторів Дяка, Прокопишина розв'язання задач про односторонній контакт багатьох пружних тіл ґрунтуються на застосуванні методу штрафу для варіаційних нерівностей та ітераційних методів для нелінійних варіаційних рівнянь [21–25]. Методи, описані в [21–25], апробовані в [17], на кожному кроці розв'язання лінійної задачі теорії пружності застосовують метод скінченних елементів із лінійними та квадратичними трикутними елементами.

Вихідна контактна задача, яка тут розглядалася авторами, є нелінійною задачею, і вона еквівалентна задачі мінімізації квадратичного функціоналу на множині  $K$  або варіаційній нерівності, розв'язок яких існує та він єдиний. Задача розв'язувалася у варіаційній постановці методом штрафу.

У роботі [23] розглянута задача про односторонній контакт кількох пружних тіл. На основі варіаційного принципу Лагранжа, методу штрафу та методу простих ітерацій для рівнянь у варіаціях та його модифікації обґрунтовано метод розкладання паралельної схеми Неймана.

Як уже зазначалося, форма тіл, контакт яких розглядається, може описуватися широким колом функцій. Багато досліджень проводиться, зокрема, для тіл з текстурованими поверхнями [26–28] та складнопрофільних тіл [29, 30]. Як зазначається в [31], основна проблема реалізації варіаційних методів полягає в необхідності розгляду достатньо складних задач нелінійного програмування. Щоб позбавитися цієї проблеми, використовують нелінійні інтегральні рівняння для моделювання

контактних взаємодій пружних тіл, і це дає можливість розробляти ефективні ітераційні методи розв'язання контактних задач для структур складної форми. Мартинюком Р.М. і Приходько О.В. було розроблено алгоритм розв'язання контактних задач, який заснований на побудові збіжних ітераційних процесів. Цей алгоритм було використано ними для розв'язання просторової осесиметричної задачі про вдавлювання близького до плоского штампку з заокругленими краями у пружний шорсткий напівпростір. Шорсткість враховувалася шляхом введення у вирази відносних пружних переміщень взаємодіючих тіл нелінійних доданків, що характеризують зім'яття поверхневих мікронерівностей [31].

Контактна взаємодія тіл розглянута у дисертації [32]. В ній розроблені нелінійні математичні моделі поведінки матеріалу на поверхні контакту або проміжного шару, які побудовані на основі поєднання моделей контактування мікронерівностей і умов непроникнення тіл одне в одне. Такі моделі фізично більш адекватно відображають механізм контактної взаємодії шорстких тіл, а також призводять до більш складних, проте більш точних, нелінійних математичних моделей. Це створило нові можливості аналізу контактної взаємодії тіл, оскільки до уваги береться новий важливий чинник.

Авторами роботи [33] проведено узагальнення та розвиток підходів, моделей та методів дослідження контактної взаємодії складнопрофільних тіл. Наголошено, що при контакті уздовж поверхонь близької форми виникає низка проблем із причини того, що аналітичні методи при цьому втрачають межі застосовності, та із причини, що за малих зазорів між поверхнями контактуючих тіл різко зростає внесок у баланс переміщень деформування проміжних та поверхневих шарів. Також у статті наголошено, що при застосуванні традиційних чисельних методів також різко зростає внесок похибок апроксимації форми контактуючих поверхонь. Усі ці чинники викликали необхідність розвитку нових підходів, моделей та методів дослідження контактної взаємодії складнопрофільних тіл. Тому авторами було розроблено новий принцип побудови множини моделей контактної взаємодії складнопрофільних тіл, який полягає у поступовому нарощуванні кількості фізичних чинників, які враховуються при побудові цих моделей.

Створені теоретичні основи, які розглянуті у цій роботі, враховують фізично-нелінійні проміжні або поверхневі шари. Розроблені варіаційні формулювання поставлених задач, які зводяться до проблеми пошуку екстремумів нелінійних функціоналів. У результаті одержано структурно-фізично нелінійні співвідношення, для яких розроблена слабка постановка, що зводиться до пошуку екстремуму модифікованого функціоналу додаткової енергії, визначеного на розподілах контактного тиску. Розроблено методи, які зводять структурно-фізично нелінійну задачу до послідовності структурно нелінійних, проте

фізично-лінійних задач, а для розв'язання таких задач можна застосувати уже розроблені раніше методи. Також у статті розроблено метод поетапного розширення множини чинників, які можуть по чергово додаватися у нелінійний функціонал додаткової енергії. Таким чином, створюється більш адекватна та ефективна модель контактної взаємодії складнопрофільних тіл.

Методологія, розроблена у [34], застосовується до дослідження напружено-деформованого стану торсіонних валів систем підресорювання ЛБМ. Математична модель НДС торсіонних валів, яка описується в цій статті, враховує і пружно-пластичний характер деформування матеріалу, і контактну взаємодію, причому у взаємовпливі. Модель напружено-деформованого стану ТВ враховує варіювані значущі проектно-технологічні чинники: конструктивне виконання головки торсіона, галтельного переходу та діаметр стебла ТВ. Крім того, вона враховує параметри технологічного процесу подвійного заневолування: кути закрутки та властивості матеріалу вала.

Як свідчить практика бойових дій, в Україні існує нагальна потреба в обґрунтуванні відповідних технічних рішень за критеріями міцності, навантажувальної здатності та довговічності роботи найбільш навантажених та відповідальних елементів військових машин, а саме, торсіонних валів систем підресорювання.

Щоб досягти позитивних результатів прикладних досліджень необхідна адаптація та розвиток моделей та методів механіки деформованого твердого тіла у частині аналізу міцності, жорсткості та стійкості руху бойових броньованих машин. Тобто необхідно розглядати узагальнене параметричне моделювання процесів і станів при проєктних дослідженнях елементів ББМ.

У зв'язку з цим у роботі [35] розвинено підходи, які описані в роботах [1, 36]. Також удосконалено та адаптовано метод узагальненого параметричного моделювання для дослідження фізико-механічних процесів і станів в елементах ББМ. Як вказано у [32], принциповою відмінністю запропонованої методології є те, що у множини чинників, які приймаються як визначальні, вводяться проєктно-технологічно-виробничі чинники. Цим самим охоплюється значна частина життєвого циклу.

**Висновки за результатами порівняльного аналізу методів дослідження контактної взаємодії та пружно-пластичного деформування елементів об'єктів військової техніки та обґрунтування напрямків досліджень.** Таким чином, прослідковується наступна лінія. Методики розрахунку напружено-деформованого стану, які сформувалися, не враховують усієї множини чинників, які впливають на роботу елементів броньованих машин, тобто не можуть дати адекватну оцінку їх міцності та довговічності. Прослідкована історія розвитку моделей та методів аналізу напружено-деформованого стану з урахуванням контактної взаємодії дає можливість застосовувати деякі викладки з приводу того, що є необхідність:

- 1) поєднання різних типів нелінійностей;
- 2) переходу до варіаційної постановки задачі;
- 3) урахування поверхні контактуючих тіл;
- 4) застосування методу узагальненого параметричного моделювання разом із поєднанням із методом скінченних елементів.

Тобто необхідна розробка моделі, яка, на відміну від відомих розглянутих попередніх моделей, буде оперувати із варіюваними, а не постійними фізико-механічними властивостями матеріалу торсіонних валів. Окрім того, необхідно розробити модель, в якій, крім функціональних, будуть мати місце і параметричні залежності від узагальнених параметрів. Тобто така модель повинна отримати більш глибокі та широкі можливості для варіативного аналізу напружено-деформованого стану торсіонних валів систем підресорювання легких броньованих машин та обґрунтування їхніх прогресивних технічних рішень.

#### Список літератури

1. Ткачук, Н. А. Основы обобщенного параметрического описания сложных механических систем / Н. А. Ткачук, А. Д. Чепурной, Г. Д. Грищенко [и др.]. *Вісник Східноукр. нац. ун-ту ім. В.Даля*. Луганск. – № 9 (115), част. 1. 2007. С. 196–205.
2. Karapetychuk, I. M., Brul, S. T., Tkachuk N. A., Peleshko, E. V., & Kokhanovska, O. V. (2012). Підвищення тактико-технічних характеристик легкоброньованих машин шляхом забезпечення міцності бронькорпусів. *Військово-технічний збірник*, (7), 33–43. <https://doi.org/10.33577/2312-4458.7.2012.33-43>
3. Yastrebov V.A. From infinitesimal to full contact between rough surfaces: evolution of the contact area / Yastrebov V.A., Ancaix G., Molinari J.F. // *International Journal of Solids and Structures*, 2015. – 52. – Pp. 83-102.
4. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. *Численное исследование вариационных неравенств*. М.: Мир, 1979. 576 с.
5. Байочки К., Капело А. *Вариационные и квазивариационные неравенства*. М.: Наука, 1988. 448 с.
6. Панагиотопулос П. *Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии*. М.: Мир, 1989. 494 с.
7. Дюво Ж. *Неравенства в механике и физике* / Ж. Дюво, Ж.-Л. Лионс. М.: Наука, 1980. 384 с.
8. Михайловский Е.И. *Элементы конструктивно-нелинейной механики*. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского университета. 2011. 212 с.
9. Kalker J.J. Variational principles of contact elastostatics / J.J. Kalker. – *J. Inst. Math. and Appl.* – 1977. – Vol. 20. – P. 199–221.
10. Иванова Е. Б., Кравчук А. С. *Вариационный подход к решению контактных задач с учетом адгезии*. Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1989. Вып. 30, С. 156–165.
11. Кравчук А. С. *Вариационные и квазивариационные неравенства в механике* / А. С. Кравчук. М.: МГАПИ, 1997. 340 с.
12. Кравчук А.С. К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения. *Прикл. матем. и механика*. 1980. Т.44, вып.1. С. 122–129.
13. Кравчук А. С., Суряков В.А. Численное решение геометрически нелинейных контактных задач. *ДАН СССР*. 1981. Т.259, вып. 6. С. 1327–1329.
14. Кравчук А.С. Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования. *Прикладная математика и механика*. 1978. Т.42, №3. С. 466–474.
15. Кравчук А.С. Нелокальный контакт шероховатых тел по эллиптической области. *Механика твердого тела*. 2005. № 3. С. 42–52.
16. Михальчук А. И., Кузьменко В. И. Компьютерный анализ процессов адгезионного движения. *Проблеми*

- обчислювальної механіки і міцності конструкцій. 2011, вип. 17. С. 202–210.
17. Прокопишин І. І., Дяк І. І., Мартиняк Р. М. Числове дослідження задач про контакт трьох пружних тіл методами декомпозиції області. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2013. № 1. С. 46–55.
  18. Krause R. and Wohlmuth B. A. Dirichlet-Neumann type algorithm for contact problems with friction. *Comp. and Visualization in Sci.* 2002. Vol. 5 (3), P. 139–148.
  19. Bayada G., Sabil J., and Sassi T. A Neumann–Neumann domain decomposition algorithm for the Signorini problem. *Appl. Math. Lett.* 2004. Vol. 17 (10). P. 1153–1159.
  20. Sassi T., Iropa M., and Roux F.-X. Generalization of Lion's nonoverlapping domain decomposition method for contact problems. *Lect. Notes Comp. Sci. Eng.* 2008. Vol. 60. P. 623–630.
  21. Прокопишин І. І. Паралельні схеми методу декомпозиції області для контактних задач теорії пружності без тертя. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика*. 2008. Вип. 14. С. 123–133.
  22. Прокопишин І. І. *Схеми декомпозиції області на основі методу штрафу для задач контакту пружних тіл*: Дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук. Львів, 2010. 163 с.
  23. Dyyak I. I. and Prokopyshyn I. I. Convergence of the Neumann parallel scheme of the domain decomposition method for problems of frictionless contact between several elastic bodies. *J. Math. Sci.* 2010. Vol. 171 (4). P. 516–533.
  24. Dyyak I. I. and Prokopyshyn I. I. Domain decomposition schemes for frictionless multibody contact problems of elasticity. *Numerical Mathematics and Advanced Applications 2009: Proc. of ENUMATH 2009, Uppsala, July 2009*. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. P. 297–305.
  25. Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I., and Prokopyshyn I. A. *Penalty Robin–Robin domain decomposition methods for unilateral multibody contact problems of elasticity: Convergence results*. arxiv.org. 2012. 32 p. – [Електронний ресурс: <http://arxiv.org/pdf/1208.6478.pdf>].
  26. Козачок О.П., Мартиняк Р.М., Слободян Б.С. *Взаємодія тіл з регулярним рельєфом за наявності міжконтактного середовища*. Львів: Растр-7, 2018. 200 с.
  27. Goryacheva I. G., Martynyak R.M. Contact problems for textured surfaces involving frictional effects. *Proceedings of the institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*. 2014. Vol. 228, no. 7. P. 707–716.
  28. Goryacheva I.G., Malanchuk N.I., Martynyak R.M. Contact interaction of bodies with a periodic relief during partial slip. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012. Vol. 76. No 5. P. 621–630.
  29. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А., Грабовський А.В. *Контактное взаимодействие сложнопрофильных деталей машиностроительных конструкций с учетом локальной податливости поверхностного слоя: монография*. 2-е изд., перераб. и доп. Харьков: ФОП Панов А.Н., 2019. 148 с.
  30. Ткачук Н.Н., Ткачук Н.А. Контакт сложнопрофильных тел: связанная задача анализа напряженно-деформированного состояния и геометрического синтеза. *Механіка та машинобудування*. 2011. № 2. С. 75–86.
  31. Мартиняк Р.М., Приходько О.В. Задача про вдавлення близького до плоского штампу в пружний шорсткий півпростір. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2020. Вип. 31. С. 66–77.
  32. Ткачук М.М. *Мікромеханічні моделі та методи осереднення властивостей матеріалів мережевої структури та проміжних шарів контактуючих тіл*: дис. на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук: 05.03.20/ Ткачук Микола Миколайович. Харків, 2020. 464 с.
  33. Ткачук М. М., Пінчук Н. В., Г. В. Ткачук, І. Є. Ключков, М.А. Ткачук, А. В. Грабовський, В. І. Скриков, І. П. Гречка, С. В. Куценко, Г. І. Цимбал, А. М. Коба. Нові фізичні чинники за контактної взаємодії пружних тіл уздовж поверхні близької форми. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Машинознавство та САПР*. 2022. № 2. С. 94–126.
  34. Ткачук М.М., Заворотній А.В., Зінченко О.І., Грабовський А.В., Ткачук М.А., Пінчук Н.В., Шевченко А.В., Цендра Г.В. Розвиток підходів, моделей та методів дослідження міцності та довговічності торсійних валів систем підресорювання легких броньованих машин. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ», серія: Машинознавство та САПР*, 2022. № 2. С. 80–93.
  35. Хлань О. В., Ткачук М. А., Грабовський А. В. Теоретичні основи проектно-технологічно-виробничого забезпечення тактико-технічних характеристик бойових броньованих машин. *Вісник НТУ «ХПІ», серія «Нові рішення в сучасних технологіях»*, 2018, № 9 (1285), С. 83–89. doi:10.20998/2413-4295.2018.09.12
  36. Ткачук Н.А. Конечные-элементные модели элементов сложных механических систем: технология автоматизированной генерации и параметризованного описания/ Н.А. Ткачук, Г.Д. Гриценко, А.Д. Чепурной, Е.А. Орлов, Н.Н. Ткачук. *Механіка та машинобудування*. Харків: НТУ «ХПІ», 2006. № 1. С. 57–79.

## References (transliterated):

1. Tkachuk, N. A. (2007). Osnovy obobshchennoho parametrycheskoho opysanyia slozhnykh mekhanicheskikh sistem / N. A. Tkachuk, A. D. Chepurnoi, H. D. Lihutsenko [y dr.]. *Visnyk Skhidnoukr. nats. un-tu im. V.Dalia*. Luhansk. Vol. №9 (115), chast. 1. –P. 196–205.
2. Karapeychuk, I. M., Brul, S. T., Tkachuk N. A., Peleshko, E. V., & Kokhanovska, O. V. (2012). Pidvyshchennia taktyko-tekhnichnykh kharakterystyk lehkobronovanykh mashyn shliakhom zabezpechennia mitsnosti bronekorpusiv. *Viiskovotekhnichniy zbirnyk*, (7), 33–43. <https://doi.org/10.33577/2312-4458.7.2012.33-43>
3. Yastrebov V.A. From infinitesimal to full contact between rough surfaces: evolution of the contact area / Yastrebov V.A., Anciaux G., Molinari J.F. // *International Journal of Solids and Structures*, 2015. – 52. –Pp. 83-102.
4. Hlovisnik R., Lions Zh.-L., Tremoler R. *Chislennoe issledovanie variatsyonnykh neravenstv*. M.: Mir, 1979. 576 p.
5. Baiokky K., Kapelo A. *Variatsyonnye i kvazivariatsyonnye neravenstva*. M.: Nauka, 1988. 448 p.
6. Panahiotopulos P. *Neravenstva v mekhanike i ikh prilozheniia. Vypuklye i nevyuklye funktsyi enerhii*. M.: Mir, 1989. 494 p.
7. Diuvo Zh. *Neravenstva v mekhanike i fizike / Zh. Diuvo, Zh.-L. Lions*. M.: Nauka, 1980. 384 p.
8. Mikhailovskii E.I. *Elementy konstruktivno-nelineinoi mekhaniki*. Syktyvkar: Izd-vo Syktyvskarskogo universyteta. 2011. 212 s.
9. Kalker J.J. Variational principles of contact elastostatics / J.J. Kalker. – J. Inst. Math. and Appl. – 1977. – Vol. 20. – P. 199–221.
10. Ivanova E. B., Kravchuk A. S. (1989). Variatsyonnyi podkhod k resheniiu kontaktnykh zadach s uchetoм adhezii. *Raschety na prochnost*. M.: Mashynostroenie, Vol. 30, pp. 156–165.
11. Kravchuk A. S. Variatsyonnye i kvazivariatsyonnye neravenstva v mekhanike / A. S. Kravchuk. M.: MHPAPY, 1997. 340 p.
12. Kravchuk A.S. K teorii kontaktnykh zadach s uchetoм treniia na poverkhnosti soprikosnoveniia. *Prikl. matem. i mekhanika*. 1980. Vol. 44, no. 1, pp. 122–29.
13. Kravchuk A. S., Sursiakov V.A. Chislennoe reshenie heometricheski nelineinykh kontaktnykh zadach. *DAN SSSR*. 1981. Vol. 259, no. 6, pp. 1327–1329.
14. Kravchuk A.S. Postanovka zadachi o kontakte neskol'kikh deformiruemykh tel kak zadachi nelineinogo programmirovaniia. *Prikladnaia matematika i mekhanika*. 1978. Vol. 42, no. 3, pp. 466–474.
15. Kravchuk A.S. (2005). Nelokalnyi kontakt sherokhovatykh tel po ellipticheskoi oblasti. *Mekhanika tverdoho tela*, no. 3, pp. 42–52.
16. Mikhailchuk A. I., Kuzmenko V. I. (2011). Kompiuternyi analiz protsessov adhezionnogo dvizheniia. *Problemy obchysliualnoi mekhaniki i mitsnosti konstruktivnoi* Vol. 17, pp. 202–210.
17. Prokopyshyn I. I., Dyiak I. I., Martyniak R. M. (2013). Chyslove doslidzhennia zadach pro kontakt trokh pruzhnykh til metodamy dekompozitsii oblasti. *Fiziko-khimichna mekhanika materialiv*. no. 1, pp. 46–55.

18. Krause R. and Wohlmuth B. A. (2002). Dirichlet-Neumann type algorithm for contact problems with friction. *Comp. and Visualization in Sci.* Vol. 5 (3), pp. 139–148.
19. Bayada G., Sabil J., and Sassi T. (2004). A Neumann–Neumann domain decomposition algorithm for the Signorini problem. *Appl. Math. Lett.* Vol. 17 (10), pp. 1153–1159.
20. Sassi T., Ipopa M., and Roux F.-X. (2008). Generalization of Lions nonoverlapping domain decomposition method for contact problems. *Lect. Notes Comp. Sci. Eng.* Vol. 60. P. 623–630.
21. Prokopyshyn I. I. (2008). Paralelni skhemy metodu dekompozitsii oblasti dlia kontaktnykh zadach teorii pruzhnosti bez tertia. *Visnyk Lviv. un-tu. Ser. prykl. matematika ta informatyka.* Vol. 14, pp. 123–133.
22. Prokopyshyn I. I. *Skhemy dekompozitsii oblasti na osnovi metodu shtrafu dlia zadach kontaktu pruzhnykh til: Dys. na zdobuttia nauk. stupenia kand. fiz.-mat. nauk.* Lviv, 2010. 163 p.
23. Dyyak I. I. and Prokopyshyn I. I. (2010). Convergence of the Neumann parallel scheme of the domain decomposition method for problems of frictionless contact between several elastic bodies. *J. Math. Sci.* Vol. 171 (4), pp. 516–533.
24. Dyyak I. I. and Prokopyshyn I. I. Domain decomposition schemes for frictionless multibody contact problems of elasticity *Numerical Mathematics and Advanced Applications 2009: Proc. of ENUMATH 2009, Uppsala, July 2009.* Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. P. 297–305.
25. Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I., and Prokopyshyn I. A. Penalty Robin–Robin domain decomposition methods for unilateral multibody contact problems of elasticity: *Convergence results// arxiv.org.* 2012. 32 p. – [Elektronnyi resurs: <http://arxiv.org/pdf/1208.6478.pdf>].
26. Kozachok O.P., Martyniak R.M., Slobodian B.S. *Vzaiemodiia til z rehuliarnym reliefom za naiavnosti mizhkontaktnoho seredovyscha.* Lviv: Rastr-7, 2018. 200 p.
27. Goryacheva I. G., Martyniak R.M. (2014). Contact problems for textured surfaces involving frictional effects. *Proceedings of the institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology.* Vol. 228, no. 7, pp. 707-716. Segal V. Equal-channel angular extrusion (ECAE): from a laboratory curiosity to an industrial technology / V. Segal //Metals. – 2020. Vol. 10, № 2 P. 244–273.
28. Goryacheva I.G., Malanchuk N.I., Martyniak R.M. (2012). Contact interaction of bodies with a periodic relief during partial slip. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* Vol. 76. no. 5, pp. 621–630.
29. Tkachuk N.N., Skripchenko N.B., Tkachuk N.A., Hrabovskii A.V. *Kontaktne vzaimodeistvie slozhnoprofilnykh detalei mashynostroitelnykh konstruksiyi s uchetom lokalnoi podatlivosti poverkhnostnogo sloia: monografia.* 2-e izd., pererab. i dop. Kharkov: FOP Panov A.N., 2019. 148 p.
30. Tkachuk N.N., Tkachuk N.A. (2011). Kontakt slozhnoprofilnykh tel: sviazannaia zadacha analiza napriazhenno-deformirovannogo sostoianiiia i heometrycheskogo synteza. *Mekhanika ta mashynobuduvannia,* no. 2, pp. 75–86.
31. Martyniak R.M., Prykhodko O.V. (2020). Zadacha pro vдавлювання бlyzkoho do ploskoho shtampu v pruzhnyi shorstkyi pivprostir. *Problemy obchysluvalnoi mekhaniky i mitsnosti konstruksii.* Vol. 31, pp. 66-77.
32. Tkachuk M.M. *Mikromekhanichni modeli ta metody oserednennia vlastyivostei materialiv merezhevoi struktury ta promizhnykh shariv kontaktuiuchykh til: dys... na zdobuttia naukovoho stupenia doktora tekhnichnykh nauk: 05.03.20/* Tkachuk Mykola Mykolaiovych. Kharkiv, 2020. – 464 s.
33. M. M. Tkachuk, N. V. Pinchuk, H. V. Tkachuk, I. Ye. Klochkov, M.A. Tkachuk, A. V. Hrabovskiy, V. I. Sierykov, I. P. Hrechka, S. V. Kutsenko, H. I. Tsymbal, A. M. Koba. (2022). Novi fizychni chynnyky za kontaktnoi vzaiemodii pruzhnykh til uzdozhz poverkhon blyzkoii formy. *Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Serii: Mashynoznavstvo ta SAPR,* no. 2, pp. 94–126.
34. Tkachuk M.M., Zavorotnii A.V., Zinchenko O.I., Hrabovskiy A.V., Tkachuk M.A., Pinchuk N.V., Shevchenko A.V., Tsendra H.V. (2022). Rozvytok pidkhodiv, modelei ta metodiv doslidzhennia mitsnosti ta dovhovichnosti torsionnykh valiv system pidresoriuvannia lehkykh bronovanykh mashyn. *Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «KhPI», serii: Mashynoznavstvo ta SAPR,* no.2, pp. 80–93.
35. O. V. Khlan, M. A. Tkachuk, A. V. Hrabovskiy. Teoretychni osnovy proektno-tekhnolohichno-vyrobnychoho zabezpechennia taktyko-tekhnichnykh kharakterystyk boiovykh bronovanykh mashyn. *Visnyk NTU «KhPI», serii «Novi rishennia v suchasnykh tekhnolohiakh»,* 2018, no. 9 (1285), pp. 83-89. doi:10.20998/2413-4295.2018.09.12
36. Tkachuk N.A., H.D. Hritsenko, A.D. Chepurnoi, E.A. Orlov, Tkachuk N.N. Konechno-elementnye modeli elementov slozhnykh mekhanicheskikh system: tekhnolohiia avtomatizirovannoi heneratsii i parametrizovannoho opisaniia. *Mekhanika ta mashynobuduvannia.* Kharkiv: NTU «KhPI», 2006, no.1, pp. 57-79.

*Починувши (received) 28.10.2023*

### *Відомості про авторів / About the Authors*

**Зінченко Олена Іванівна / Zinchenko Olena** – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), докторант, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2961-5861>; e-mail: ez99953@gmail.com