

**М. М. ТКАЧУК, А. В. ГРАБОВСЬКИЙ, М. А. ТКАЧУК, О. Ю. ШУТЬ, А. І. ЛІПЕЙКО,
Є. М. ОВЧАРОВ, Г. І. ЦИМБАЛ, В. С. ВЕЙЛЕР, І. Є. КЛОЧКОВ, Д. В. КИСЛИЦЯ**

АНАЛІЗ НЕЛІНІЙНИХ ЖОРСТКІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРУЖНИХ ОПОР КОМПРЕСОРА НАГНІТАЧА ПОВІТРЯ

Вібрації роторних систем значною мірою визначаються пружними характеристиками опор. У загальному випадку залежність переміщень від сили для таких опор є нелінійною. Це стосується підшипникових опор різних типів. Крім підшипників, у опорах роторних систем застосовуються також пружні елементи. Вони призначені для зміни загальної жорсткості опор. У роботі проаналізовано радіальну жорсткість гнучких кільцевих демпферів, що використовуються в опорах ротора. Для цього запропоновано два основних підходи. Перший – це звичайне моделювання цієї проблеми контактної механіки методом скінченних елементів. Другий – це аналітичний метод, який можна використовувати як альтернативу дорогим чисельним обчисленням. Цей метод базується на принципі мінімальної додаткової енергії. Розроблено спеціальне варіаційне формулювання в закритій формі із використанням балкової апроксимації Ейлера-Бернуллі для пружного кільця та спрощеної моделі нормального контакту на фланцях кільця. Було показано, що поверхневі допуски деталей мають істотний вплив на радіальний відгук гнучкого кільця, який може стати нелінійним. Щільне прилягання кільця з обох сторін робить його значно жорсткішим, а нещільне прилягання призводить до вільного руху ротора та значно слабкішого гасіння його руху. Обидва методи дали результати, які узгоджуються для розглянутих випадків. За рахунок варіювання їх конструктивних параметрів можливе відлаштування від критичних режимів роботи роторних систем.

Ключові слова: роторна система, пружна опора, жорсткість, скінченно-елементний аналіз, напружено-деформований стан, контактна взаємодія, принцип мінімуму додаткової енергії

**М. М. ТКАЧУК, А. ГРАБОВСЬКИЙ, М. А. ТКАЧУК, О. ШУТЬ, А. ЛІПЕЙКО, Є. ОВЧАРОВ,
Г. І. ЦИМБАЛ, В. С. ВЕЙЛЕР, І. КЛОЧКОВ, Д. КИСЛИЦЯ**

ANALYSIS OF NONLINEAR RIGIDITY CHARACTERISTICS OF AIR BLOWER COMPRESSOR ELASTIC SUPPORTS

Vibrations of rotor systems are largely determined by elastic characteristics of supports. In the general case, the dependence of displacements on force for such supports is nonlinear. This applies to bearing supports of various types. In addition to bearings, elastic elements are also used in supports of rotor systems. They are designed to change the overall stiffness of the supports. The paper analyzes the radial stiffness of flexible ring dampers used in rotor supports. For this, two main approaches are proposed. The first is a conventional simulation of this problem of contact mechanics using the finite element method. The second is an analytical method that can be used as an alternative to expensive numerical calculations. This method is based on the principle of minimum additional energy. A special closed-form variational formulation is developed using the Euler-Bernoulli beam approximation for an elastic ring and a simplified model of normal contact on the ring flanges. It was shown that the surface tolerances of parts have a significant effect on the radial response of a flexible ring, which can become nonlinear. Tight fit of the ring on both sides makes it much stiffer, and non-tight fit leads to free movement of the rotor and much weaker damping of its movement. Both methods gave results that are consistent for the considered cases. By varying their design parameters, it is possible to adjust the rotor systems from critical modes of operation.

Keywords: rotor system, elastic support, rigidity, finite element analysis, stress-strain state, contact interaction, principle of minimum additional energy

Вступ. При проектуванні роторних систем, які працюють у широкому діапазоні кутових швидкостей обертання, однією із основних задач є відлаштування від вібрацій. Такі вібрації є характерними за певних умов. Для дослідження вібрацій, як правило, будуються моделі, які враховують деформації вала, робочих дисків та опор. Моделювання напружено-деформованого стану (НДС) вала та робочих дисків легко здійснюється за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ). Проте моделювання поведінки опор стикається із низкою проблем. Зокрема, для підшипникових опор різних типів властива нелінійна статична характеристика. Це зумовлено, наприклад, зазорами між тілами кочення та обоймами підшипника. Крім того, при навантаженні тіла кочення контактують із обоймами. При цьому спостерігається нелінійна залежність «сила – переміщення».

У багатьох випадках із конструктивних міркувань підшипники не забезпечують відлаштування від небезпечних режимів роботи роторної системи. У таких випадках у опорах застосовуються додаткові пружні елементи. Це, наприклад, пружні втулки. Вони мають вигляд циліндричних кілець. На зовнішній та внутрішній поверхнях цих кілець виконано низку западин та виступів. Виступи контактують із сусідніми елементами опор. У початковому контакті

може бути зазор або натяг. За рахунок цього залежність «сила – переміщення» має першу нелінійну складову. Друга нелінійна складова виникає внаслідок контактної взаємодії западин із сусідніми елементами опор.

Таким чином, у опорах роторних систем поєднуються нелінійні характеристики підшипників та спеціальних додаткових пружних втулок. Якщо властивості підшипників є заданими, або такими, що можуть бути виміряними на стендах, то властивості спеціальних додаткових пружних втулок визначити складно. Це викликано тим, що значну роль відіграє зміна областей контакту при зміні сил, які діють між цими втулками та сусідніми елементами.

Таким чином, для визначення невідомих характеристик опор необхідно розробити моделі та методи, які поєднують, з одного боку, високу точність, а з іншого, – оперативність розрахунків. Це сформулювало напрямок досліджень, описаних у роботі.

Аналіз існуючих моделей і методів дослідження роторних систем. Однією із основних проблем при проектуванні роторних систем є відлашту-

© М. М. Ткачук, А. В. Грабовський, М. А. Ткачук,
О. Ю. Шуть, А. І. Ліпейко, Є. М. Овчаров,
Г. І. Цимбал, В. С. Вейлер, І. Є. Ключков,
Д. В. Кислиця, 2023

вання від вібрації або зниження їх рівня. Це досягається за рахунок підбору або управління характеристиками опор. Для цього застосовуються різні методи і моделі. У роботах [1–3] досліджуються зв'язані згинальні та крутильні вібрації роторної системи з нелінійним тертям. Так, у [1] для з'ясування основного механізму збудження та характеристик вібрацій, сполученого вигину та крутильної нелінійної динаміки представлена модель роторної системи з нелінійним тертям. Характеристика динамічного тертя описується кривою Стрібека, що генерує нелінійне тертя, пов'язане з відносною швидкістю. Рівняння руху незбалансованої роторної системи встановлюються Лагранжевим підходом. Чисельним розрахунком визначаються зв'язані вібраційні характеристики роторної системи при нелінійному терті, що добре досліджені. Обговорюється вплив основних параметрів системи на поведінку системи. Застосовуються діаграми біфуркації, фазові портрети та карти Пуанкаре для аналізу динамічних характеристик роторної системи. У результаті виявляють багатоформатні складні нелінійні динамічні реакції роторної системи при терті.

У роботах [4–7] описана параметрична нестабільність гнучкої роторної системи. Наприклад, у роботі [4] представлено моделювання та динамічний аналіз бортового ротора із базовим збудженням. Модель гнучкого валу і жорсткого диску придатна для ідеалізації ротора турбокомпресора. Обчислюються нелінійні гідродинамічні сили. Дисбаланс сил також враховується. Ділянки нестабільності визначаються шляхом індукції різного синусоїдального збудження підтримки.

У роботах [8–10] автори запропонували метод зменшення амплітуди коливань турбокомпресора з пасивними та активними магнітними підшипниками в резонансах. Так, у роботі [8] запропоновано метод зменшення амплітуди коливань турбокомпресора з пасивними та активними магнітними підшипниками в резонансах і резонансні зони, що відповідають одній з критичних швидкостей, починаючи від нуля до робочої. Метод базувався на здатності змінювати нелінійну силу та демпфуючі властивості активних магнітних підшипників та пасивних підшипників нової конструкції шляхом зміни електричних параметрів електромагнітої схеми. Запропонована конструкція пасивного магнітного підшипника з постійними кільцевими магнітами. Доцільність методу була обґрунтована результатами дослідження. У дослідженні були представлені результати чисельного аналізу, який моделював процес переходу через резонанси початкової системи зі значним зниженням амплітуд вібрації. Нелінійну систему розв'язували за допомогою методу Рунге-Кутти 5-го порядку. Результати були показані у вигляді тривимірних спектрів переміщення опорних точок та амплітудно-частотних характеристик. Ці результати були підтверджені експериментальними даними, отриманими на лабораторних установках, які реалізувала комбінована пасивно-активна магнітна підвіска ротора. Загальна відносна похибка вимірювань – на рівні 0,5 %. Невідповідність між експериментальни-

ми та проектними даними для амплітуд була у межах 2–3 % з реалізацією запропонованого способу відлаштування від резонансних режимів.

У статті [11] запропонована інженерна методика визначення радіальної податливості на прикладі циліндричних роликів підшипників.

Роторні машини схильні до вібрації через різні фактори їх конструкції та роботи [12]. Розташування і характеристики опор ротора відіграють ключову роль у впливі на його динамічну стійкість. Зокрема, це стосується високошвидкісних робочих коліс двотактних двигунів внутрішнього згоряння із турбонаддувом [13]. Через компактність і високу продуктивність цього компонента розстроїти цей ротор з важким диском від критичних швидкостей обертання є непростим завданням. Для досягнення цієї мети можуть застосовуватися пасивні та активні заходи [6, 8]. Основним завданням є контроль жорсткості підшипників та інших опор ротора. Ця характеристика часто виявляється нелінійною. Крім методів нелінійної динаміки ротора [14], які описують вібрації в цих системах, необхідні спеціальні методи для моделювання радіального відгуку самих опор як частини більшого аналізу.

Аналіз скінченних елементів є утилітарним інструментом для виконання такого аналізу для довільних конструкцій опор ротора [15]. Тим не менш, це може бути важко доступним у повсякденній інженерній практиці, де високо цінуються прості та швидкі рішення. Ось чому в цій статті запропоновано альтернативний метод аналізу. Він заснований на добре обґрунтованому варіаційному принципі контактної механіки, запропонованому Дж. Калькером [16]. Це формулювання раніше виявилось ефективною математичною основою для чисельних методів контактної аналізу [17]. Крім того, існує дуже ефективне застосування цього підходу до спеціальної конструкції гнучких кільцевих демпферів, які використовуються як проміжні пружні опори роторів. Його радіальний відгук визначається з розв'язку задачі мінімізації з квадратичними обмеженнями, кожна частина якої обчислюється аналітично.

Також продуктивним є аналіз радіальної жорсткості пружних кілець, описаний у [18–20]. Він полягає у мінімізації функціоналу додаткової енергії на множині силових факторів. При цьому кільце подається у вигляді набору криволінійних стержнів.

У перелічених роботах міститься опис значного обсягу досліджень. Проте вони не вичерпують усі проблемні аспекти при проектуванні елементів роторних систем. Зокрема, натепер немає завершеної методики розрахунку характеристик пружних втулок, які застосовуються у опорах роторних систем. Також відсутні моделі урахування контактної взаємодії цих пружних втулок із сусідніми елементами, які поєднують суперечливі властивості точності та оперативності досліджень.

Якраз на вирішення означеної частини проблем, які виникають при дослідженні роторних систем, спрямована ця робота.

Мета роботи – розроблення моделей та методів дослідження нелінійних характеристик залежності «сила – переміщення» із урахуванням контакт-

ної взаємодії пружних втулок опор роторних систем.

Об'єкт досліджень. Як об'єкт досліджень обрано пружну циліндричну втулку [12], яку зображено на рис. 1. Ця спеціальна додаткова пружна втулка має зовнішній діаметр $\varnothing D$, внутрішній діаметр $\varnothing d$, западини мають глибину t , ширина кільця b .

На фрагментах виступів A та C втулка контактує із зовнішнім I та внутрішнім II тілами, які є сусідніми елементами опори. Між цими тілами та втулкою існують зазори δ_1 та δ_2 . Якщо $\delta_{1,2} < 0$, то виникає попередній натяг.

Для визначеності у ході чисельних досліджень обрані наступні номінальні параметри: $D = 75 \cdot 10^{-3}$ м, внутрішній діаметр $d = 73 \cdot 10^{-3}$ м, западини мають глибину $t = 10^{-4}$ м, ширина кільця $b = 10^{-2}$ м. Матеріал – сталь (модуль Юнга $2,1 \cdot 10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $-0,28$).

Враховуючи значно вищу жорсткість тіл I і II порівняно із спеціальною додатковою пружною втулкою, ці тіла можна вважати абсолютно жорсткими.

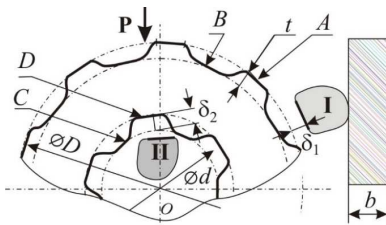


Рисунок 1 – Спеціальна додаткова пружна втулка для опор роторних систем

Між тілами I і II діє радіальна сила P , вона призводить до деформування спеціальної додаткової пружної втулки. При цьому спочатку контактує тіло I із виступами A та тіло II із виступами C . Потім у контакт вступають западини B та D .

Задача полягає у розробленні моделей напружено-деформованого стану спеціальних додаткових пружних втулок із урахуванням контактної взаємодії із жорсткими тілами I і II .

Моделі та методи аналізу напружено-деформованого стану пружних втулок опор. Для розрахунку напружено-деформованого стану спеціальних додаткових пружних втулок роторних систем розроблено три типи моделей: перша модель складається із одновимірних кільцевих моделей; друга модель описує $2D$ НДС у поперечному перерізі втулки; третя модель відтворює її $3D$ НДС.

Розглянемо ці моделі послідовно.

1. **«Кільцева модель»** напружено-деформованого стану спеціальних додаткових пружних втулок. Гнучкі кільцеві демпфери знаходять місце у багатьох ротаційних машинах як дешеве та ефективне рішення для пом'якшення небажаних вібрацій. Вони забезпечують необхідну податливість у підшипникових опорах, які змінюють власні частоти ротора. Часто можна відлаштувати кілька найнижчих режимів від робочої області швидкостей обертання. Ці еластичні кільця прості у виготовленні, вони надзвичайно компактні і, отже, можуть бути встановлені в існуючу конструкцію, якщо виникнуть будь-які проблеми з вібрацією, навіть на останніх етапах процесу проєктування, оскі-

льки вони не вимагають надмірних змін ротора, вибрані підшипники та корпусу.

Кільце є простою тонкою циліндричною оболонкою з вирізами на внутрішній і зовнішній поверхні, які чергуються. Вузькі фланці спираються на зовнішнє кільце підшипника з внутрішньої сторони та корпус статора із зовнішньої сторони. Щоб запобігти обертальному ковзанню пружного демпфера, може бути додане стопорне кільце. Частини кільця між фланцями тонші, ніж номінальна товщина кільця через зазор, утворений вирізами. Таким чином, вони не спираються ні з одного боку і можуть вільно деформуватися у вигляді криволінійних секцій балки. Це джерело гнучкості даного елемента конструкції.

Зауважимо, що конфігурація контакту відіграє важливу роль у загальній поведінці кільця. Якщо статус контакту залишається незмінним протягом усього навантаження, тоді сила реакції буде лінійною функцією переміщення. Таким чином, ефективну реакцію пружного кільця можна визначити одним скалярним параметром – радіальною жорсткістю. Тим не менш, припущення постійної конфігурації контакту в реальності часто порушується. Таким чином, можна очікувати, що пружний відгук гнучкого кільця буде загалом нелінійним.

Щоб визначити пружні властивості кільця, спочатку потрібні відповідні інструменти аналізу. Розглянута контактна задача розв'язана двома чисельними методами. Перший підхід полягає у виконанні скінченно-елементного аналізу. Однак як альтернатива цій дорогій чисельній процедурі, розроблено абсолютно новий метод напіваналітичного розв'язання.

Пружне кільце можна розглядати як криволінійну балку змінного перерізу. Проблеми контакту балок без особливих труднощів можна вирішити методом скінченних елементів на основі переміщення [18–20]. Тим не менш, замість цього пропонується альтернативний напіваналітичний метод. У розглянутому окремому випадку немає інших конструктивних елементів, крім одинарної балки, немає каркасної зв'язки, гнучке кільце має просту круглу форму. Система сил, що діють на кільцевий демпфер, чітко визначена. Таким чином, статичну невизначеність цієї структури можна легко розв'язати. Немає необхідності визначати неперервне поле переміщень у деформованій балці. Замість цього можуть бути визначені внутрішні сили та реакції, які виникають у формі контактних сил. Це можна зробити за допомогою варіаційного принципу, який дає можливість справлятися з обмеженнями нерівності відносно одностороннього нормального контакту прямим способом.

Нове формулювання відомого принципу мінімуму додаткової енергії, запропоноване Калькером для випадку нормального контакту двох твердих деформованих тіл. Функціонал додаткової енергії має вигляд:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} R \left[\frac{T^2(\phi)}{2EA(\phi)} + \frac{M^2(\phi)}{2EI_z(\phi)} \right] d\phi + \left[\sum_i P_i^+ g_i^+ - \sum_i P_i^- g_i^- \right]. \quad (1)$$

Інтегральний член у (1) є внутрішньою додатковою енергією деформованого кільця як балки Ейлера-Бернуллі у термінах тангенціальної сили та згинного моменту M . $A(\phi)$, $I_z(\phi)$ – змінна площа перерізу та момент інерції відповідно. P_i^+ , P_i^- – сили реакції в точках контакту на внутрішній і зовнішній стороні кільця. Загальне значення зазору g_i^+ і g_i^- у цих точках формується початковим зміщенням δ^+ і δ^- з обох боків, а також нормальною проекцією вектора переміщення ротора з горизонтальною складовою U і вертикальною складовою V , яка протидіє зазору з внутрішньої сторони кільця:

$$g_i^+ = \delta^+ - U \cos \phi_i + V \sin \phi_i; g_i^- = -\delta^- \quad (2)$$

Слід зауважити, що контакт у цьому формулюванні навмисно обмежено фіксованими місцями та передбачається точковим. Робоча гіпотеза полягає в тому, що контакт відбувається виключно на краях кільцевих фланців (опор, виступів). Це твердження підтверджується, зокрема, моделюванням скінченних елементів, як обговорюється нижче. Як наслідок, усе кільце можна розділити на дискретний набір сегментів між чітко визначеними потенційними контактними точками. Як тільки тангенціальна сила T , поперечна сила Q і згинний момент M відомі для будь-якої поточної внутрішньої точки сегмента, їх розподіл можна визначити для всього елемента через умови рівноваги. Без будь-яких невідомих сил або обмежень, накладених уздовж будь-якої частини гнучкого кільця, проблема є статично визначеною. Хоча внутрішні сили випробовуватимуть стрибки або перегини на кожному кінці сегмента, де застосовуються контактні реакції. Загалом достатньо знати внутрішні сили, при будь-якому довільному поперечному перерізі кільця та контактні реакції, а також для визначення напруженого стану всього кільця. Це означає, що додаткову енергію (1) можна аналітично обчислити як функцію цих змінних сил

$$\Phi = \Phi(T_0, Q_0, M_0; P_i^+, P_i^-) \quad (3)$$

Ця задача розв'язується засобами символьного обчислювального середовища Maple. Внутрішні сили лінійно залежать від перерахованих змінних. Тому додатковий функціонал енергії (3) виявляється квадратичним.

Природно, що реакція сил P_i^+ , P_i^- не може бути довільною. Перш за все вони мають бути статично допустимими, тобто відповідати умовам рівноваги:

$$\begin{cases} \sum_i P_i^+ \cos(\phi_i) - \sum_j P_j^- \cos(\phi_j) = 0; \\ \sum_i P_i^+ \sin(\phi_i) - \sum_j P_j^- \sin(\phi_j) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

які стосуються лише відносно горизонтальних і вертикальних компонентів результуючої сили, оскільки всі реакції є центральними та створюють нульовий момент відносно осі ротора. Окрім цих двох обмежень рівності односторонній характер контакту об-

межує невідомі контактні реакції лише додатними значеннями

$$P_i^+ > 0, P_i^- > 0. \quad (5)$$

Зрештою, варіаційний принцип формулюється у формі задачі умовної мінімізації для додаткової енергії, визначеної у замкненій формі (3) з урахуванням набору обмежень рівності та нерівності (4) і (5). Реакція пружного кільця на будь-яке вертикальне або горизонтальне зміщення ротора відновлюється за допомогою визначених контактних сил на внутрішній або зовнішній стороні кільця:

$$\begin{cases} F_U = -\sum_i P_i^+ \cos(\phi_i) = \sum_j P_j^- \cos(\phi_j), \\ F_V = -\sum_i P_i^+ \sin(\phi_i) = \sum_j P_j^- \sin(\phi_j). \end{cases} \quad (6)$$

Запропонований метод аналізу явно не оперує із пружними переміщеннями гнучкого кільця та не вводить будь-які диференціальні рівняння, які необхідно розв'язати. Дискретизація цього поля зміщення вищого порядку відповідно не потрібна. Натомість дискретизоване формулювання проблеми у термінах кількох силових змінних природним чином отримано із добре обгрунтованого варіаційного принципу та простого припущення щодо розташування контакту у замкненій формі.

Коли ротор зазнає певного радіального зміщення відносно корпусу, він стикнеться із внутрішніми фланцями гнучкого кільця, які звернені в напрямку руху. Як наслідок, вигнуті ділянки кільця, затиснуті між ротором і корпусом, будуть згинатися і сплющуватися. Ця пружна реакція створить силу реакції, яка протидіє руху ротора, що виконуватиме пружну функцію кільця. Криві залежності сили від переміщення для вертикального навантаження, розраховані аналітично за запропонованим варіаційним методом, заснованим на принципі мінімальної додаткової енергії і отримані методом скінченних елементів, показані для трьох різних випадків на рис. 2.

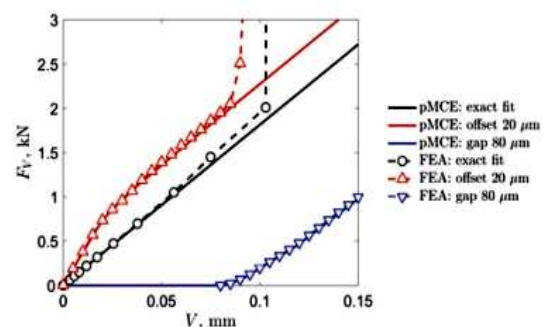


Рисунок 2 – Реакція гнучкого кільця на вертикальне переміщення ротора

Коли всі елементи зібрані з нульовими допусками, ця реакція буде лінійною, як можна побачити на рис. 2. Контакт буде миттєво встановлено на краях фланців, розташованих у нижній половині кільця, до якого притискається ротор. Цей набір контактів залишатиметься незмінним протягом більшої части-

ни завантаження. Постійна радіальна жорсткість гнучкого кільця, розрахована аналітично, дорівнює 18,1 кН/мм. Це значення узгоджується з аналізом скінченних елементів, який дає оцінку 18,5 кН/мм для початкової стадії навантаження. Зростаюча розбіжність між результатами для більших вертикальних переміщень слід віднести до спрощених припущень, які були прийняті для розробленого аналітичного методу. Переміщення лівого та правого кінців навантаженої половини кільця будуть набагато ближчими до тангенціального напрямку, а не до нормального. При цьому запропоноване варіаційне формулювання базується на моделі нормального контакту. Виявлення контакту в аналізі скінченних елементів здатне ідентифікувати зміну нормалі, коли краї фланців ковзають уздовж твердих тіл ротора та корпусу. Більш різка зміна поведінки відбувається у вигляді різкого посилення радіальної реакції при

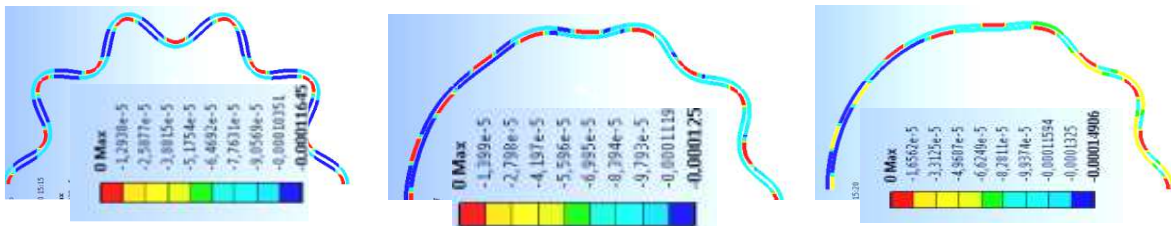


Рисунок 3 – Деформований стан і контактні сили на внутрішній I та зовнішній E поверхнях (колах) у взаємодії із ними ППК (двовимірне скінченно-елементне моделювання) при зростанні притисної сили

Як видно, щільне прилягання створює переднапружений стан і початкові деформації на початку навантаження для нейтрального розташування ротора. Кільце рівномірно стискається, а його фланці притискаються всередину та назовні з ненульовими зусиллями. У результаті фланці у верхній частині кільця деякий час залишаються в контакті. На початку навантаження діють більш активні контактні обмеження, ніж у випадку точної посадки. Разом із попереднім напруженням це спричиняє набагато більш жорстку пружну реакцію кільця. Оскільки фланці у верхній половині кільця виходять із контакту, жорсткість зменшується, як видно зі сплюснення кривої навантаження на рис. 2. Зрештою вона стає майже паралельною лінійній реакції ідеально підгананого кільця. Зростання сили реакції в цьому випадку відбувається швидше, оскільки поверхневе зміщення містить деяку частину початкового зазору. Хоча це посилення є більш поступовим порівняно із попереднім випадком.

Коли посадка нещільна, відбувається деякий вільний рух ротора відносно корпусу. Його величина дорівнює сумі допусків з обох сторін. У розглянутому випадку ротор може рухатися на 80 мкм, доки не зустрінє будь-який опір: 40 мкм до того, як він торкнеться кільця, і ще 40 мкм вони рухатимуться разом до корпусу.

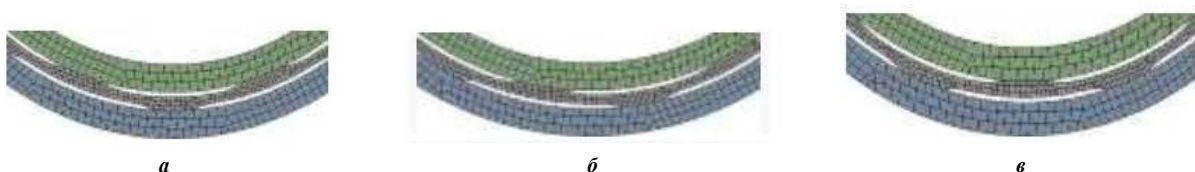


Рисунок 4 – Варіанти скінченно-елементних моделей для різних кутів дії сили (кількість опор – 10): a – 0° , b – 9° , c – 18°

зміщенні, яке приблизно дорівнює глибині вирізів. Коли цей зазор закривається через наближення ротора, кільце також увійде в контакт зі сторони, протилежної фланцю, спрямованому в напрямку радіального руху. Як тільки ця частина кільця буде затиснута між ротором і корпусом, вона стане такою ж жорсткою, як два жорстких тіла, між якими розміщене пружне кільце. Очевидно, запропонований аналітичний метод повністю ігнорує цей сценарій.

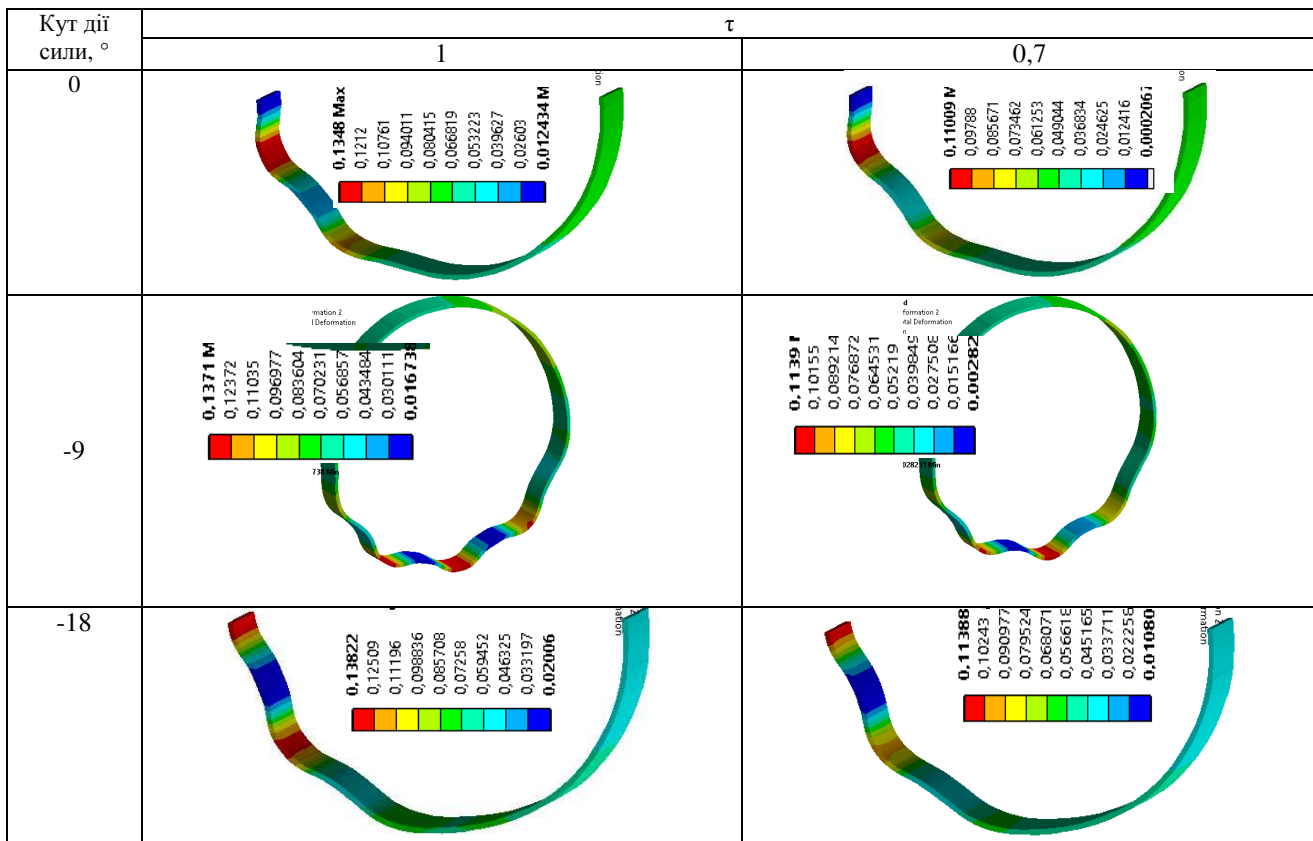
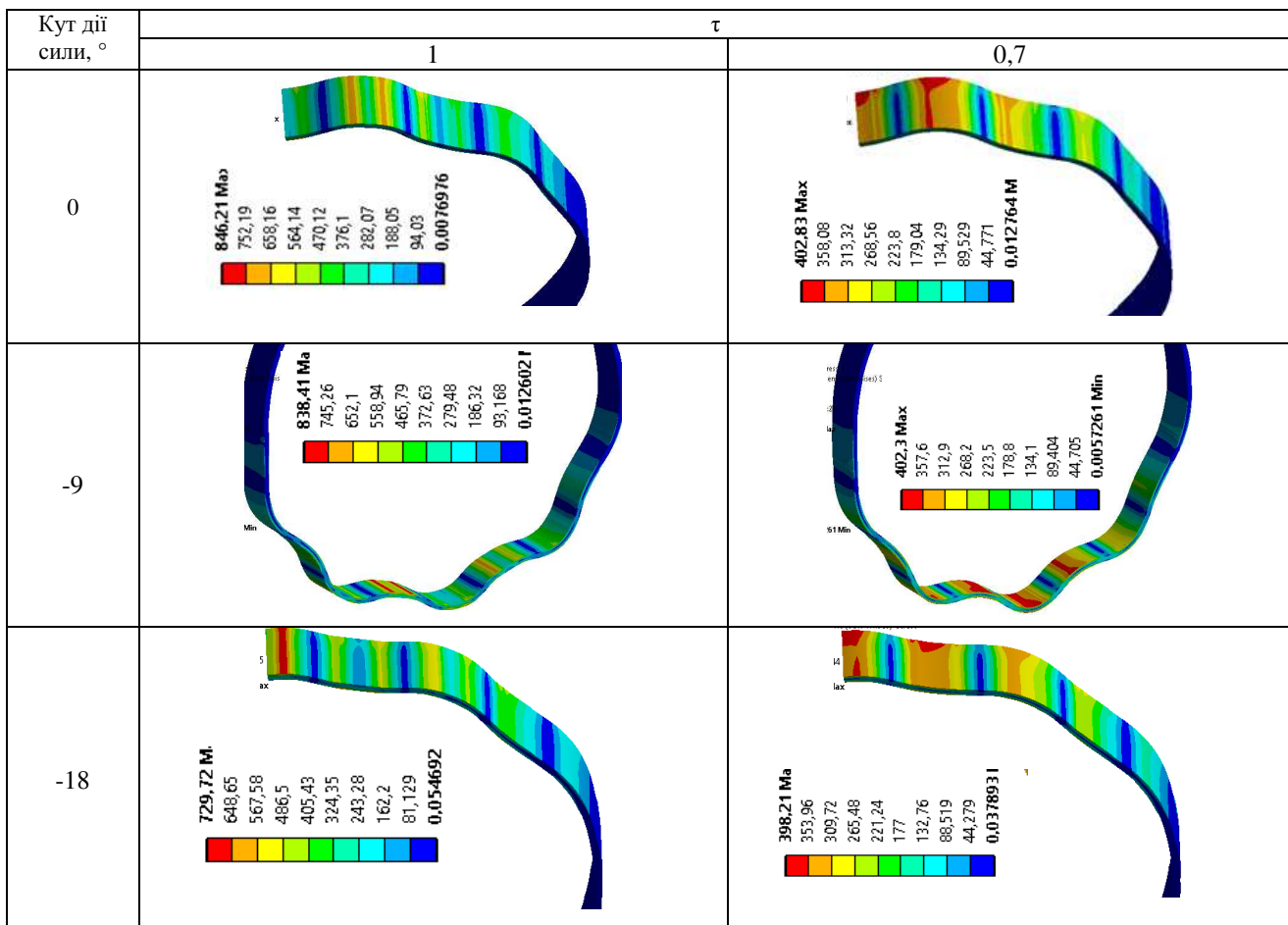
В іншому випадку, коли кільце щільно прилягає як до ротора, так і до корпусу, радіальний відгук стає кількісно і якісно іншим. Навіть для відносно невеликого додатного допуску 10 мкм з обох сторін, що дає загальне зміщення 20 мкм, гнучке кільце демонструє значно більшу жорсткість. Картина деформацій кільця та зміна стану зазору на рис. 3 [19] пояснюють цю різницю.

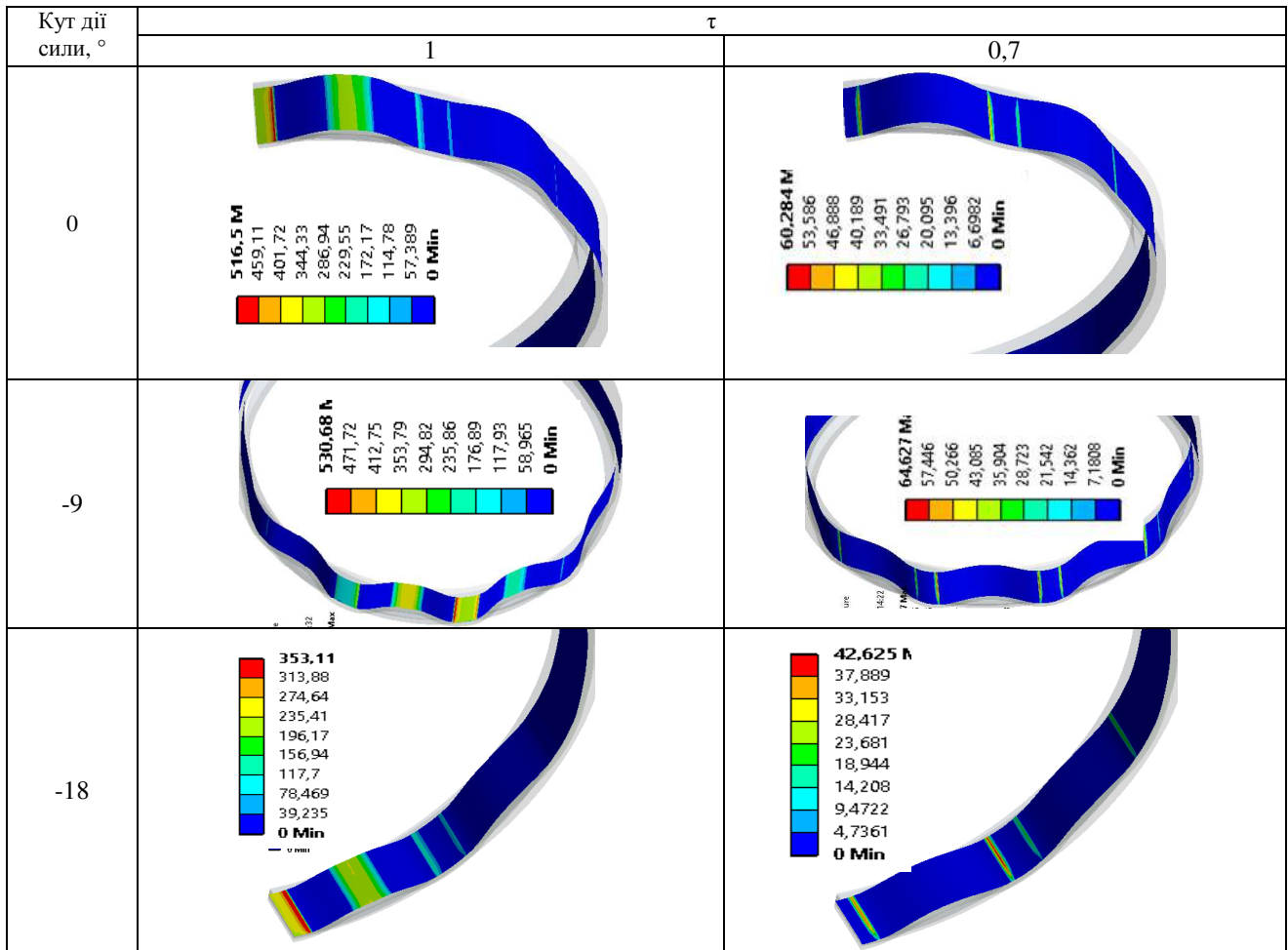
Пружний відгук після цього порогу набагато м'якший порівняно з двома іншими випадками. Жорсткість буде зростати повільно, оскільки все більше і більше фланців будуть послідовно входити в контакт.

2. 2D модель напружено-деформованого стану спеціальних додаткових пружних втулок. Для аналізу плоского напружено-деформованого стану спеціальних додаткових пружних втулок розроблена параметрична 2D модель. Окрім геометричних параметрів поперечного перерізу, наявний також параметр товщини b . На рис. 3 наведені отримані результати досліджень НДС.

3. 3D модель напружено-деформованого стану спеціальних додаткових пружних втулок. Крім 2D скінченно-елементної моделі, також була побудована аналогічна 3D модель. Для кожного із варіантів дії сили (0° , 9° , 18°) задано кінематичне навантаження Δ . Його максимальне значення $\Delta_{\max} = 0,12 \cdot 10^{-3}$. Поточне значення $\Delta = \tau \Delta_{\max}$ визначається параметром $\tau \in [0; 1]$.

На рис. 4 наведені варіанти скінченно-елементних моделей для різних кутів дії сили (кількість опор – 10), а у табл. 1–3 – результати досліджень напружено-деформованого стану спеціальних додаткових пружних втулок у 3D постановці.

Таблиця 1 – Розподіл повних переміщень (мм) при варіюванні кута дії сили та параметра τ Таблиця 2 – Розподіл еквівалентних напружень за Мізесом (МПа) при варіюванні кута дії сили та параметра τ 

Таблиця 3 – Розподіл контактної тиску (МПа) при варіюванні кута дії сили та параметра τ 

Як видно із наведених результатів, вони корелюють із даними, отриманими для випадків аналітичної та 2D скінченно-елементної моделі (див. рис. 2, 3).

Аналіз результатів досліджень. Співставлення результатів, отриманих за допомогою побудованих моделей 1–3, дає можливість виявити наступні особливості напружено-деформованого стану спеціальних додаткових пружних втулок.

1. У випадку зазору між втулкою та сусідніми елементами зона їх контактування локалізується на одному-двох виступах *A*, *C*. Зі зростанням *P* кількість контактуючих виступів поступово зростає (див. рис. 2, 3 та табл. 1–3).

2. У випадку попереднього натягу між втулкою та сусідніми елементами зона їх контактування за малих *P* займає усі виступи *A*, *C*. Зі зростанням *P* кількість контактуючих виступів поступово зменшується (див. рис. 2, 3 та табл. 1–3).

3. За певного рівня сили *P* починається контактування на рівні западин *B*, *C*. Контакт спочатку відбувається в середній частині западин, а далі поширюється до їх периферії (див. рис. 4 та табл. 1–3).

4. Залежність «сила – переміщення» має дві чітко виражені ділянки. Перша ділянка (див. рис. 2) відповідає контакту за всіма або за частиною виступів. Жорсткість спеціальних додаткових пружних втулок на цій ділянці низька та близька до константи. Друга ділянка відповідає контактуванню на зна-

чній частині западин. У цьому діапазоні жорсткість спеціальних додаткових пружних втулок різко зростає. Між цими ділянками спостерігається перехідна крива.

5. У першому наближенні залежність «сила – переміщення» можна подати у вигляді двох відтинків прямих ліній. Друге наближення може містити також перехідну криву у вигляді дуги кола або параболи. Ці апроксимаційні залежності можуть бути складовими розрахункової моделі вібрації роторних систем. При цьому увесь набір геометричних параметрів (див. рис. 1) є варіюваним. Відповідно, ці параметри присутні у побудованих апроксиматичних залежностях. Крім того, параметрами є властивості матеріалу спеціальних додаткових пружних втулок.

6. Наявність значних зазорів та натягів між втулкою та сусідніми елементами видозмінює залежності «сила – переміщення». Зокрема, зазори привносять розриви у цю залежність, а натяги збільшують жорсткість при малих рівнях сили *P*. За рахунок збільшення натягів можна не тільки збільшити жорсткість на початковому етапі навантажень, але й скоротити першу ділянку аж до її практичного знищення.

7. У деяких випадках бажаним режимом роботи спеціальних додаткових пружних втулок є перша ділянка характеристики «сила – переміщення», яка відповідає низькій жорсткості. За рахунок вибору

варіюваних параметрів втулки її можна перетворити у опору із квазілінійною пружною характеристикою. Якщо жорсткість підшипників висока, а зазори у цих підшипниках – незначні, то податливість опори роторної системи буде визначатися саме податливістю пружної опори. За помірних величин сили P цю опору можна вважати лінійно пружною.

8. У разі роботи на двох ділянках кривої «сила – переміщення» або на трьох ділянках (за наявності значних зазорів між спеціальною додатковою пружною втулкою та сусідніми елементами) опора не може бути промодельована як лінійно пружна. У цьому випадку вона може стати джерелом нелінійних ефектів у динамічній системі «вал – диски – опори».

9. Здійснений аналіз радіального відгуку гнучкого кільцевого демпфера доводить, що крім розмірів кільця, кількості фланців і глибини вирізів та інших геометричних параметрів, на його жорсткість істотно впливають допуски поверхні. Вкрай важливо контролювати цей фактор на етапах виробництва та складання, щоб уникнути небажаних відхилень від конструктивних характеристик цього важливого компонента. Крім того, можна ввести певні вимоги до допусків безпосередньо у проєкт. Щільне прилягання з обох сторін кільця може бути реалізоване, але при вживанні таких заходів слід ураховувати збільшення жорсткості та зменшення діапазону демпфованого руху за рахунок закриття зазору.

10. Щоби надійно передбачити ці ключові характеристики, необхідно здійснити ретельний аналіз. Аналіз методом скінченних елементів можна запропонувати досвідченим користувачам через його універсальність. Можна змоделювати широкий спектр конструкцій амортизаторів і розширити аналіз до мультифізики, включаючи, наприклад, динаміку рідини мастильного матеріалу. Проте простий і аналітичний метод, розроблений у [18], має свої переваги для багатьох інженерів. Для розглянутого типу гнучких кільцевих втулок він демонструє точність, що не поступається скінченно-елементному аналізу. Його можна легко реалізувати в будь-якому символічному обчислювальному середовищі або навіть у Microsoft Excel, що робить його набагато доступнішим для загального використання інженерами.

11. Отримані із використанням побудованих моделей 1–3 результати досліджень напружено-деформованого стану із урахуванням контактної взаємодії спеціальних додаткових пружних втулок із сусідніми елементами повністю співпадають. Похибка – у межах $3\div 4\%$. Таким чином, у першому наближенні для досліджень напружено-деформованого стану спеціальних додаткових пружних втулок можна застосовувати модель 1, а надалі – моделі 2, 3.

Висновки

1. У роботі описані моделі для аналізу напружено-деформованого стану пружних втулок опор роторних систем. Ці моделі побудовані шляхом поступового нарощування їх фізичної розмірності. Перша модель складається із фрагментів кілець, друга – плоска, а третя – просторова моделі. Перша модель – напіваналітична, вона базується на принципі мінімуму додаткової внутрішньої енергії досліджуваної

системи кілець. Моделі 2, 3 реалізують метод скінченних елементів у 2D та 3D постановках відповідно. Модель 1 є більш оперативною, а модель 3 – найбільш точною. Модель 2 є перехідною за точністю та оперативністю.

2. Побудовані моделі дають цілком узгоджені між собою результати моделювання їх напружено-деформованого стану із урахуванням контактної взаємодії. Тому на перших етапах досліджень (коли число варіантів – велике) доцільно застосовувати моделі 1 та 2, а на завершальних – модель 3.

3. Окремим важливим результатом досліджень є апроксимаційні залежності «сила – переміщення» для досліджуваних пружних втулок опор. Вони можуть бути побудовані на основі великого обсягу розрахунків із варіюванням параметрів втулок. Надалі ці залежності можуть бути використані як вихідні дані у розрахункових моделях вібрації роторних систем. З іншого боку, бажані залежності можуть формуватися із умов відлаштування від режимів сильних вібрацій. У цьому випадку, навпаки, підбираються такі параметри пружних втулок, які відповідають бажаним властивостям втулки.

Розроблені моделі та запропоновані методи досліджень у подальшому можуть бути застосовані для аналізу вібрацій роторних систем, а також для обґрунтування таких технічних рішень, які обмежують рівень таких вібрацій.

Список літератури

- Hua C., Cao, G., Rao, Z. et al. (2017). Coupled bending and torsional vibration of a rotor system with nonlinear friction. *J. Mech. Sci Technol.* 31, 2679–2689
- Shi M. L., D. Z. Wang and J. G. Zhang. (2013). Nonlinear dynamic analysis of a vertical rotor-bearing system, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 27 (1), 9–19.
- Hua C., Z. Rao, N. Ta and Z. Zhu. (2015). Nonlinear dynamics of a rubimpact rubber bearing-rotor system with Stribeck friction model, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 29 (8), 3109–3119.
- Reddy, Mutra Rajasekhara, and J. Srinivas. (2016). Vibration analysis of a support excited rotor system with hydrodynamic journal bearings. *Procedia Engineering* 144: 825–832.
- Han, Qinkai, and Fulei Chu. (2015). Parametric instability of flexible rotor-bearing system under time-periodic base angular motions. *Applied Mathematical Modelling*. 39, no. 15: 4511–4522.
- Avramov K., M. Shulzhenko, O. Borysiuk, and Christophe Pierre. (2015). Influence of periodic excitation on self-sustained vibrations of one disk rotors in arbitrary length journals bearings. *International journal of non-linear mechanics*. 77: 274–280.
- Cha, Matthew, and Sergei Glavatskih. (2015). Nonlinear dynamic behaviour of vertical and horizontal rotors in compliant liner tilting pad journal bearings: Some design considerations. *Tribology International* 82: 142–152.
- Martynenko G. (2016). Resonance mode detuning in rotor systems employing active and passive magnetic bearings with controlled stiffness. *International Journal of Automotive and Mechanical Engineering* 13: 3293.
- Azraai M. R., G. Priyandoko, A. R. Yusoff, and M. F. F. A. Rashid. (2015). Parametric Optimization of magneto-rheological fluid damper using particle swarm optimization. *International Journal of Automotive and Mechanical Engineering* 11: 2591.
- Martynenko, G. (2016). Application Of nonlinear models for a well-defined description of the dynamics of rotors in magnetic bearings. *Eureka: Physics and Engineering* 3: 3–12.
- Gaydamaka A., G. Kulik, V. Frantsuzov, ..., Paraniak N. (2019). Devising an engineering procedure for calculating the ductility of a roller bearing under a no-central radial load. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, vol. 3, no. 7 (99), pp. 6–10.
- Kelson, A.S., Cymanskii, H.P., Yakovlev, B.H. (1982). *Dynam-*

- ics of Rotor-Bearing Systems. Nauka, Moscow
13. Tkachuk, M.M., Grabovskiy, A., Tkachuk, M.A., Zarubina, A., Lipeyko, A. (2021). Analysis of elastic supports and rotor flexibility for dynamics of a cantilever impeller. *J. Phys.: Conf. Ser.* **1741**, 012043-1–012043-10
 14. Avramov, K.V., Mikhlin, Y.V. (2013). Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. *Appl. Mech. Rev.* **65**(2), 020801-1–020801-20
 15. Zhang, Y., He, L., Yang, J., Wan, F., Gao, J. (2019). Vibration control of an unbalanced single-side cantilevered rotor system with a novel integral squeeze film bearing damper. *Appl. Sci.* **9**(20), 4371-1–4371-18
 16. Kalker, J.J. (1987). Variational and non-variational theory of frictionless adhesive contact between elastic bodies. *Wear* **119**(1), 63–76
 17. Tkachuk, M. (2018). A Numerical method for axisymmetric adhesive contact based on Kalker's variational principle. *East.-Eur. J. Enterp. Technol.* **3**(7), 34–41
 18. Tkachuk, M., Grabovskiy, A., Tkachuk, A. (2022). Numerical and Analytical Analysis Methods for Radial Response of Flexible Ring Dampers. In: Rackov, M., Mitrović, R., Čavić, M. (eds) *Machine and Industrial Design in Mechanical Engineering*. KOD 2021. Mechanisms and Machine Science, vol 109. Springer, Cham.
 19. Ткачук М. М., Грабовський А. В., Прокопенко М.В., Шуть О.Ю., Овчаров Є.М., Ткачук М.А., Ліпайко А.І., Цендра Г.В., Шевченко А. В., Коба А. М. Жорсткісні властивості пружних втулок високообертових елементів двигунів. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*, серія: *Машинознавство та САПР*. 2022. № 2. С. 64–79.
 20. Tkachuk M. M., Grabovskiy A., Tkachuk M. A., Shut O. (2021). Computational–Experimental Evaluation of Stiffness Response in Elastic Supports of Rotor Systems. In book: *Nonlinear Mechanics of Complex Structures*, pp.353–366 DOI:10.1007/978-3-030-75890-5_20
- References (transliterated)**
1. Hua C., Cao, G., Rao, Z. et al. (2017). Coupled bending and torsional vibration of a rotor system with nonlinear friction. *J Mech Sci Technol* **31**, 2679–2689
 2. Shi M. L, D. Z. Wang and J. G. Zhang, (2013). Nonlinear dynamic analysis of a vertical rotor-bearing system, *Journal of Mechanical Science and Technology*, **27** (1), 9–19.
 3. Hua C., Z. Rao, N. Ta and Z. Zhu, (2015). Nonlinear dynamics of a rub-impact rubber bearing-rotor system with Stribeck friction model, *Journal of Mechanical Science and Technology*, **29** (8), 3109–3119.
 4. Reddy, Mutra Rajasekhara, and J. Srinivas. (2016). Vibration analysis of a support excited rotor system with hydrodynamic journal bearings. *Procedia Engineering* **144**: 825–832.
 5. Han, Qinkai, and Fulei Chu. (2015). Parametric instability of flexible rotor-bearing system under time-periodic base angular motions. *Applied Mathematical Modelling* **39**, no. 15: 4511–4522.
 6. Avramov K., M. Shulzhenko, O. Borysiuk, and Christophe Pierre. (2015). Influence of periodic excitation on self-sustained vibrations of one disk rotors in arbitrary length journals bearings. *International journal of non-linear mechanics*. **77**: 274–280.
 7. Cha, Matthew, and Sergei Glavatskih. (2015). Nonlinear dynamic behaviour of vertical and horizontal rotors in compliant liner tilting pad journal bearings: Some design considerations. *Tribology International* **82**: 142–152.
 8. Martynenko G. (2016). Resonance mode detuning in rotor systems employing active and passive magnetic bearings with controlled stiffness. *International Journal of Automotive and Mechanical Engineering* **13**: 3293.
 9. Azraai M. R., G. Priyandoko, A. R. Yusoff, and M. F. F. A. Rashid. (2015). Parametric Optimization of magneto-rheological fluid damper using particle swarm optimization. *International Journal of Automotive and Mechanical Engineering* **11**: 2591.
 10. Martynenko, G. (2016). Application Of nonlinear models for a welldefined description of the dynamics of rotors in magnetic bearings. *Eureka: Physics and Engineering* **3**: 3–12.
 11. Gaydamaka A., G. Kulik, V. Frantsuzov, ..., Paraniak N. (2019). Devising an engineering procedure for calculating the ductility of a roller bearing under a no-central radial load. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.*, vol. 3, no. 7 (99), pp. 6–10.
 12. Kelson, A.S., Cymanski, H.P., Yakovlev, B.H. (1982). *Dynamics of Rotor-Bearing Systems*. Nauka, Moscow
 13. Tkachuk, M.M., Grabovskiy, A., Tkachuk, M.A., Zarubina, A., Lipeyko, A. (2021). Analysis of elastic supports and rotor flexibility for dynamics of a cantilever impeller. *J. Phys.: Conf. Ser.* **1741**, 012043-1–012043-10
 14. Avramov, K.V., Mikhlin, Y.V. (2013). Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. *Appl. Mech. Rev.* **65**(2), 020801-1–020801-20
 15. Zhang, Y., He, L., Yang, J., Wan, F., Gao, J. (2019). Vibration control of an unbalanced single-side cantilevered rotor system with a novel integral squeeze film bearing damper. *Appl. Sci.* **9**(20), 4371-1–4371-18
 16. Kalker, J.J. (1987). Variational and non-variational theory of frictionless adhesive contact between elastic bodies. *Wear* **119**(1), 63–76
 17. Tkachuk, M. (2018). A Numerical method for axisymmetric adhesive contact based on Kalker's variational principle. *East.-Eur. J. Enterp. Technol.* **3**(7), 34–41
 18. Tkachuk, M., Grabovskiy, A., Tkachuk, A. (2022). Numerical and Analytical Analysis Methods for Radial Response of Flexible Ring Dampers. In: Rackov, M., Mitrović, R., Čavić, M. (eds) *Machine and Industrial Design in Mechanical Engineering*. KOD 2021. Mechanisms and Machine Science, vol 109. Springer, Cham.
 19. Tkachuk M. M., Hrabov'skyi A. V., Prokopenko M.V., Shut O.Yu., Ovcharov Ye.M., Tkachuk M.A., Lipeyko A.I., Tsendra H.V., Shevchenko A. V., Koba A. M. (2022). Zhorstkisni vlastyosti pruzhnykh vtulok vysokoobertovykh elementiv dvyniv. [Rigidity properties of elastic bushings of high-speed engine elements]. *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KHPI»*, seriya: *Mashynoznavstvo ta SAPR*, no. 2, pp. 64–79.
 20. Tkachuk M. M., Grabovskiy A., Tkachuk M. A., Shut O. (2021). Computational–Experimental Evaluation of Stiffness Response in Elastic Supports of Rotor Systems. In book: *Nonlinear Mechanics of Complex Structures*, pp.353–366 DOI:10.1007/978-3-030-75890-5_20

Надійшла (received) 01.03.23

Відомості про авторів / About the Authors

Ткачук Микола Миколайович / Tkachuk Mykola M. – доктор технічних наук, старший дослідник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», провідний науковий співробітник кафедри «Інформаційні технології і системи колісних та гусеничних машин ім. О. О. Морозова», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4753-4267>, тел.: (057)7076902, e-mail: m.tkachuk@tmm-saprg.org.

Грабовський Андрій Володимирович / Grabovskiy Andrey – доктор технічних наук, старший науковий співробітник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», провідний науковий співробітник кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6116-0572>; тел.: (057)7076166, e-mail: andrej8383@gmail.com.

Ткачук Микола Анатолійович / Tkachuk Mykola A. – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідувач кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4174-8213>; тел.:

(057) 707-69-02; e-mail: tma@tmm-sapr.org

Шуть Олександр Юрійович / Shut Oleksandr – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна, e-mail: tma@tmm-sapr.org

Ліпейко Андрій Іванович / Lipeiko Andrii – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; e-mail: tma@tmm-sapr.org

Овчаров Єгор Миколайович / Ovcharov Egor – головний конструктор КБ двигунобудування, ДП «Завод ім. В.О. Малишева»; м. Харків, Україна, e-mail: morozov@morozov.com.ua

Цимбал Ганна Іванівна / Symbal Ganna – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», провідний інженер кафедри «Інформаційні технології та системи колісних і гусеничних машин ім. О. О. Морозова», м. Харків, Україна; e-mail: m.tkachuk@tmm-sapr.org

Вейлер Володимир Сергійович / Veiler Volodymyr – заступник начальника Головного військового представництва-начальник групи контролю якості 85 Головного військового представництва МО України, м. Харків, Україна; e-mail: vejlervladimir@gmail.com

Клочков Ілля Євгенович / Klochkov Illia – магістр (M.Sc.), Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», молодший науковий співробітник кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-69-01; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4923-2833>; e-mail: s008@tmm-sapr.org

Кислиця Денис Валерійович / Kyslytsia Denys – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», студент кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; e-mail: kislitsa2014@ukr.net