

**М. М. ТКАЧУК, І. П. ГРЕЧКА, М. А. ТКАЧУК, В. І. СЕРИКОВ, А. В. ГРАБОВСЬКИЙ, Н. В. ПІНЧУК, Г. В. ТКАЧУК, І. Є. КЛОЧКОВ, Г. В. ЦЕНДРА, А. В. ШЕВЧЕНКО, В. В. КИРИЧУК, Д. О. ФРІЗЮК**

### **ІНТЕГРОВАНА РОЗРАХУНКОВА-ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ТЕХНОЛОГІЯ АНАЛІЗУ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ З УРАХУВАННЯМ ПРУЖНОГО ПРОМІЖНОГО ШАРУ**

У роботі міститься вирішення актуальної наукової проблеми механіки деформівного твердого тіла. Ця проблема полягає у створенні теоретичних основ розрахунково-експериментального дослідження контактної взаємодії складнопрофільних тіл. Розроблені підходи, методи і моделі для дослідження контактної взаємодії цих складнопрофільних тіл із урахуванням мікромеханічних властивостей поверхневих і проміжних шарів, які визначають їхню локальну контактну нелінійну жорсткість. Установлені якісно нові закономірності впливу на розподіл контактного тиску профілю контактуючих тіл та властивостей проміжного шару. Із застосуванням створених методів, моделей та засобів досліджень розв'язано низку модельних та прикладних задач. Установлено, що область контакту може змінювати форму і розміри при варіюванні геометричної форми контактуючих тіл, властивостей матеріалів проміжних шарів та рівня навантажень. Ця область може бути однозв'язною або багатозв'язною. Також може змінюватися характер розподілу контактного тиску. Його максимальні рівні можуть досягатися або у центральній частині області контакту, або ближче до периферії.

**Ключові слова:** механіка деформівного твердого тіла, складнопрофільне тіло, контактна взаємодія, контактний тиск, проміжний шар

**М. М. TKACHUK, I. HRECHKA, M. A. TKACHUK, V. SIERYKOV, A. GRABOVSKIY, N. PINCHUK, H. TKACHUK, I. KLOCHKOV, H. TSENDRA, A. SHEVCHENKO, V. KYRYCHUK, D. FRIZIUK**

### **INTEGRATED CALCULATION AND EXPERIMENTAL TECHNOLOGY FOR ANALYSIS OF CONTACT INTERACTION WITH ACCOUNT OF ELASTIC INTERMEDIATE LAYER**

The work delivers solution to a relevant scientific problem of solid mechanics. It consists in developing theoretical basis for computational and experimental research of contact interaction of complex-shaped bodies with account for micromechanical models of roughness and other intermediate or surface layers. New methods and models have been developed for the analysis of contact interaction of complex-shaped bodies with account for the micromechanical properties of surface and intermediate layers characterized by nonlinear local contact stiffness. The developed methods and models as well as the numerical analysis tools have been applied to a series of model and applied problems. The deformation behaviour of novel materials with network microstructures of one-dimensional elements has been determined. Macroscopical properties of these materials have been evaluated based on the special microscopic models and the homogenization methods. Regularities in contact distribution and its dependence on geometrical and physical factors have been determined for various complexshaped bodies. New design solutions for machine elements that improve their strength and durability have been justified. The developed methods and analysis tools have been introduced into the design of new engineering products. Their implementation resulted in improved technical characteristics of protection, structural and functional elements of transport vehicles of special purpose, gear transmissions, technical equipment, hydrovolumetric drives and so on. The conducted computational and experimental studies showed good agreement with the real response of network materials and the observed behavior of interacting elastic bodies with intermediate contact layer.

**Keywords:** solid mechanics, complex-shaped body, contact interaction, contact pressure, intermediate layer

**Вступ.** Як зазначається у роботі [1], забезпечення конструкційної міцності елементів сучасних машин у багатьох випадках вимагає розробки нових підходів, методів та моделей для аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл (СПТ) задля більш адекватного і точного розрахунку напружено-деформованого стану (НДС) та обґрунтування прогресивних технічних рішень виробів із високими технічними і тактико-технічними характеристиками (ТТіТХ).

При цьому все більшого значення набувають чинники, які впливають на форму і розміри області контакту, а також на розподіл контактної взаємодії між контактуючими тілами. Зокрема, потребує вивчення вплив геометричної форми контактних поверхонь, рівня діючих сил та мікромеханічних чинників на контактну взаємодію елементів машинобудівних конструкцій.

Сучасна практика передбачає кінематичне та силове сполучення елементів, яким надається близької форми. З огляду на це, зокрема, набувають істотного значення деформації, що виникають у шорсткому шарі, покриттях, включеннях на робочих поверхнях цих СПТ. Для цілого ряду виробів питання впливу властивостей поверхонь на перерозподіл контактного тиску у їхньому сполученні є визначальним для забезпечення міцності. Також важливим є випадкове чи цілеспрямоване збурення форми поверхонь контактуючих тіл.

В обох цих випадках при урахуванні зазначених чинників існує потреба у створенні відповідних теоретичних моделей та методів обчислення. При цьому важливим є експериментальне підтвердження їхньої адекватності, точності результатів та достовірності рекомендацій на їх основі, які би забезпечували міцність контактуючих тіл.

Таким чином, необхідне створення розрахунково-експериментального методу та дослідження із його застосуванням контактної взаємодії СПТ. Це є змістом цієї роботи.

**Аналіз існуючих методів дослідження контактної взаємодії пружних тіл.** Як зазначається у роботі [1], «... значна кількість машинобудівних конструкцій містить елементи, які знаходяться в умовах контактного силового та кінематичного сполучення. З метою зменшення контактного тиску в цих зонах проєктувальники прагнуть використовувати як спряжені поверхні близької, а також частково, фрагментарно або майже співпадаючої (конгруентної) форми. Це, наприклад, модифікація робочих поверхонь зубців різних зубчастих передач, поверхонь роликотидшипників, штифтових, шліцевих, шпонкових чи інших видів з'єднань, бігових доріжок гідрооб'ємних передач (ГОП) тощо. Традиційні

© М. М. Ткачук, І. П. Гречка, М. А. Ткачук, В. І. Сериков, А. В. Грабовський, Н. В. Пінчук, Г. В. Ткачук, І. Є. Клочков, Г. В. Цендра, А. В. Шевченко, В. В. Киричук, Д. О. Фрізюк, 2023

методи моделювання контактної взаємодії призводять у таких випадках або до значних похибок в одержуваних результатах, або до надмірно громіздких чисельних моделей. Ще одним суттєвим чинником є недостатньо адекватне моделювання умов контактної сполучення на границях цих СПТ. Найчастіше для цього записується, наприклад, умова непроникнення для гладких тіл у лінеаризованому вигляді. Як один із найбільш адекватних варіантів – урахування шорсткості, яка моделюється, наприклад, вінклеровим шаром, що дає дещо уточнені, але також лінеаризовані умови контактної взаємодії, які є умовами сумісності переміщень відповідних точок сполучених поверхонь.

У той же час сам поверхневий шар шорсткості (напилен, плівок, покриттів тощо) має у загальному випадку нелінійні властивості у залежності «тиск – переміщення». У результаті отримуваних залежностей «локальної» контактної жорсткості (податливості) від тиску, швидкостей, температури, режимів і технологій зміцнення тощо, що базуються на мікрOMEХАНІЧНИХ МОДЕЛЯХ, стають істотно нелінійними. До теперішнього часу для формування цих залежностей залучаються або дані експериментальних досліджень, або різні спрощені моделі контактної взаємодії мікронерівностей у вигляді стрижнів, напівсфер тощо. У цьому випадку на основі одержуваних даних встановлюються різні моделі локальної податливості, які народжуються мікронерівностями поверхні (або іншими джерелами). Тут слід виділити, зокрема, роботи І.В. Крагельського, Н.Б. Дьомкіна, Персона (Persson BNJ), Грінвуда (Greenwood JA) та інших [1]. У той же час дотепер відсутня єдина завершена теорія мікрOMEХАНІКИ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ. Однак відразу можна відмітити, що вже запропоновані до теперішнього часу нові моделі, які описують зв'язок «нормальні переміщення – контактний тиск», є істотно нелінійними, тобто такими, що не лінеарізуються без втрати фізичної адекватності, математичної коректності та чисельної точності.

Таким чином, у записі умов контактної взаємодії (непроникнення) з'являються нелінійні доданки, зумовлені нелінійністю фізико-механічних характеристик матеріалів шарів шорсткості, що принципово відрізняє їх від традиційних лінеаризованих. У результаті структурна нелінійність задачі доповнюється фізичною, причому друга присутня у співвідношеннях, які відображають суть першої. Для розв'язання таких задач, що містять нелінійні доданки в умовах контактної взаємодії, необхідне розроблення нових методів і підходів. Більш того, потрібне створення нових шляхів розв'язання обернених задач, тобто геометричного синтезу сприятливих за міцністю профілів поверхонь взаємодіючих тіл і фізико-механічних властивостей проміжних або поверхневих шарів. Ці обставини формують актуальну наукову проблему розроблення нових методів аналізу контактної взаємодії елементів машинобудівних конструкцій (ЕМБК) з урахуванням не тільки структурної, а й додаткової фізичної нелінійності, а також обернених задач синтезу (тобто обґрунтування геометричної форми поверхонь і властивостей

поверхневих шарів матеріалів контактуючих тіл за критеріями міцності).

Вирішення всіх перерахованих проблемних питань повною мірою і в завершеному вигляді до теперішнього часу відсутнє. У свою чергу, потреби машинобудування у розробці методів розв'язання такого типу задач переоцінити складно, оскільки їх відсутність нівелює всі переваги, що досягаються при синтезі нових матеріалів, форм деталей і технологічних операцій оброблення їхніх поверхонь» [1].

Дійсно, у низці робіт [2–13] описано загальні методи аналізу контактної взаємодії тіл складної форми. Зазначено, що аналіз контактної взаємодії є одним із найбільш важливих напрямків у механіці. Це викликано як потребами машинобудування, де потужність і багатьох випадках передається за допомогою механічного контакту деталей, так і багатством математичних постановок контактних задач. Таким чином, сформувався цілий напрямок – механіка контактної взаємодії (або контактна механіка) [14].

Аналітичний розв'язок Г. Герца для задачі контактної взаємодії із певними змінами, доповненнями та уточненнями, дійшов до нашого часу. Більш широка постановка задач контактної взаємодії та їх виділення у окремий клас сформульована у роботі Сінборіні. На розв'язання контактних задач у різних постановках були спрямовані зусилля багатьох інших дослідників. Були задіяні та розвинені методи математичної фізики та функціонального аналізу, у т.ч. – асимптотичні методи, методи однорідних розв'язків, парних рівнянь, Р-функцій тощо.

Разом із тим бурхливий розвиток останнім часом отримали чисельні методи, пов'язані із дискретизацією тіл методом скінченних (МСЕ) [15] та граничних елементів (МГЕ) [16]. Теоретичною базою цих чисельних методів для контактних задач можуть бути відповідно варіаційні формулювання та граничні інтегральні рівняння [13, 17–19]. Що стосується варіаційних постановок, то вони отримали суттєвий розвиток на основі теорії варіаційних нерівностей. Крім того, одним із варіантів такого типу постановок є варіаційний принцип Калькера [20]. Він оперує із функціоналом, визначеним на множині невід'ємних розподілів контактного тиску, на якій, власне, і розшукується його мінімум.

Різноманітні постановки, формулювання та методи й моделі разом із тим не вичерпують усього набору чинників, які потрібно враховувати. Так, у загальній постановці важко об'єднувати довільну форму контактуючих тіл, нелінійні властивості поверхневих шарів, шорсткості, прокладок, напилен, плівок тощо.

Отже, виникла необхідність здійснити аналіз форми зазору, властивостей проміжних шарів між контактуючими тілами та базових дискретизованих формулювань контактних задач.

Аналіз впливу закону розподілу зазору на контактну взаємодію складнопрофільних тіл свідчить [1], що традиційні підходи контактної механіки полягають у розгляді контакту гладких тіл, поверхні яких або частково співпадають (так званий «узгоджений» контакт [14]), або зазор між ними описується степеневою функцією двох змінних у координатах точок площини, дотичної до точки початкового контакту (або «неузгоджений»

контакт). У багатьох випадках такі підходи допустимі для первинного аналізу напружено-деформованого стану. Проте, з одного боку, прагнення реалізувати складні взаємні рухи призводить до формування складних поверхонь контактуючих тіл, які не можуть бути описані навіть локально поверхнями другого порядку. Це, зокрема, поверхні двопараметричних, еволютивних та інших зубчастих передач, фасонні кулачки в механізмах двигунів внутрішнього згоряння, модифіковані поверхні підшипників та профільовані бічні поверхні їхніх поршнів [1, 2]. З іншого боку, прагнення знизити рівень контактних навантажень призводить до тенденції зближення поверхонь контактуючих тіл на якомога більшій площі. Отже, зазор між контактуючими поверхнями не тільки не може бути задовільно описаний деякою апроксимаційною поверхнею другого порядку, але й стає сумірним із нормальними переміщеннями точок поверхонь контактуючих тіл та приповерхневих шарів на всій площі можливого контакту. Окрім того, розміри поверхонь можливого контакту сумірні із розмірами контактуючих тіл. Таким чином, порушуються основні гіпотези, на яких базуються традиційні моделі контактної взаємодії.

Отже, на розвиток традиційних постановок свого часу були розглянуті випадки, що є розширенням класичних постановок [14, 21–23]. Так, у роботі [21] множина функцій, якими описується зазор  $\Phi$  між поверхнями контактуючих тіл, була розповсюджена на більш широку множину функцій.

Одним із чинників, які також потрібно урахувати, є шорсткість поверхонь реальних деталей. Моделі шорсткості мають різну фізичну основу та математичне формулювання [21–26]. Проте наявний арсенал моделей та методів не вичерпує усієї множини задач, доступних до розв'язання із їх залученням. Разом із тим певні формулювання природним чином адаптовані до розвитку у напрямках, що становлять інтерес. Так, варіаційні принципи, які можуть бути сформовані на розвиток принципу Калькера [20], мають певну універсальність щодо властивостей контактуючих тіл. Це дає змогу, використовуючи принцип Калькера як початкове «ядро», нарощувати його за рахунок доданків, у яких зосереджені різні характерні властивості тих чи інших досліджуваних об'єктів. Це уможливує урахування нелінійних властивостей поверхневих шарів матеріалів тіл, які піддані технологічним операціям зміцнення, напилення, термообробки тощо. Вплив цих ефектів є суттєвим, тому потрібно розробляти фізично адекватні та математично строгі моделі, які передбачають, зокрема, залежність поведінки матеріалів досліджуваних об'єктів від історії навантаження. Проте на сьогодні такі розробки, які повною мірою націлені на перелічені проблемні аспекти, у літературі відсутні. Отже, склалося протиріччя між потребами практики промислового виробництва у нових методах і моделях аналізу контактної взаємодії та можливостями механіки. На противагу існуючим розробкам [21–26], підходи, викладені у [1–4], продемонстрували суттєвий прогрес у напрямку розвитку моделей та методів аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл.

Разом із тим, окрім шорсткості, існує ще велика група інших чинників, які впливають на контактну жорсткість приповерхневих шарів, зокрема, технологічного походження. Це і різні види зміцнення (дискретне, континуа-

льне, комбіноване), і напилення, і плівки, а також різні варіанти термохімічного та механічного впливів на поверхні відповідальних деталей машин. Якраз ці особливості не мають засобів інтеграції моделей їхніх властивостей у загальні моделі контактної взаємодії. У випадку складнопрофільних тіл із контактуючими поверхнями близької форми приходимо до ситуації контакту СПТ із малим зазором та проміжним шаром із складним законом поведінки. Її аналіз на основі існуючих підходів, методів та моделей неможливий. У результаті виникає проблема аналізу контактної взаємодії системи СПТ із фізично нелінійним шаром. При цьому виокремлюються два пласти проблеми. Перший – мікромеханічний рівень. Він передбачає дослідження мікрооб'єму випадкового профілю мікронерівностей у контакті із спряженим. Інший пласт – макромеханічний. Він якраз формує і рівень, і розподіл навантажень між складнопрофільними тілами. Разом із тим цей розподіл залежить від властивостей, сформованих на мікрорівні. У підсумку приходимо до проблем контактної взаємодії СПТ, яка поєднує два рівні (мікро- та макро-). Основна нова методологічна проблема при цьому – поєднання цих різнорівневих підмоделей. Інша сторона проблеми – урахування ефекту впливу нелінійності залежності змінання поверхневого шару від контактного тиску. І, нарешті, основним аспектом проблеми є відсутність методів розв'язання сформованої системи рівнянь та нерівностей. Окрім того, потрібне експериментальне підтвердження застосовності тих чи інших моделей та методів дослідження контактної взаємодії СПТ. Вирішення всіх перерахованих проблемних питань повною мірою та у завершеному вигляді дотепер відсутнє. А це спонукає до їх вирішення, оскільки вони стоять на заваді розв'язання основних задач досліджень у контактній механіці та машинобудуванні.

Аналіз підходів та моделей мікромеханіки контакту свідчить про розвинений сучасний стан методів дослідження контактної взаємодії елементів машинобудівних конструкцій складної геометричної форми, у т.ч. – у розрізі та із урахуванням мікромеханіки поверхневих та проміжних шарів. Вичерпна теорія, що описує статистичні властивості випадкових поверхонь, запропонована в роботі [27]. Грінвуд і Вільямсон розробили модель контакту, засновану на спрощених припущеннях щодо розподілу характеристик нерівностей. Теорія Грінвуда-Вільямсона допускає великі можливості для уточнення, зокрема, щодо геометричних властивостей випадкових поверхонь [28].

Надалі розвиток теорії шорсткого контакту пов'язано з фрактальною природою геометрії тіл [29–32].

Перссон розробив детальну модель, у якій обґрунтував обернено-потенціальну залежність значення контактного тиску від величини середнього зазору між притискуваними поверхнями [33–38].

Ще однією величиною, що відображає властивості шорсткого контакту, є контактна жорсткість [35–39]. Ключовим параметром, що впливає на контактну жорсткість, є фрактальна розмірність поверхні, що знайшло вираження в аналітичній оцінці, запропонованій Портом і Поповим [24, 40].

Отже, можна зазначити, що існує значна кількість теоретично, чисельно та експериментально визначених моделей для опису властивостей поверхневих шарів контактуючих тіл. Застосування тих чи інших залежно-

тей визначається конкретними умовами.

Дійсно, як уже визначалося, поверхні деталей механізмів і машин не є абсолютно гладкими. У підсумку приповерхневі шари деталей машинобудівних конструкцій набувають форм і фізико-механічних властивостей, відмінних від основного матеріалу [41].

Крім особливостей геометричної форми, приповерхневі шари матеріалу тієї чи іншої деталі мають також фізико-механічні властивості, відмінні від властивостей матеріалу у глибині деталі. Це викликано не тільки мікроструктурою цих шарів, але й сукупною дією чинників, які впливають на ці приповерхневі шари при виготовленні (див. вище), а також в умовах реальної експлуатації. Крім того, із функціональних вимог між контактуючими тілами часто розміщують прокладки, плівки, шари – тобто тонкі деталі із відповідними характеристиками

Для моделювання контактної взаємодії шорстких (шорсткуватих) тіл прямий опис усіх перелічених чинників незастосовний, оскільки це призводить до занадто громіздких та неефективних із точки зору, наприклад, чисельного дослідження, моделей. З іншого боку, з огляду на слабкий взаємний вплив деформування окремих мікронерівностей, їх можна подати у вигляді псевдошару, віднісши усі характеристики мікрорельєфу до фізико-механічних властивостей матеріалу цього шару. При цьому, як правило, такі моделі описують місцеві деформації такого псевдошару, тобто силовий розподілений вплив викликає у цьому шарі тільки місцеві (локальні) його деформації. Така модель вперше до розгляду була запропонована І.Я. Штаєрманом [14]. Особливостями такого шару, на відміну від основи Вінклера, є: нормальний тиск на зовнішню його поверхню спричиняє не тільки «локальну» деформацію шару, але й передається на глибинні шари тіла, спричиняючи «глобальну» деформацію усього тіла; у загальному випадку залежність прогинів (локальних переміщень точок зовнішньої поверхні шару, умовно зафіксованих на внутрішній його поверхні) має нелінійний характер відносно нормального тиску  $p$

$$w = w(p), \quad (1)$$

яка у багатьох випадках [42] замінюється лінійною залежністю

$$w = \lambda \cdot p, \quad p = c \cdot w, \quad (2)$$

де  $\lambda, c$  – так звана контактна податливість та жорсткість відповідно [21].

У підсумку слід визнати, що подальші дослідження контактної взаємодії шорсткуватих тіл залежать від типу моделі, яка пов'язує мікроструктурні властивості приповерхневих шарів матеріалів деталей, із одного боку, та моделей місцевої (локальної) деформації (1), (2) – з іншого. На цьому рубежі здійснюється перехід від мікро- до макромеханіки контактної взаємодії.

Як уже було зазначено, для опису властивостей шарів шорсткості застосовуються різноманітні моделі [14, 41, 42]. Вони досягли на сьогодні значного прогресу, проте не втратили застосовності також і традиційні підходи, які базуються або на спрощених моделях, або на емпіричних даних. Серед емпіричних можна виділи-

ти модель, яка описана у [42]. Запропонована ступенева залежність

$$w = cp^m, \quad (3)$$

де  $c, m$  – параметри, що залежать від матеріалу деталі, мікрорельєфу його поверхні та технологічної операції обробки.

Слід зазначити також, що нормальний контакт, як правило, не можна відділити від процесів тертя і зношування, які супроводжують експлуатацію деталей машин. Таким чином, формується взаємозв'язок та взаємовплив наступних чинників [41–46]: розподіл контактного навантаження; мікрорельєф та властивості приповерхневих шарів деталей; розподіл контактної тиску та взаємних зміщень точок поверхонь спряжених складнопрофільних тіл; тертя на контактуючих поверхнях; зношування поверхневих шарів контактуючих деталей. Усі ці чинники знаходяться, такби мовити, у постійному «динамічному» взаємозв'язку та взаємовпливі.

Шорсткість також істотно впливає на адгезійні властивості поверхонь. Останнім часом значну увагу приділено дослідженню різних моделей адгезійного контакту, огляд сучасних напрямків можна знайти в [46].

У багатьох сучасних публікаціях останнім часом багато уваги приділяється контактним задачам для функціонально-градієнтних матеріалів, які розв'язують у термом'яку постановці [47], умовах адгезійної взаємодії [48], ортотропних тіл [49] тощо. У роботі [50] у стандартну модель Джонсона-Кендалла-Робертса було внесено урахування додаткового двовісного розтягу одного з тіл. Вплив зміни геометрії на величину сили відриву досліджено у роботі [51].

В'язкопружне деформування матеріалів також має істотний вплив на контактну поведінку тіл [52–54]. Термомеханічні деформації можуть призводити до відносного ковзання за нормального контакту ідентичних тіл [55].

Підводячи підсумки, можна на основі аналізу описаного матеріалу обґрунтувати наступні висновки.

1. Натепер відсутні універсальні моделі для урахування властивостей приповерхневих шарів деталей машинобудівних конструкцій, які би коректно врахували усі значущі чинники.

2. Існує велика кількість моделей, що пов'язують мікро- та макромеханічні властивості поверхневих шарів матеріалів; у загальному випадку вони, як правило, пов'язують місцеві (локальні) деформації проміжних шарів із контактним тиском.

3. Основною перешкодою до моделювання реальних процесів і станів при контактній взаємодії складнопрофільних тіл є відсутність достатньо універсальної математичної моделі, яка б пов'язувала «локальні» та «глобальні» деформативні властивості поверхневих шарів контактуючих тіл, причому із урахуванням варіативності цих властивостей та їх залежності від історії навантаження.

4. Відсутні математичні моделі, які би пов'язували властивості мікроструктури поверхневих шарів, із одного боку, та форми деталей – із іншого; отже, такби мовити, не збудовані зв'язки мікро- та макрогеометричних параметрів контактуючих деталей, а, відповідно, складно дослідити їх взаємний вплив.

5. Натепер відсутні математичні моделі, які би пов'язували усі значущі чинники у єдиній розв'язувальній системі співвідношень для розв'язання задач синтезу геометричної форми контактуючих поверхонь складнопрофільних тіл та властивостей проміжних шарів (шорсткості, плівки, напильні тощо) за критеріями міцності, довговічності, працездатності деталей машинобудівних конструкцій.

У той же час для частинних випадків вдається побудувати достатньо адекватні моделі, що описують фізико-механічні властивості приповерхневих шарів контактуючих тіл (типу (1)–(3)). Отже, принциповою проблемою є якраз побудова моделей та методів розв'язання співвідношень, які поєднують мікро- та макромеханічні властивості поверхневих шарів та усього об'єму контактуючих тіл. Ця обставина формує одну із задач досліджень, тобто створення такої системи співвідношень, яка відповідає природним потребам досліджень, а також методів їх розв'язання. Окремої уваги заслуговують експериментальні методи дослідження контактної взаємодії пружних тіл.

Задачі визначення напружено-деформованого стану та розподілу контактних зусиль між пружними тілами є тісно пов'язаними. З огляду на цю обставину експериментальні дослідження розподілу контактного тиску у деяких випадках суміщають із аналізом НДС. Так, на практиці широко застосовні методи тензометрії [56] залучаються до вимірювання компонент НДС у безпосередній близькості до зон дії контактних зусиль (рис. 1). При цьому чим ближче розміщується давач (чи їх група), тим точніше визначення контактного тиску у зоні А (див. рис. 1). Якщо є вільна частина поверхні на контактуючих тілах, то можна із помірною точністю вимірювати розподіл тиску на периферії зони їхнього контакту. Для того, щоби визначити за допомогою тензодавачів розподіл контактного тиску всередині області контакту, в одному із тіл у спеціально виготовлених глухих отворах розміщують мікроемдози [56] (рис. 2). Зовнішня поверхня цих мікроемдоз співпадає із початковою зовнішньою поверхнею тіла до виготовлення отворів. Часто ці зони із мікроемдозами заливають деяким матеріалом для формування суцільної приповерхневої структури. Проте навіть за цих умов реальні умови контакту тіл спотворюються порівняно із вихідним станом.

Такого ж типу проблеми супроводжують і застосування інших методів експериментальних досліджень для супутного визначення розподілу контактного тиску. Це відноситься, наприклад, до застосування методу голографічної інтерферометрії та чутливих до тиску проміжних плівки [57, 58] (рис. 3). У цьому випадку при фіксації у лазерному світлі на реєструючому середовищі (див.

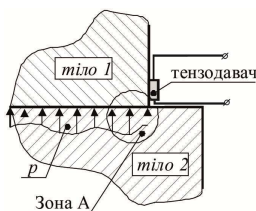


Рисунок 1 – Схема розміщення тензодавачів для фіксації компонент НДС та контактної тиску на периферії області контакту



Рисунок 2 – Зони розміщення тензодавачів (мікроемдоз) на області контакту

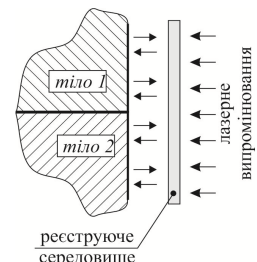


Рисунок 3 – Застосування методу голографічної інтерферометрії

рис. 3) голографічних інтерферограм або спекл-інтерферограм (або відтисків) визначаються компоненти переміщень точок візуально доступних поверхонь контактуючих тіл (або недоступних). За ними можна визначити компоненти НДС, а, відповідно, оцінити контактний тиск на лініях контактних тіл, що взаємодіють.

Такими ж особливостями володіє також метод фотопружності [59]. Метод фотопружних покриттів широко використовують для визначення НДС твердих тіл. Його реалізують, встановлюючи прозору діелектричну плівку на поверхню об'єкта. Плівка, деформуючись разом із об'єктом, змінює свої діелектричні властивості внаслідок ефекту фотопружності. Зміни реєструють, освітлюючи плівку поляризованим світлом та аналізуючи стан поляризації відбитого світла. Це дає можливість, використовуючи співвідношення фотопружності, визначити параметри деформації на поверхні об'єкта. Він також дає можливість визначити розподіл напружень у зоні контакту тіл, а, отже, оцінювати контактний тиск.

Наведені вище варіанти застосування різних методів слугують прикладами супутніх досліджень. Незважаючи на корисність такого підходу, більш націленими на дослідження є саме спеціалізовані методи та засоби. Серед них можна виокремити: 1) метод візуальної, фото- та кінофіксації зон розподілу контактної тиску; 2) метод контактних відбитків із застосуванням копіювального паперу; 3) метод контактних відбитків із застосуванням писального паперу, світлопропускання якого змінюється залежно від контактної тиску; 4) метод контактних відбитків із застосуванням спеціальних плівки, інтенсивність забарвлення котрих змінюється залежно від контактної тиску; 5) метод контактних відбитків із застосуванням спеціальних плівки, електроємності або електроопір яких змінюється залежно від контактної тиску [1, 58].

Перелічені методи відрізняються тим, що передбачають наявність доступу до поверхні контакту (рис. 4), а, відповідно, дають можливість фіксувати розподіл контактної тиску на всій області контакту. Разом із тим група методів 1) вимагає, щоб хоча б одне із контактуючих тіл було прозоре; групи 2), 3) мають значні похибки вимірювань; групи 2)–5) привносять певне спотворення в умови контактної сполучення, адже створюють додаткову податливість за рахунок реєструючих тіл. Таким чином, неможливо визначити безперечного лідера у всьому оглянутому спектрі методів експериментальних досліджень контактної взаємодії пружних тіл. Разом із тим низка переваг, які притаманні методу чутливих до контактної тиску спеціальних плівки, є аргументом на користь застосування саме їх у дослідженнях, передбачених завданнями роботи.

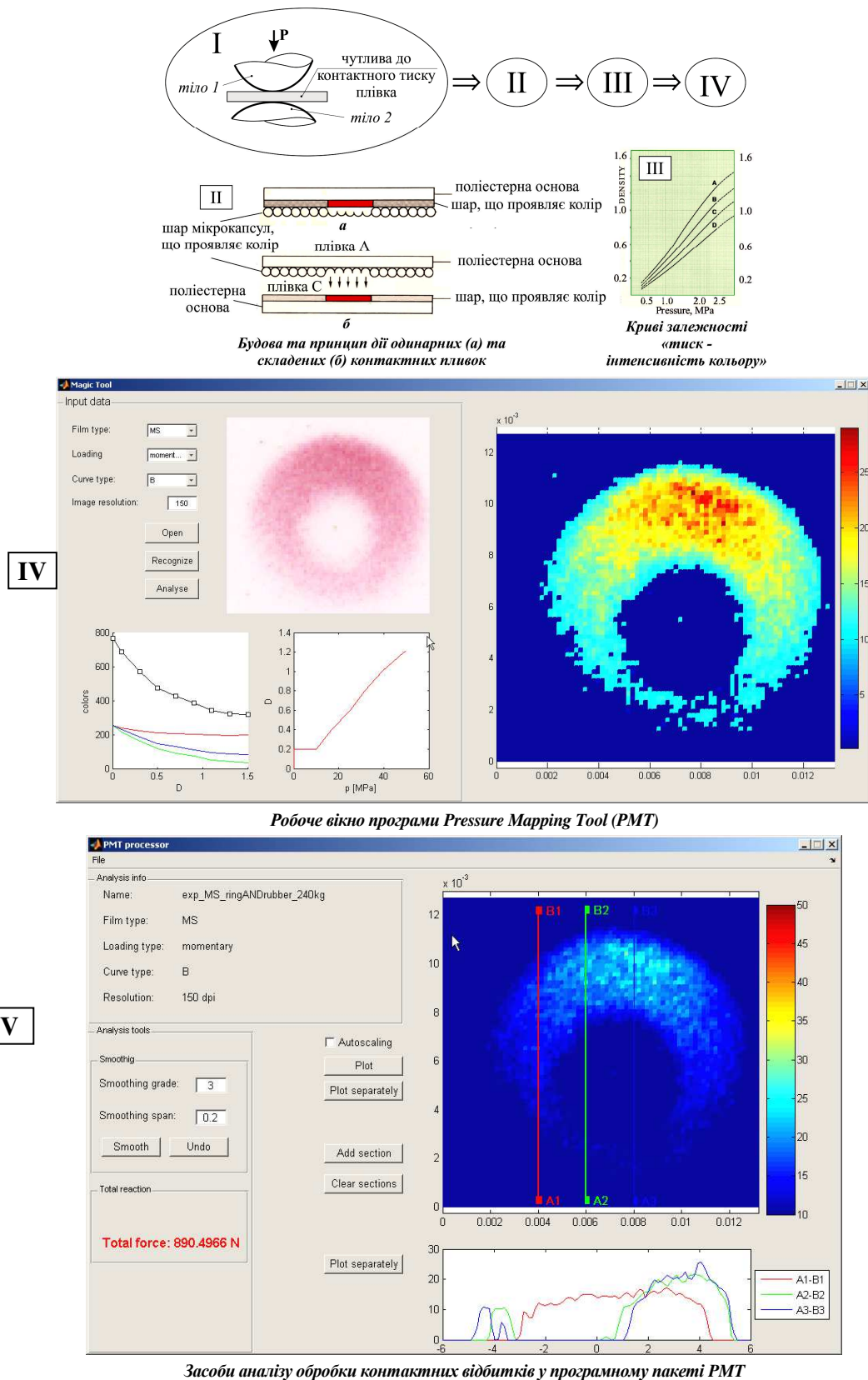


Рисунок 4 – Схема застосування чутливих до тиску плівок [1]

Мова йде, зокрема, про широкий діапазон контактного тиску між складнопрофільними тілами. Цій обставині відповідає цілий спектр таких чутливих плівок із різними діапазонами вимірювань. Таким чином, уся область контакту може бути покрита множиною плівок, і кожна із них фіксуватиме розподіл контактного тиску у своєму діапазоні. Накладаючи окремі

розподіли, можна отримати загальну картину відносно конфігурації плям контакту та розподілу контактного тиску.

Здійснений аналіз методів дослідження контактної взаємодії елементів конструкцій дає підстави для таких висновків.

1. На теперішній час відсутнє повне розв'язання



проблеми аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл із урахуванням впливу фізично нелінійного проміжного шару, яке би поєднувало, з одного боку, фізичну адекватність, а з іншого, – високу точність та оперативність. 2. Традиційні процедури синтезу геометричної форми складнопрофільних тіл передбачають багатократне розв'язання задач аналізу контактної взаємодії, а, отже (див. п. 1), занадто ускладнюють розв'язання актуальних і важливих прикладних задач.

3. Найбільш придатними для аналізу НДС системи тіл із проміжними фізично нелінійними шарами видається комбінація варіаційної постановки типу принципу Калькера, метода граничних інтегральних рівнянь та дискретна апроксимація шуканих функцій із поданням їх у вигляді частинної суми ряду за базисними функціями із локальним носієм на поверхні можливого контакту.

4. Застосування тих чи інших чисельних методів дослідження контактної взаємодії СПТ не гарантує адекватності математичних моделей, що будуються, точності результатів, які отримуються у ході розрахунків, а також обґрунтованості розроблених на їх основі рекомендацій стосовно технічних рішень елементів конструкцій із прогресивними властивостями.

5. Для обґрунтування усіх аспектів проектних досліджень (див. п. 4) необхідно застосовувати експериментальні методи. Одним із найбільш перспективних експериментальних методів дослідження контактної взаємодії є використання чутливих до тиску плівок.

Зазначені висновки створили основу для формулювання мети і завдань досліджень.

*Мета роботи* – розробка удосконалених підходів до розрахунково-експериментального дослідження контактної взаємодії складнопрофільних тіл із урахуванням варіювання геометричної форми їх поверхонь та властивостей матеріалів проміжних шарів.

Для досягнення поставленої мети в роботі поставлені та вирішені наступні завдання досліджень.

1. Удосконалення підходів до розрахунково-експериментального дослідження контактної взаємодії складнопрофільних тіл.

2. Формування та адаптація моделей і методів чисельного аналізу контактної взаємодії СПТ із урахуванням мікромеханічних властивостей поверхневих і проміжних шарів матеріалів.

3. Розв'язання прикладних задач аналізу процесів НДС із урахуванням контактної взаємодії елементів машинобудівних конструкцій (ЕМБК).

4. Удосконалення методів досліджень та експериментальне визначення розподілів контактних областей та контактного тиску між елементами машинобудівних конструкцій.

**Загальний підхід до вирішення сформованих проблем розрахунково-експериментального дослідження контактної взаємодії складнопрофільних тіл.** На розвиток моделей та методів, описаних у [1], для дослідження НДС відповідальних ЕМБК удосконалений підходи до розрахунково-експериментального дослідження контактної взаємодії СПТ із нелінійно пружним шаром, що їх розділяє. При цьому, слідуючи [1], виокремлюються два випадки: «... контакт тіл неузгодженої і узгодженої форм. У першому випадку початковий зазор між тілами подається у вигляді квадратичної форми координат (або іншої функції) у площині, дотичній до точки

геометричного контакту тіл (у багатьох випадках може бути застосована модель Герца). У другому випадку має місце збіг (конгруентність) поверхонь контактуючих тіл на деякій ділянці поверхні. У той же час прагнення до поліпшення функціональних властивостей вузлів ЕМБК визначає тенденцію проектування деталей з близькими, але не співпадаючими поверхнями. У цьому випадку не застосовні ні модель Герца, ні Штаермана, ні інші моделі. Більш того, не завжди контактуючі поверхні можуть бути описані аналітично. Таким чином, на додаток до традиційної класифікації, можна ввести третій тип контактуючих СПТ. Він характерний тим, що локалізація контакту у номінальному вихідному стані або лінійна, або точкова. При цьому величини зазорів, пружних переміщень, зближень за рахунок обтискання проміжних шарів – сумірні. А, значить, незастосовні моделі і методи, що працюють для двох перших випадків. Цим і визначається досліджуваний у роботі випадок контакту тіл, названих складнопрофільними. Одержується у загальному випадку нелінійна система рівнянь і нерівностей, відмінною рисою якої є наявність нелінійних доданків в умовах сумісності переміщень. У результаті отримуємо пов'язані нелінійні умови контактної взаємодії, далі в роботі названі структурно-фізичною нелінійністю» [1].

Для розв'язання такого типу задач у роботі пропонується новий підхід із модифікацією, з одного боку, методів теорії варіаційних нерівностей та, з іншого – варіаційного принципу Калькера. Перший варіант зводиться до мінімізації функціонала повної енергії на множині розподілів полів переміщень, що задовольняють умовам непроникнення тіл одне в одного. Другий варіант зводиться до мінімізації функціонала додаткової енергії на невід'ємних розподілах контактного тиску. Ці опуклі функціонали складаються із суми лінійної, квадратичної форми переміщень або тиску і нелінійної частини, що відповідає нелінійно-пружному шару.

Задля забезпечення варіативності моделей досліджуваних СПТ до підходу, що формується, інтегрується метод узагальненого параметричного моделювання процесів і станів складних механічних систем [1].

Крім того, поширення узагальненої параметричної моделі на етап проектних досліджень дає можливість верифікувати застосовувані моделі контактної взаємодії СПТ.

У кінцевому підсумку розроблено комплексний підхід, який охоплює усі етапи досліджень контактної взаємодії СПТ у складі конструкцій із прогресивними технічними рішеннями.

**Формування та адаптація моделей і методів чисельного аналізу контактної взаємодії СПТ із урахуванням мікромеханічних властивостей поверхневих і проміжних шарів матеріалів.** Вихідними співвідношеннями, від яких необхідно відштовхуватися при дослідженні НДС конструкцій, елементи котрих знаходяться у контактній механічній взаємодії, є [1]: геометричні співвідношення, що визначають лінійні деформації внаслідок переміщення; рівняння рівноваги; а також фізичні співвідношення, що пов'язують між собою напруження та деформації. Додатково визначаються крайові умови типу Діріхле, Неймана та умови непроникнення тіл одне в одного.

Для розв'язання задачі про контактну взаємодію в одержуваній системі складнопрофільних тіл

залучаються 3 підходи. Перший із них заснований на локальному формулюванні задачі про контакт напівнескінчених тіл. Він базується на виконанні умов сумісності нормальних переміщень точок поверхні взаємодіючих тіл (рис. 5):

$$u_v^{(1)} + u_v^{(2)} \leq h, \quad (4)$$

де  $u_v^{(1)}, u_v^{(2)}$  – нормальні переміщення точок поверхні тіл 1 і 2 відповідно, а  $h = h_1 + h_2$  – зазор у спряженні контактуючих тіл за нормаллю ( $v^{(1)} = -v^{(2)}$ ).

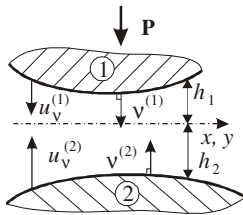


Рисунок 5 – Контактна взаємодія тіл 1 і 2

Другий підхід зводиться до проблеми мінімізації функціонала повної внутрішньої енергії системи контактуючих СПТ із урахуванням (4).

Третій підхід реалізує метод граничних інтегральних рівнянь або варіаційний принцип Калькера. Подаючи нормальні переміщення точок поверхонь СПТ у вигляді

$$u_v^{(i)} = \delta^{(i)} - w^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

де  $\delta^{(i)}$  – зміщення нескінченно віддалених точок тіл 1 і 2, а  $w^{(i)}$  – розподіл прогинів точок границі напівпростору, викликане контактним тиском  $p$ , отримуємо співвідношення, що зв'язує локальне зближення  $w = w^{(1)} + w^{(2)}$ , загальне зближення тіл  $\delta = \delta^{(1)} + \delta^{(2)}$ , розподіл зазору  $h$  і контактний тиск  $p$  (див. рис. 6):

$$w = \left[ \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right] \int_{(S)} \frac{p(\xi, \eta)}{\rho(x, u, \xi, \eta)} d\xi d\eta \geq \delta - h. \quad (6)$$

Тут  $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2$  – модулі пружності та коефіцієнти Пуассона тіл 1 і 2 відповідно,  $\rho$  – відстань між точкою прикладання тиску  $p$  та поточною точкою, а  $S$  – поверхня тіла, точки якої задані координатами  $(x, y)$  або  $(\xi, \eta)$ .

Це граничне інтегральне рівняння може бути дискретизоване із застосуванням, наприклад, базисних функцій, наведених на рис. 7. Тоді система співвідношень набирає вигляду [1, 2]:

$$\begin{cases} \sum_j C_{i,j} p_j = \delta - h_i, & p_j \geq 0; \\ \frac{\sqrt{3}}{2} c^2 \sum_i p_i = P, \end{cases} \quad (7)$$

де  $C$  – матриця коефіцієнтів впливу, що визначає переміщення у  $i$ -му вузлі сітки дискретизації при дії тиску  $p_j$  одиничної величини і з розподілом за базисною функцією, що відповідає  $j$ -му вузлу (див. рис. 7), а  $h_i$  – вузлові зазори.

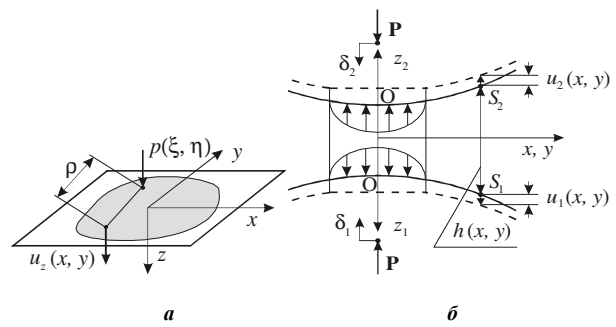


Рисунок 6 – Переміщення границі напівпростору під дією нормального зусилля (а) та деформація тіл і утворення контактної площадки під дією нормальної сили (тіла 1 і 2 умовно рознесені) (б) [1]

Якщо між контактуючими тілами знаходиться пружний шар із фізично нелінійними характеристиками

$$w^{(i)} = w^{(i)}(p), \quad i = 3, 4, \quad (8)$$

то у співвідношення (7) увійдуть додаткові складові:

$$\sum_j C_{ij} p_j + w_i^{(3)}(p) + w_i^{(4)}(p) = \delta - h_i, \quad (9)$$

де  $w_i^{(3)}(p), w_i^{(4)}(p)$  – додаткові прогини за рахунок деформування шарів на поверхнях контактуючих тіл 1 і 2.

Це можуть бути, наприклад, шари шорсткості, для яких справедливі співвідношення (див. вище)

$$w = \lambda p^s. \quad (10)$$

Тут  $\lambda, p$  – параметри, які визначаються мікромеханічними характеристиками шорсткості (середня висота виступів шорсткості  $R_a$ , фізико-механічні характеристики матеріалу і вид механічної обробки поверхні).

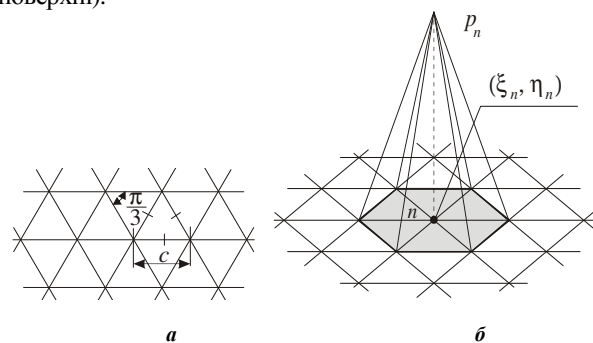


Рисунок 7 – Пропонована базисна функція: а – регулярна трикутна сітка; б – пірамідальний елемент тиску

Отримується у загальному випадку нелінійна система рівнянь і нерівностей, відмінною рисою якої є наявність нелінійних доданків в умовах сумісності переміщень. Ця особливість, як уже зазначалося, відрізняє створену модель від традиційних [14], у яких у лівій частині рівнянь і нерівностей (4) присутні тільки лінійні члени. Структурна нелінійність цих співвідношень, яка зумовлена наявністю умов типу нерівностей, доповнюється також і фізичною.

Третій підхід може базуватися також на



застосуванні варіаційного принципу Калькера [20]. Він формується щодо шуканого контактного тиску, тобто фізична розмірність задачі знижується на одиницю. У підсумку, розширивши відоме формулювання принципу Калькера [20], отримуємо задачу мінімізації функціонала додаткової енергії

$$\Phi(p) = \frac{1}{2} \int_S p(u_{z_1} + u_{z_2}) dS + \int_S p(h - \delta) dS + \Phi_n(p) \rightarrow \min \quad (11)$$

на невід'ємному тиску  $p$ . Цей опуклий функціонал складається з суми квадратичної форми тиску і нелінійної частини  $\Phi_n$ , що відповідає нелінійно-пружному шару. Застосування певних квадратурних формул [1] переводить задачу (11) до вигляду, аналогічного (9):

$$Cp + D(p) = \delta - h. \quad (12)$$

Тут  $C$  – матриця коефіцієнтів впливу (породжується квадратичною частиною функціоналу),  $D(p)$  – компонента, що породжується нелінійною частиною функціоналу загального вигляду,  $p$  – масив значень контактної тиску у вузлах квадратурних формул, а  $\delta$  і  $h$  – мають той же сенс, що і у (7).

Із описаних вище підходів як провідні обрано варіаційні формулювання із реалізацією за допомогою МСЕ та МГЕ. Застосування МСЕ дає можливість спиратися на потужні програмні комплекси, що його реалізують. Застосування ж МГЕ теж дає певні переваги. Вони пояснюються тим, що цей метод володіє математичною строгістю, універсальністю та природним переходом до дискретної форми. З іншого боку, порівняно із традиційною скінченно-елементною постановкою різко знижується розмірність масиву шуканих змінних (оскільки як варійовані виступають вузлові значення тиску на сітці, що накинуто тільки на поверхню, а не на весь об'єм, який займає СПТ), і у багатьох випадках це дає можливість підняти оперативність розв'язання задач аналізу при збереженні точності одержуваних результатів. Така властивість особливо важлива на перших етапах проектних досліджень, коли потрібне проведення великого обсягу різноманітних розрахунків НДС СПТ із урахуванням контактної взаємодії. Для розв'язання сформованих систем рівнянь застосовуються методи додаткових зазорів та змінних параметрів податливості [1].

Далі у роботі описано розв'язання задач як чисельного, так і експериментального визначення контактних областей та контактної тиску між тілами.

**Задачі прикладних досліджень контактної взаємодії СПТ.** Описані вище підходи, моделі, методи та засоби дали можливість перейти до прикладних досліджень контактної взаємодії СПТ на розвиток робіт [1, 4, 11, 12, 60–64]. Зокрема, увагу у роботі приділено чисельному аналізу НДС гідропередачі трансмісії для важких гусеничних машин. Для їх оснащення перспективним є застосування гідрооб'ємної передачі, зокрема, ГОП-900, що розроблена ДП «Харківське конструкторське бюро з машинобудування імені О.О. Морозова» [65]. Одним

із чинників, які стримують досягнення високих робочих режимів її роботи, є міцність кулькового поршня під час взаємодії із профільованою біговою доріжкою статора (рис. 8, тут 1 – корпус; 2 – блок цапфових розподільвачів; 3 – блок циліндрів насоса (ротор); 4 – блок циліндрів гідромотора (ротор); 5 – кульковий поршень; 6 – статор насоса; 7 – обойми (бігові доріжки) насоса та гідромотора; 8 і 9 – вхідний і вихідний вали гідропередачі). Відповідно, у цій роботі поставлені та розв'язані такі задачі.

1. *Вплив контактної жорсткості проміжного шару на закон розподілу та рівень контактної тиску між кульковим поршнем та біговою доріжкою ГОП-900.* Розв'язана за допомогою МСЕ та МГЕ задача про контакт без тертя кулькового поршня та бігової доріжки гідропередачі. Отримані розподіли контактної тиску при варіюванні контактної жорсткості поверхневих шарів у спряженні «поршень – бігова доріжка» гідрооб'ємної передачі ГОП-900. Аналіз наведених розподілів дає підстави для висновку про те, що зі зменшенням контактної жорсткості контактна площадка зростає, рівень контактної тиску знижується, а його максимум зміщується від центру до периферії; це, в свою чергу, дає можливість ставити задачу про оптимізацію вимог до технологічних операцій обробки поверхневих шарів поршня та бігової доріжки; раціональним варіантом обробки поверхонь є полірування із доведенням контактної жорсткості сталевих поршня та бігової доріжки до  $10^{14}$  Н/м. Це відповідає шорсткості на рівні  $R_a \approx 0,8$  мкм.

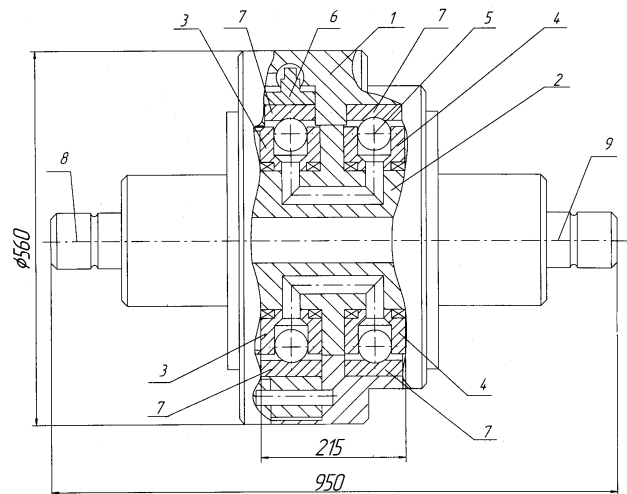


Рисунок 8 – Гідропередачі ГОП-900 із кульковими поршнями

2. *Аналіз міцності кулькового поршня гідрооб'ємної передачі ГОП-900.* На рис. 9 (показано 1/4 частина моделі) наведені картини розподілу еквівалентних за Мізесом напружень у кульковому поршні ГОП-900. Видно, що із зростанням притискового зусилля розподіл повних еквівалентних напружень за Мізесом змінюється не тільки кількісно, але й якісно. Зокрема відбувається зміщення їх максимуму від центру до периферії області контакту.

3. *Вплив нелінійного характеру залежності величини змінання проміжного шару від контактної тиску на розподіл цього тиску у спряженні поршня з біговою доріжкою гідрооб'ємної передачі ГОП-900.* Розрахункова схема – на рис. 10. Було прийнято:  $R_{sp} =$

= 128 м,  $R_p = 0,03175$  м. Модулі пружності матеріалів сталевго поршня та статорного кільця  $E$  прийняті рівними  $2 \cdot 10^{11}$  Па, коефіцієнти Пуассона – 0,3, притискне зусилля  $P_r = 20 \cdot r$  (кН),  $r = 1, \dots, 10$ . Між взаємодіючими тілами введено проміжний шар, проміжні властивості якого описуються білінійною характеристикою « $w - p$ ». Обрані наступні значення граничного тиску в точці зламу цієї залежності:  $p_I = 2 \cdot 10^8$  Па,  $p_{II} = 2 \cdot 10^9$  Па,  $p_{III} = \infty$  (див. рис. 11).

Таким чином, отримуємо два лінійно-жорстких шари I, II та один пружний III, який має характеристику  $w = \lambda p$ , де коефіцієнт податливості  $\lambda_\beta$  приймає у дослідженнях наступні чотири варіанти зна-

чень:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 10^{-15}$  м<sup>3</sup>/Н,  $\lambda_3 = 10^{-14}$  м<sup>3</sup>/Н,  $\lambda_4 = 10^{-13}$  м<sup>3</sup>/Н. З огляду на можливі варіанти вибору радіуса кривизни досліджені наступні варіанти співвідношень радіусів дуги центральної частини поперечного профілю бігової доріжки  $R_t$  та радіуса кулькового поршня:

$R_t^a = 1,05R_p$ ,  $R_t^b = 1,01R_p$ ,  $R_t^c = 0,99R_p$ . Отже, варіант розрахункової схеми  $\bar{V}$  можна ідентифікувати трьома індексами:  $\bar{V} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ , де  $\alpha = I, II, III$ ;  $\beta = 1 \div 4$ ;  $\gamma = \{a, b, c\}$ . Одержані розподіли та залежності максимального контактного тиску  $p$  від величини притискного зусилля ( $P = 20 \div 200$  кН із кроком 20 кН). На рис. 11 наведені залежності  $p_{\max}(P, \beta)$ .

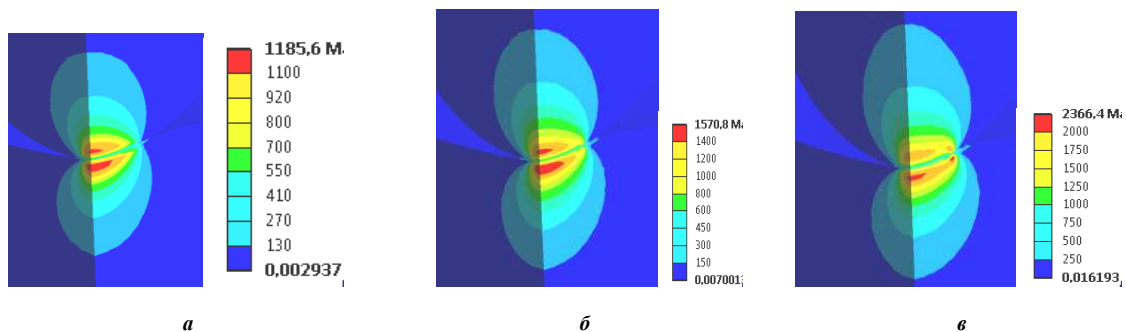


Рисунок 9 – Розподіли еквівалентних напружень за Мізесом (МПа) у ГОП-900 за різних значень притискної сили: а – 50 кН; б – 100 кН; в – 200 кН

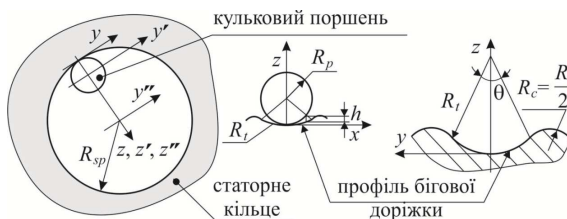


Рисунок 10 – До розрахункової схеми контактної взаємодії кулькового поршня із біговою доріжкою статорного кільця радіальної ГОП-900

Загальна тенденція зміни розподілів  $p$  для варіанту  $\gamma = a$  (тобто радіус  $R_t^a = 1,05R_p$ ) полягає у тому, що для лінійно пружного шару спостерігається монотонне зростання тиску від притискного зусилля. Для нелінійно пружного шару відбувається злам характеру розподілу  $p$  при зростанні його рівнів понад  $p_I$ ,  $p_{II}$  відповідно. Разом із тим зменшення коефіцієнту податливості згладжує різницю між розподілами із різними значеннями  $p_\alpha$ , де  $\alpha = I, II, III$ . Подібні тенденції – також і для випадку  $\gamma = b$  (тобто  $R_t^b = 1,01R_p$ ). Для випадку  $\gamma = c$  (тобто  $R_t^c = 0,99R_p$ ) спостерігається така сама за характером тенденція, проте якщо для випадків  $R_t > R_p$  відбувається поступове зміщення точки максимуму контактного тиску від центру до периферії зі зростанням притискного зусилля, то для випадку  $R_t < R_p$  він із самого початку опиняється на периферії області контакту. Також загальною тенденцією є те, що збільшення коефіцієнту податливості призводить до зростання обла-

сті контакту та зниження рівня контактного тиску.

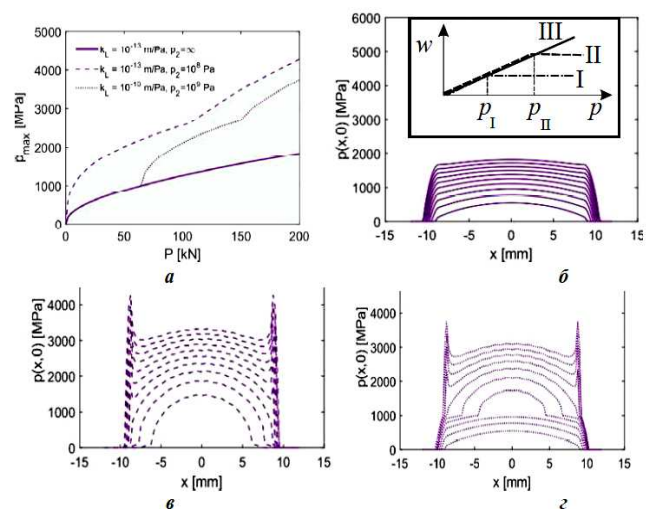


Рисунок 11 – Залежність максимального контактного тиску від притискної сили за різних значень перегину білінійної податливості за  $R_t/R_p = 1,05$  (а) та відповідні розподіли контактного тиску:

$$b - p_{sp} = \infty; c - p_{sp} = 108 \text{ Па}; z - p_{sp} = 10^9 \text{ Па}$$

Розрахунок для більшої сукупності варіантів  $\alpha, \beta, \gamma$  дає можливість одержати більше інформації щодо поведінки розподілів  $p_{\max}(P, \alpha, \beta, \gamma)$ , а, відповідно, більш докладний масив інформації для обґрунтування технічних рішень.

**Експериментальні дослідження контактної взаємодії СПТ.** Із метою удосконалення методів експериментального визначення контактного тиску у сполучен-

ні СПТ розроблено експериментально-інформаційний комплекс. Його структурні етапи – на рис. 4. Цей комплекс діє на основі чутливих до тиску плівок. Проте між тілами закладається не одна, а декілька плівок із різними діапазонами чутливості. Це дає можливість розширити точність вимірювань тиску.

Етапи досліджень, зображені на рис. 4, визначають відповідно: розміщення плівок між СПТ; формування пакету різних плівок; калібрування вимірювальних плівок; фіксацію відбитків на чутливих плівках та комп'ютерну розшифровку розподілів контактної тиску за допомогою спеціально розроблених алгоритмів та програм.

Така комплексна процедура переважає за точністю, оперативністю та можливостями аналогічні традиційні методики. Отже, створено більш розвинений інструмент експериментальних досліджень контактної взаємодії СПТ. Цей інструмент, окрім інших можливостей, забезпечує природню інтеграцію цих етапів у весь цикл розрахунково-експериментальних досліджень цієї взаємодії, оскільки перетворює усю інформацію у єдиний цифровий формат. Тобто зникає бар'єр між форматами чисельних та експериментальних даних. Це створює широкі потенційні можливості стосовно формування наскрізного узгодженого розрахунково-експериментального дослідження контактної взаємодії СПТ різних типів.

У цьому руслі здійснено низку експериментальних досліджень, використаних для аналізу адекватності розроблених математичних моделей, точності побудованих чисельних моделей і достовірності отриманих за їх допомогою результатів. Зокрема, було досліджено контактну взаємодію кулькового поршня гідрооб'ємної передачі ГОП-900 зі статором. Порівняння результатів, отриманих із експерименту, з результатами чисельних досліджень дає можливість оцінювати ступінь їх збіжності.

Так, при створенні нової гідропередачі для перспективних важких бойових машин виникає ряд проблемних ситуацій. Вони зумовлені, з одного боку, обмеженнями на габаритні розміри ГОП в наслідок оригінальних компоновальних рішень моторно-трансмійного відділення вітчизняних танків, а з іншого – через високий рівень потужності, який необхідно передавати від двигуна до рушії. Відповідно, в зонах контактної взаємодії елементів гідропередачі діють високі контактні навантаження. Саме вони є основним стримуючим чинником для забезпечення високих технічних характеристик проєктованих гідропередач. Це зумовлює необхідність визначити вплив форми поверхонь контактуючих тіл і властивостей поверхневих шарів на величину і характер розподілів контактної тиску у сполученні найбільш навантаженої пари деталей – кулькового поршня та складнопрофільної бігової доріжки гідропередачі.

Гідропередача ГОП-900 [65], створена в ДП «Харківське конструкторське бюро з машинобудування ім. О.О. Морозова» [www.morozov.com.ua], є ключовою ланкою при створенні перспективних важких бойових броньованих машин з високим рівнем рухливості, маневреності та керованості (рис. 12).

Базові параметри елементів ГОП-900: *геометричні параметри* –  $R_p = 0,03175$  м – радіус поршня,

$R_{sp} = 0,128$  м – радіус кругової траєкторії центра по-

ршня,  $R_{st} = 0,15975$  м – радіус статорного кільця,  $R_{rot} = 0,145$  м – радіус корпуса ротора,  $\delta = 0,012$  м – максимальний ексцентриситет; *пружні константи матеріалу поршня і статора* –  $E = 200$  ГПа – модуль пружності,  $\nu = 0,3$  – коефіцієнт Пуассона; *параметри навантаженості передачі* –  $P = 15 \div 120$  кН – притискне зусилля у sprzęженні поршня зі статором.

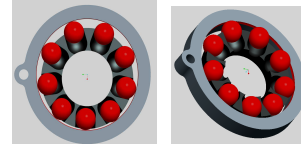


Рисунок 12 – Гідропередача ГОП-900 із кульковими поршнями [www.morozov.com.ua]

Основним найбільш навантаженим і відповідальним елементом гідропередачі є пара «кульковий поршень – бігова доріжка». У зоні їх контактної взаємодії виникає контактний тиск, на який істотний вплив чинять два фактори: форма поверхонь контактуючих тіл і фізико-механічні властивості поверхневих шарів. З огляду на те, що форма і розміри кулькового поршня радіальної гідропередачі визначаються її проєктними характеристиками, то варіативність геометричної форми забезпечується тільки формою профілю осевого перерізу бігової доріжки (рис. 13). Що стосується властивостей поверхневих шарів контактуючих деталей, то вони визначаються механічною обробкою, термообробкою і властивостями матеріалу кулькового поршня та бігової доріжки. При цьому раніше останній чинник не отримував експериментального дослідження свого впливу на контактну взаємодію цих СПТ, а був досліджений у обмеженій постановці без урахування впливу іншого.

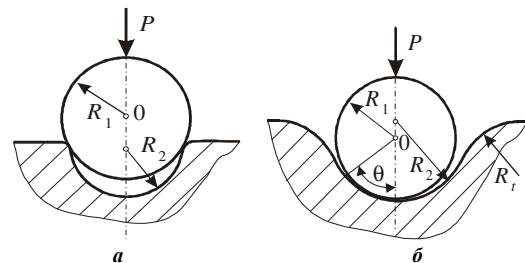


Рисунок 13 – Характер профілю бігової доріжки початкового контакту з кульковим поршнем при значеннях радіуса її центральної частини:

*a* – менших радіуса поршня, *b* – більших радіуса поршня



Рисунок 14 – Фізичний макет об'єкта у розборі



Рисунок 15 – Об'єкт досліджень у зборі

З огляду на перелічені обставини, з досліджуваного об'єкта був вицненений базовий елемент – кульковий поршень і фрагмент бігової доріжки. Цей фрагмент матеріалізований у вигляді фізичного макету (рис. 14). У зборі об'єкт досліджень наведений на рис. 15. Кульковий поршень був узятий оригінальним (із дослідного зразка ГОП-900), а фрагмент бігової доріжки виготовлений із блоку плексигласу. З точки зору варіативності форми у блоці плексигласу виконані вирізи різного профілю (рис. 16). Для реалізації ж варіативності фізико-механічних характеристик поверхневих шарів між контактуючими тілами розміщувався багатошаровий набір з гумової смуги. Властивості і товщина цієї смуги відповідають наведеним у роботі [66] (рис. 17), однак максимальну кількість шарів збільшено з трьох до п'яти. Це відчутно розширило діапазон варіювання фізико-механічних властивостей модельованого таким чином проміжного шару. Таким чином, потрібне здійснення додаткових експериментальних досліджень у лабораторних умовах.

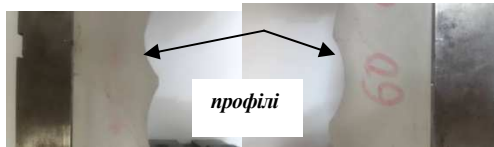


Рисунок 16 – Профілі бігової доріжки

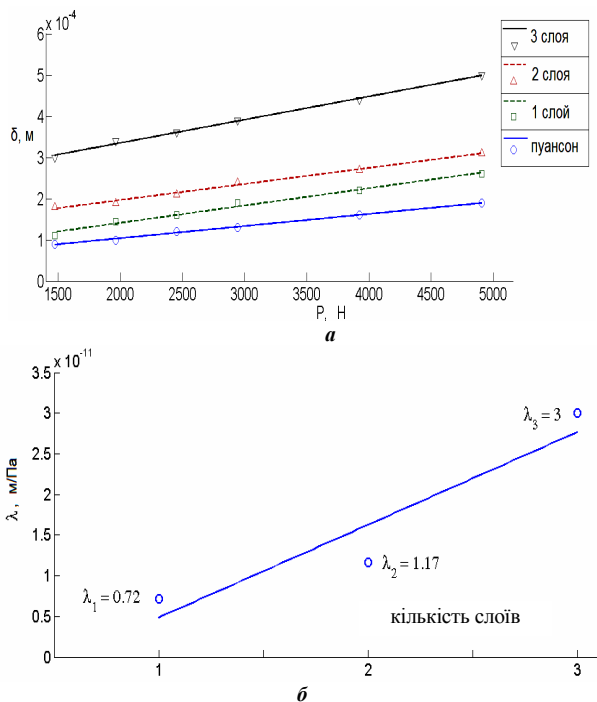


Рисунок 17 – Фізико-механічні властивості гумової смуги під дією притискної сили [1]:

*a* – залежність переміщення пуансона при варіюванні прикладеним навантаженням для різної кількості шарів гуми;

*b* – крива для варіювання податливості гуми, використаної для проведення експериментів

Для реалізації навантаження досліджуваного об'єкта був зібраний спеціальний стенд (рис. 18). Він складається з основи 1, на якій змонтована збірка універсально-збірною пристосування 2. Вона призначена для розміщення і базування блоку плексигласу 3 з фігурними вирізами. Кульковий поршень 4 розміща-

ється у відповідному фігурному вирізі та навантажується за допомогою гвинта 5, вмонтованого в силову рамку 6. Як реєструюча апаратура застосовувалися: прилад тензометричний набору ІСД-3, приєднаний до тензодатчиків типу КФ-5 на силовому гвинті (на рис. 18 – № 5) (рис. 19); чутлива до контактної тиску плівка фірми Fuji, яка розміщена між притискуваною кулею та профільним вирізом у блоці (рис. 20).

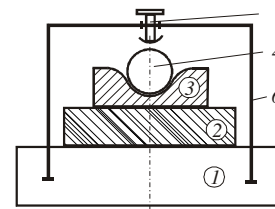


Рисунок 18 – Схема спеціального стенда

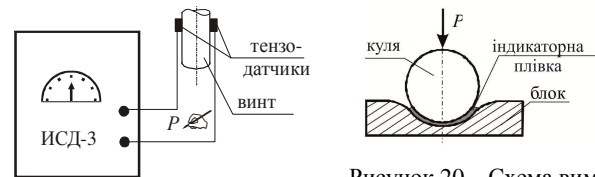


Рисунок 19 – Схема вимірювання притискного зусилля

Рисунок 20 – Схема вимірювання розподілу контактної тиску

Таблиця 1 – Варіанти поєднання характеристик досліджуваного макета складання «кульковий поршень – проміжний шар – бігова доріжка гідропередачі»

| № п/п | № експ. | Радіус профілю бігової доріжки, мм | Кількість шарів гумової полоси | Типи плівки |
|-------|---------|------------------------------------|--------------------------------|-------------|
| 1     | 8       | 62                                 | 0                              | «М», «Н»    |
| 2     | 9       |                                    | 1                              | і «НМ»      |
| 3     | 10      |                                    | 4                              | «М», «Н»    |
| 4     | 0       | 68,5                               | 0                              | «М», «Н»    |
| 5     | 4       |                                    | 1                              | і «НМ»      |
| 6     | 6       |                                    | 4                              |             |
| 7     | 12      | 73                                 | 0                              | «М», «Н»    |
| 8     | 14      |                                    | 2                              | і «НМ»      |

Цим забезпечується вимірювання притискної сили кулі  $P$  і контактної тиску  $p$  між цією кулею та профільним вирізом у блоці плексигласу. Система «гвинт – тензодатчики – ІСД-3» протарована за допомогою динамометра зразкового стиснення ДОСМ-3. Чутлива до тиску плівка різних типів працює у різних діапазонах чутливості. Використовувані у роботі типи плівок із зазначенням діапазону вимірюваних тисків, МПа: *складені* – Ultra Super Low Pressure (LLLW), діапазон вимірюваного тиску – 0,2–0,6 МПа; Super Low Pressure (LLW), 0,5–2,5 МПа; Low Pressure (LW), 2,5–10 МПа; Medium Pressure (MW), 10–50 МПа; *одинарні* – Medium Pressure (MS), 10–50 МПа; High Pressure (HS), 50–130; Super High Pressure (HHS), 130–300 МПа.

Кожен тип плівки забезпечений калібрувальною таблицею кольорів, що ставить у відповідність інтенсивності контактної відбитки відповідний контактний тиск. Крім того, для розшифровки картини розподілу контактної тиску була залучена розроблена раніше [66] і вдосконалена (для проведення поточних випробувань) програма Pressure Mapping Tool (PMT) (рис. 21). Зокрема, вона доповнена можливостями ви-



значення площі контакту, дво- та одновимірних розподілів тиску (вздовж площадок та ліній), а також мож-

ливістю роботи не з одним, а з декількома пакетами плівок, зібраними в єдиний фіксуєуючий шар.

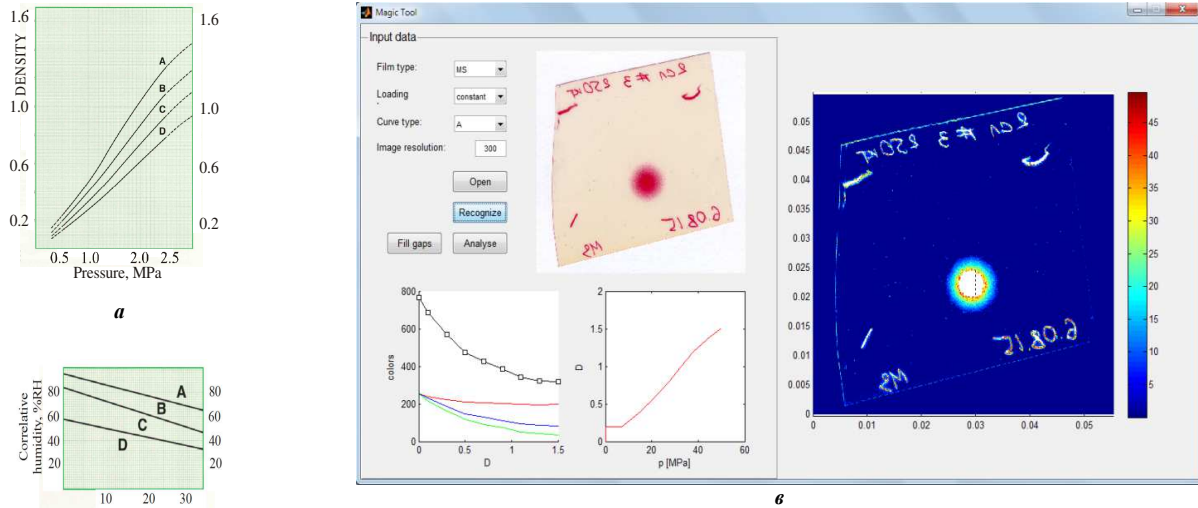


Рисунок 21 – Програма розшифровки картини розподілу контактного тиску: *a* – криві залежності «тиск – інтенсивність кольору відбитка» для плівки LLW, *б* – залежність кривих від умов проведення вимірювань, *в* – робоче вікно програми Pressure Mapping Tool (PMT)

У ході досліджень варіювався діаметр профілю бігової доріжки і податливість проміжного шару між нею та кульковим поршнем. У табл. 1 зібрані варіанти характеристик досліджуваного збирання. Крім того, у деяких випадках здійснювалися вимірювання з п'ятьма шарами з гумової смуги. Навантаження здійснювалося або за допомогою ударника, або на стенді (див. рис. 18). Вимірювання проводилися по 3÷5 разів із застосуванням як вимірювача або чутливої плівки MS, або HS, або їх набору. Відповідно, наведені у табл. 1 варіанти забезпечуються відповідно індексами «М», «Н» і «НМ». На рис. 22 наведені стенд і робочі моменти випробувань, а на рис. 23 – результати експериментів при варіюванні радіусів профіля бігової дорожки та кількості шарів гумової смуги (див. табл. 1) для плівок «Н», «М» і «НМ» відповідно.

табл. 2. Як видно із наведених картин розподілів контактних плям і тиску, спостерігається повна якісна і задовільна кількісна відповідність отриманих експериментально і чисельно даних. Зокрема, спостерігається (див. рис. 23 та табл. 2) гантелевидний вигляд контактних майданчиків і розподілів контактного тиску. Також при цьому простежується згладжувальний ефект від наявності пружного проміжного шару: зі зростанням кількості шарів контактна площадка збільшується, максимальний контактний тиск зменшується, а їхній розподіл набуває більш рівномірного характеру.

На рис. 23–26 наведені результати окремої серії експериментів для радіусу профілю бігової доріжки 68,5 мм, у яких притискання здійснювалося поступово за допомогою гвинтового важеля. Отримані контактні відбитки були проаналізовані із більш точно обчисленими значеннями притискної сили, площі контакту та максимального контактного тиску, які наведені у



Рисунок 22 – Стенд і робочі моменти випробувань контактної взаємодії кулькового поршня з макетом бігової доріжки гідропередачі ГОП-900

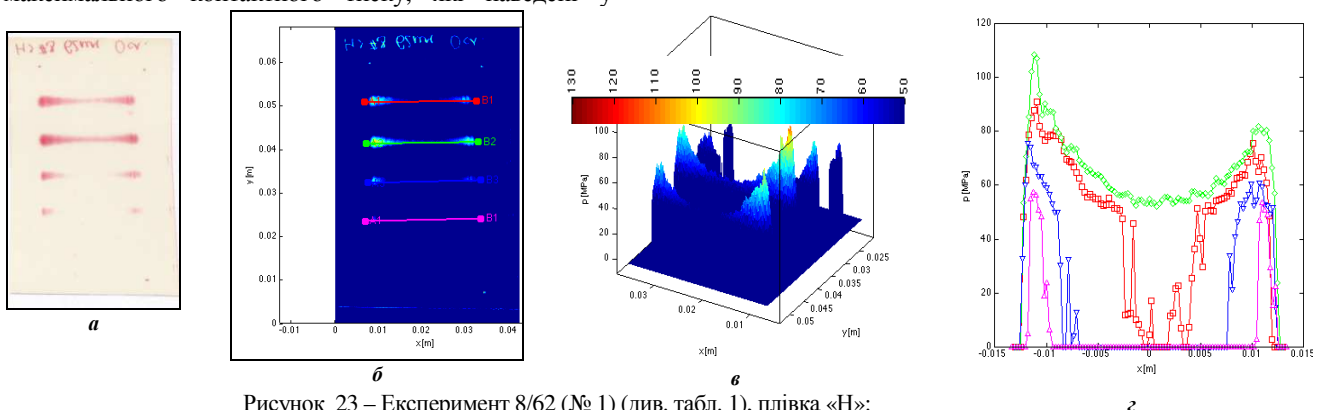


Рисунок 23 – Експеримент 8/62 (№ 1) (див. табл. 1), плівка «Н»:

*a* – 4 відбитки; *б* – розподіл контактного тиску, МПа (виділені перерізи А–В вздовж контактних плям); *в* – розподіл контактного тиску (ізометрія); *г* – розподіл тиску вздовж перерізів А–В

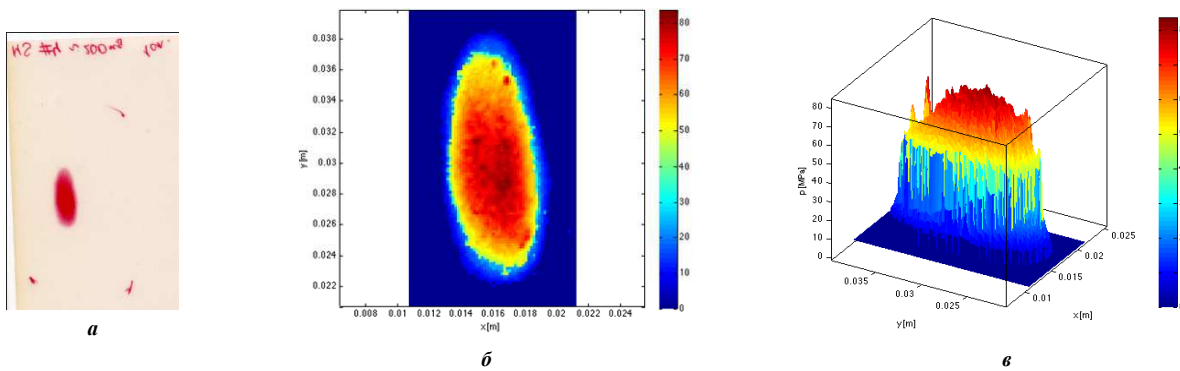


Рисунок 24 – Експеримент 4 (№ 1) (див. табл. 2), плівки «Н» і «М»: а – відбитки; б – розподіл контактної тиску, МПа; в – розподіл контактної тиску (ізометрія)

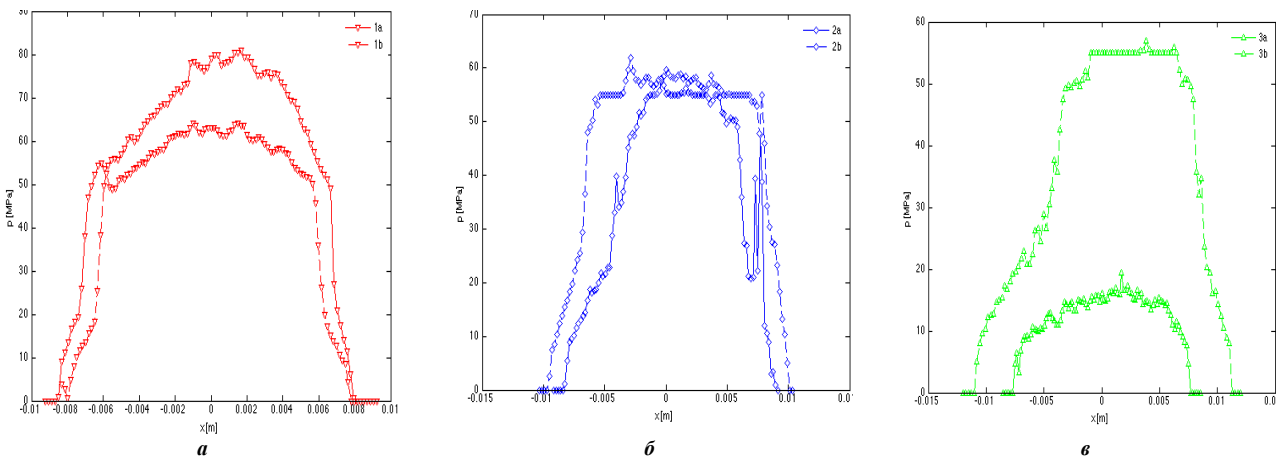


Рисунок 25 – Осеві розподіли контактної тиску, МПа (див. табл. 2) для експериментів: а – 4 та 5; б – 6 та 7; в – 8 та 9

Таблиця 2 – Значення притисної сили ( $P$ ), площі контакту ( $A$ ) та максимального контактної тиску ( $p_{\max}$ ), отримані у серії експериментів для радіусу профіля бігової доріжки 68,5 мм

| № п/п | $nr$ | Число шарів | Плівки | $P$ , Н | $A$ , мм <sup>2</sup> | $p_{\max}$ , МПа |
|-------|------|-------------|--------|---------|-----------------------|------------------|
| 1     | 4    | 1           | HS+MS  | 4202,27 | 88,2                  | 83,44            |
| 2     | 5    | 1           | HS+MS  | 3235,89 | 80,97                 | 68,47            |
| 3     | 6    | 2           | HS+MS  | 3657,25 | 119,37                | 57,65            |
| 4     | 7    | 2           | HS+MS  | 5730,74 | 158,22                | 65,56            |
| 5     | 8    | 4           | MS     | 1300,5  | 108,73                | 22,375           |
| 6     | 9    | 4           | HS+MS  | 6983,37 | 230,14                | 60,47            |

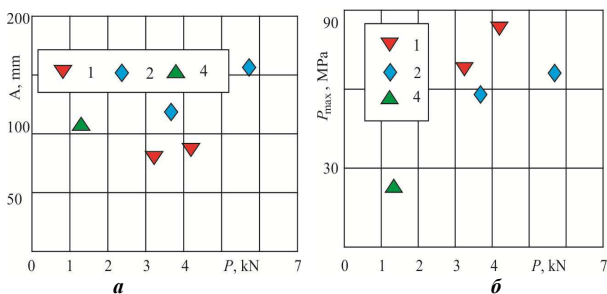


Рисунок 26 – Залежність площі контакту (а) та максимальних значень контактної тиску (б) від притисної сили в експериментах 4–9 з різною кількістю шарів (1, 2 та 4)

Крім того, встановлена істотно нелінійна залежність між притисною силою, з одного боку, і площею контакту і тиском – з іншого. Так, для випадку з одним проміжним шаром при збільшенні притисної сили з 3,24 кН до 4,2 кН (тобто на третину) контактна пляма

зростає лише на 10%, а максимальний контактний тиск – менше, ніж на 25%. Для варіанту двох проміжних шарів зростання сили з 3,66 кН до 5,73 кН (тобто майже на 60%) призводить до зростання контактних плям лише на третину, а тиску – менш ніж на 15%.

Таким чином, отримали підтвердження адекватності розробленої математичної та точності чисельних моделей, а також точність і достовірність отриманих результатів розв'язання тестових і прикладних задач, а також обґрунтованість розроблених на їх основі рекомендацій.

**Комплексні розрахунково-експериментальні дослідження напружено-деформованого стану елементів гідропередач.** Наведений і описаний у статті комплекс чисельних досліджень стосовно реальних машинобудівних виробів вимагає обґрунтування адекватності створених математичних і докладності розроблених чисельних методів і моделей, точності отриманих із їх застосуванням результатів та достовірності побудованих на цій основі рекомендацій щодо обґрунтування проектних і технологічних параметрів. При цьому важливо виділити 2 аспекти: *методологічний*, тобто об'єктивне обґрунтування адекватності розроблених у роботі підходів, методів і моделей для аналізу НДС складнопрофільних тіл з урахуванням контактної взаємодії, *практичний*, тобто створення нових виробів з підвищеними ТТТХ із урахуванням властивостей характеристик поверхневих шарів матеріалів і модифікації геометричної форми контактуючих поверхонь у зонах контактної взаємодії.

Для розв'язання цих задач, що виникають,



необхідно спиратися на результати експериментальних досліджень (див. вище). Описані результати розрахункових і експериментальних досліджень у методологічному аспекті підтвердили адекватність розроблених математичних і чисельних моделей, а у практичному аспекті стали основою для обґрунтування прогресивних технічних рішень гідропередач. Разом із тим у подальшому варто звертатися не тільки до чисельних моделей, хоч і верифікованих, але й до паралельного підтвердження окремих результатів, отриманих чисельно, у ході експериментальних досліджень. Більш того, видається доцільним пара-

лельне здійснення багатоваріантних досліджень, як чисельних, так і експериментальних. Результати цих досліджень варто розмішувати у спеціалізованих базах даних. Надалі ці дані є можливість вилучати у міру потреби та співставляти між собою. Як правило, це здійснюється задля дослідження впливу тих чи інших нових чинників на контактну взаємодію та напружено-деформований стан контактуючих тіл.

Як ілюстрація на рис. 27, 28 наведені розподіли компонент НДС у кульовому поршні та біговій дорожці ГОП-900 при різних значеннях притискової сили, отримані чисельно.

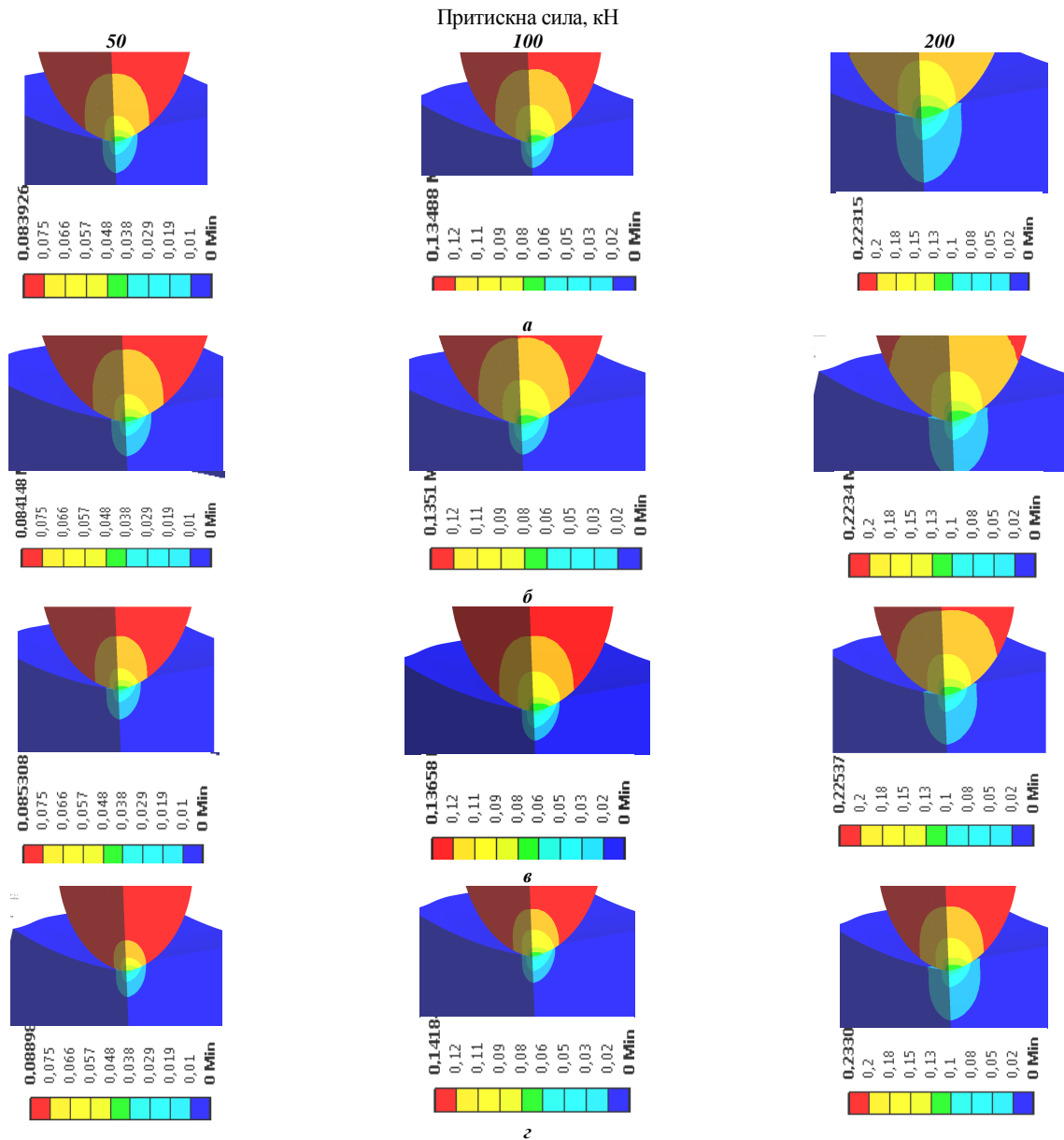


Рисунок 27 – Розподіли повних переміщень (мм) у гідрооб'ємній передачі ГОП-900 при значенні контактної жорсткості, що відповідає шару сталі товщиною 0,1 мм (базова), при різних значеннях притискової сили (1/4 частина)

при варіюванні контактної жорсткості шарів жорсткості:

а – базовий варіант, б – у 2 рази нижчий, ніж базовий, в – у 20 разів нижчий, ніж базовий, г – у 100 разів нижчий, ніж базовий

Інша ілюстрація стосується розшифровки відбитків, отриманих в контакті ролика підшипника із біговою дорожкою за різної кількості проміжних шарів у ході експериментів (рис. 29, 30).

Наведені дані ілюструють розроблені підходи у плані формування спеціалізованих баз даних, які можуть бути покладені в основу експертних систем та баз знань у відповідних сферах діяльності.

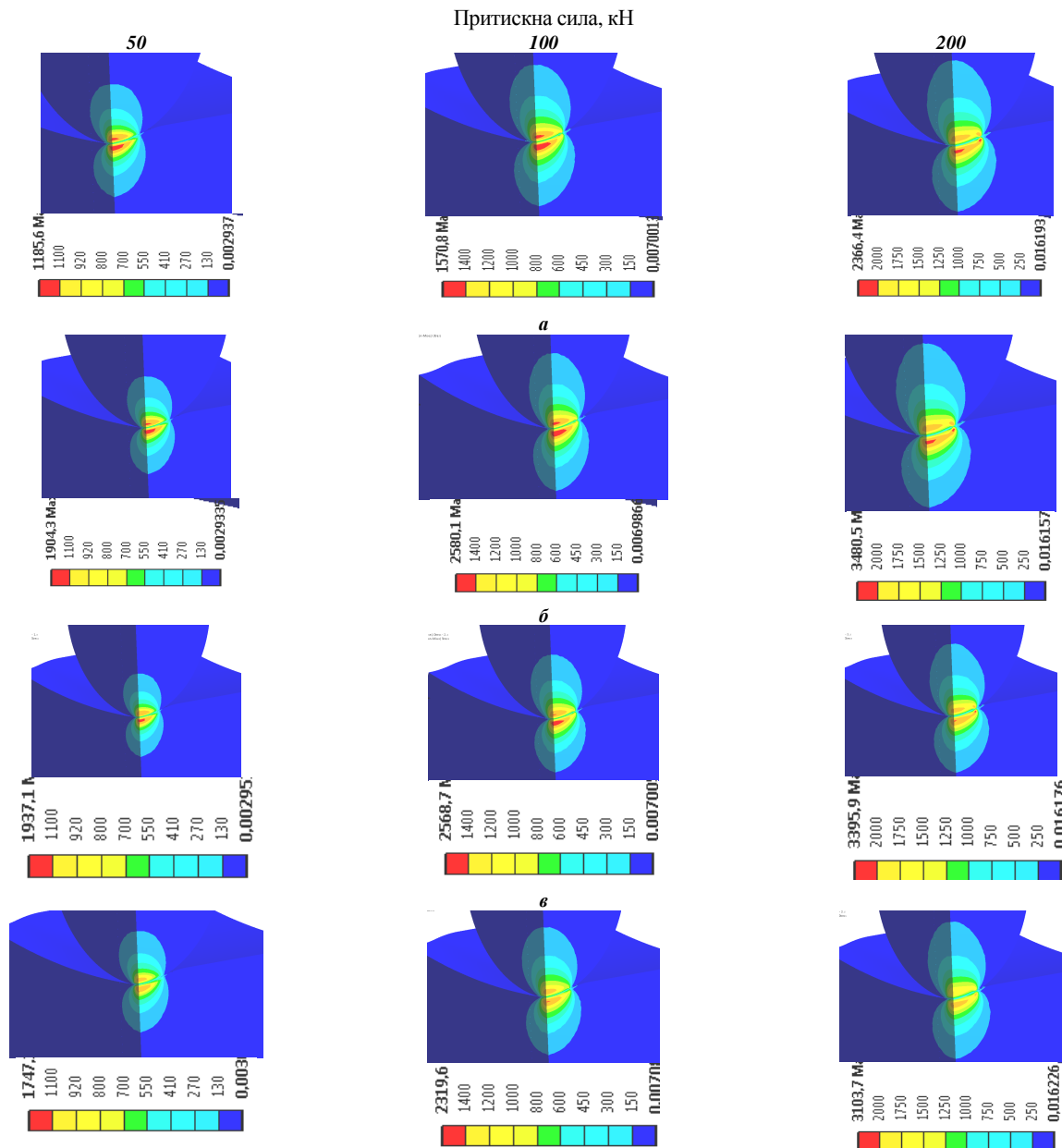
**Висновки.** У роботі описано розвиток розрахунково-експериментальних досліджень контактної взаємодії елементів машинобудівних конструкцій із урахуванням мікромеханічних моделей шорсткості та інших проміжних або поверхневих шарів. Аналіз запропонованих підходів, моделей, методів та установлених за їх допомогою закономірностей дає можливість зробити такі висновки.

1. Натепер відсутні універсальні методи та моделі контактної взаємодії складнопрофільних тіл із адекватним урахуванням чинників, які набули натепер визначального впливу на їх напружено-деформований стан, зокрема, – фізично нелінійні властивості шорсткості та проміжних шарів між контактуючими поверхнями цих тіл. Разом із тим широке розповсюдження СПТ, що на

практиці знаходяться у контактні у складі машинобудівних конструкцій, потребує таких розробок.

При цьому не можна покладатися тільки на чисельні методи досліджень, оскільки не гарантується адекватність моделей і точність отримуваних результатів. Для вирішення протиріччя, що склалося, необхідне створення розрахунково-експериментальних методів визначення контактної взаємодії таких елементів конструкцій.

Означені проблемні напрямки склали мету та зміст роботи. Крім того, у процес досліджень інтегроване параметричне моделювання. Це дає можливість варіювати об'єкт досліджень та цілеспрямовано поліпшувати його технічні рішення задля забезпечення міцності. Разом із тим цей підхід поширено і на етапи експериментальних досліджень.



2

Рисунок 28 – Розподіли еквівалентних напружень за Мізесом (МПа) у гідрооб'ємній передачі ГОП-900 при значенні контактної жорсткості, що відповідає шару сталі товщиною 0,1 мм (базова), при різних значеннях притискної сили (1/4 частина) при варіюванні контактної жорсткості шарів жорсткості: а – базовий варіант, б – у 2 рази нижчий, ніж базовий, в – у 20 разів нижчий, ніж базовий, г – у 100 разів нижчий, ніж базовий

2. Для вирішення сформульованих проблем розроблено загальний підхід, який базується на поєднанні мікро-макромасштабних моделей НДС контактуючих ЕМБК із шорсткою поверхнею та проміжним шаром на поверхні. У математичному плані розроблені варіаційні формулювання поставлених задач, які зводяться до проблеми пошуку екстремумів нелінійних функціоналів. Відповідно формується єдиний комплекс розрахунково-експериментального аналізу контактної взаємодії СПТ. Це забезпечує високу достовірність результатів досліджень.

3. Розроблено методи і моделі для дослідження контактної взаємодії СПТ із урахуванням мікроемеханічних властивостей поверхневих і проміжних шарів, які визначають їхню локальну контактну нелінійну жорсткість. У результаті одержано структурно-фізично нелінійні співвідношення. Для них розроблена слабка постановка, що зводиться до пошуку екстремумів модифікованих функціоналів додаткової енергії, визначених на розподілах переміщень або контактної тиску. У кінцевому підсумку розроблений комплекс підходів, методів та моделей дає можливість, на відміну від традиційних, більш

ефективно, адекватно і точно моделювати контактну взаємодію СПТ. При цьому установлені якісно нові закономірності впливу на розподіл контактної тиску профілю контактуючих тіл та властивостей проміжного шару.

4. Із застосуванням створених методів, моделей та засобів досліджень розв'язано низку модельних та прикладних задач. Зокрема, визначені особливості розподілу контактної тиску у спряженні контактуючих СПТ. Установлені закономірності впливу різних чинників на контактний тиск і контактні області. Обґрунтовані рекомендації щодо технічних рішень для ЕМБК, що забезпечують їх міцність. Це дає змогу досягати підвищення ТТІТХ низки захисних, функціональних та силових елементів конструкцій, зубчастих передач, технологічного оснащення, гідропередач трансмісії тощо. Зокрема, для кулькових поршнів гідрооб'ємних передач здійснено аналіз їхньої взаємодії з біговими доріжками на статорному кільці. Установлено виникнення концентрації напружень із поширенням контактної плями на перехідну частину профілю. Досліджено здатність перерозподілу контактних зусиль завдяки податливості поверхневого шару.

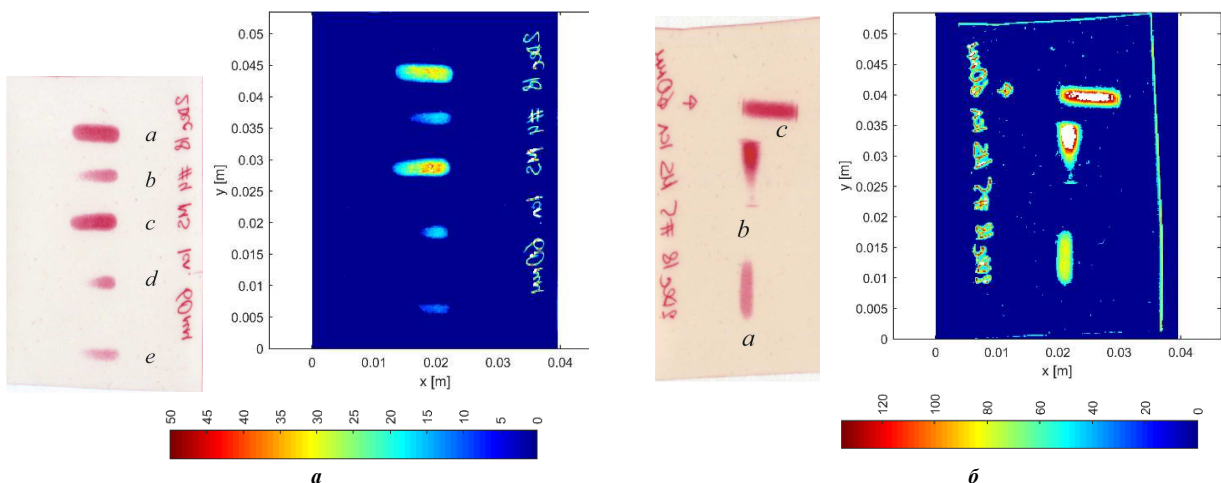


Рисунок 29 – Розшифровка відбитків, отриманих в контакті ролика підшипника із біговою доріжкою для різних номерів варіантів геометричної форми (1 проміжний шар, див табл. 1): а – 4; б – 5

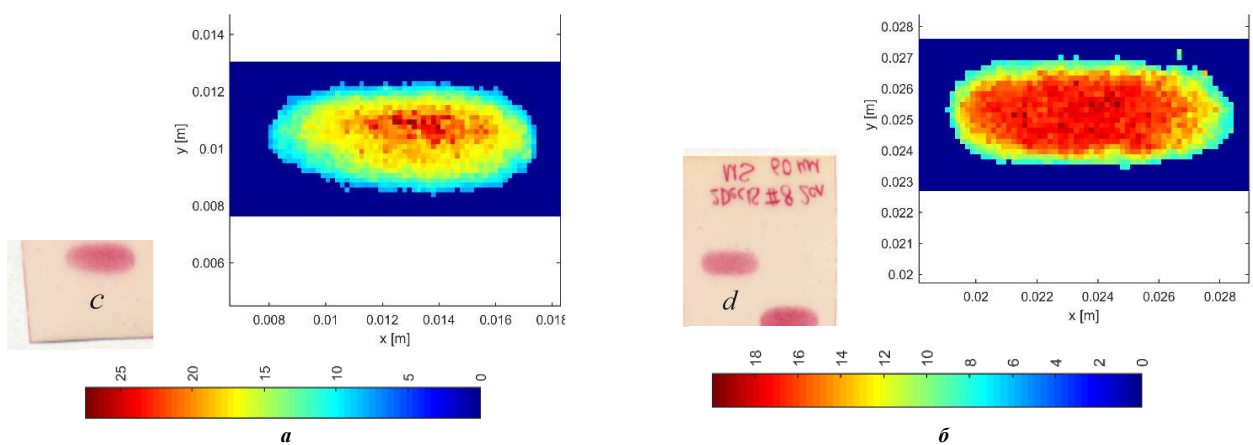


Рисунок 30 – Розшифровка відбитків, отриманих в контакті ролика підшипника із біговою доріжкою для різних номерів варіантів геометричної форми (2 проміжних шара, див табл. 1): а – 8, с; б – 8, d

5. Здійснені розрахунково-експериментальні дослідження продемонстрували повну відповідність

реальної поведінки контактуючих СПТ із проміжним шаром тій, що прогнозована на основі

чисельних досліджень. Зокрема, при порівнянні результатів досліджень взаємодії кулькового поршня гідропередачі із біговою доріжкою установа повна відповідність тенденції зміни контрольованих величин при варіюванні певних параметрів досліджуваних об'єктів. Так, контактний тиск у спряженні складнопрофільних тіл визначається із похибкою до 12÷15 %. Це є підтвердженням адекватності розроблених методів та моделей досліджень, а також обґрунтованості рекомендацій, здійснюваних на основі одержаних результатів.

Розроблені підходи до розрахунково-експериментального дослідження контактної взаємодії складнопрофільних тіл створили можливості аналізу напружено-деформованого стану широкого класу конструкцій та обґрунтування їх прогресивних технічних рішень із високими технічними і тактико-технічними характеристиками.

#### Список літератури

1. Ткачук М. М. *Мікромеханічні моделі та методи осереднення властивостей матеріалів мережевої структури та проміжних шарів контактуючих тіл*. Автореф. дисертації на здобуття наук. ступеня доктора технічних наук. Спеціальність 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України. Харків, 2019. 43 с.
2. Ткачук М. М., Саверська М. С., Куценко С. В., Зінченко О. І., Ключков І. С., Ткачук М. А., Волошина І. О. Теоретичні основи досліджень контактної взаємодії та пружно-пластичного деформування елементів машинвійськового та цивільного призначення. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: *Машинознавство та САПР*. 2022. № 1. С. 139–147. doi: 10.20998/2079-0775.2022.12
3. Tkachuk M. M., Grabovskiy A., Tkachuk M. A., Saverska M., Hrechka I. (2020). A semi-analytical method for analysis of contact interaction between structural elements along aligned surfaces. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 1/7 (103), pp. 16–25. doi:10.15587/1729-4061.2020.193985.
4. Tkachuk M.M., Skripchenko N., Tkachuk M.A., Grabovskiy A. (2018). Numerical methods for contact analysis of complex-shaped bodies with account for non-linear interface layers. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 5/7 (95), pp. 22–31. doi: 10.15587/1729-4061.2018.143193.
5. Slobodyan B.S., Lyashenko B.A., Malanchuk N.I., Marchuk V.E., Martynyak R.M. (2016). Modeling of contact interaction of periodically textured bodies with regard for frictional slip. *Journal of Mathematical Sciences*, 215 (1), pp. 110–120
6. Kozachok O. P., Slobodian B. S., Martynyak R. M. (2018). Contact of two elastic bodies with wavy topography in the presence of gases in gaps. *Materials Science*, 54(2), pp. 194–201
7. Malanchuk N. I., Slobodian B. S., Martynyak R. M. (2017). Friction Sliding of Elastic Bodies in the Presence of Subsurface Inclusions. *Materials Science*, 52(6), pp. 819–826.
8. Li Q., Popov V. L. (2019). Adhesive contact between a rigid body of arbitrary shape and a thin elastic coating. *Acta Mechanica*, vol. 230, iss. 7, pp. 2447–2453.
9. Stephan E. P., Tran T. (2021). FEM–BEM Coupling. *Schwarz Methods and Multilevel Preconditioners for Boundary Element Methods*. Springer, Cham, pp. 331–366.
10. Nagaraj M. H. et al. (2020). Nonlinear analysis of compact and thin-walled metallic structures including localized plasticity under contact conditions. *Engineering Structures*, vol. 203, pp. 109819.
11. Tkachuk M. M., Grabovskiy A., Tkachuk M. A., Hrechka I., Ishchenko O., Domina N. (2019). Investigation of multiple contact interaction of elements of dividing stamps. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, no. 4/7(100), pp. 6–15
12. Grabovskiy A., Tkachuk M., Hrechka I., Sierykov V. (2021). Contact interaction of a ball piston and a running track in a hydrovolumetric transmission. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, pp. 195–203. ISSN 2195-4356.
13. Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A., Prokopyshyn I. I. (2015). Contact of elastic bodies with nonlinear Winkler surface layers. *Journal of Mathematical Sciences*, 3, vol. 205, iss. 4, pp. 535–539.
14. Johnson, K. L. *Contact Mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1987. 464 p.
15. Zienkiewicz O. C., R. L. Taylor, J. Z. Zhu. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*] 7th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013. 756 p.
16. Крауч С., Старфілд А. *Методи граничних елементів в механіці твердого тіла*. Москва: Мир, 1987. 328 с.
17. Kinderlehrer D., Stampacchia G. *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications. Classics in Applied Mathematics* (Том 31). SIAM, 2000. 333 p.
18. Trémolières R., Lions J.-L., Glowinski R. *Numerical Analysis of Variational Inequalities*. Amsterdam: Elsevier, 2011. 775 p.
19. Zhao J., E. Vollebregt, C. (2016). Oosterlee Extending the BEM for elastic contact problems beyond the half-space approach. *Mathematical Modelling and Analysis*, vol. 21 (1), pp. 119–141.
20. Kalker J.J. (1977). Variational principles of contact elastostatics. *J. Inst. Math. and Appl*, vol. 20, pp. 199–221.
21. Аргатов И.И., Дмитриев Н.Н. *Основы теории упругого дискретного контакта*. Санкт-Петербург: Политехника, 2003. 233 с.
22. Ciavarella M. (2015). Adhesive rough contacts near complete contact. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 104, pp. 104–111.
23. Papangelo A., N. Hoffmann, M. (2017). Ciavarella Load-separation curves for the contact of self-affine rough surfaces. *Scientific reports*, vol. 7 (1), p. 6900.
24. Pohrt R., Popov V. L. (2013). Contact mechanics of rough spheres: Crossover from fractal to hertzian behavior. *Advances in Tribology*. vol. 2013
25. Pohrt R., Popov V. L. (2013). Contact stiffness of randomly rough surfaces. *Scientific reports*, vol. 3(1):3293.
26. Popov V. L., R. Pohrt, Li Q. (2017). Strength of adhesive contacts: Influence of contact geometry and material gradients. *Friction*, vol. 5(3), pp. 308–325.
27. Nayak P.R. (1971). Random Process Model of Rough Surfaces. *Journal of Lubrication Technology*, vol. 93(3), pp. 398–407.
28. Paggi M., Ciavarella M. (2010). The coefficient of proportionality  $\kappa$  between real contact area and load, with new asperity models. *Wear*, vol. 268(7), pp. 1020–1029.
29. Ciavarella M., G Demelio, JR Barber, Yong Hoon Jang (2000). Linear elastic contact of the weierstrass profile. *In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society, vol. 456, pp. 387–405.
30. Persson BNJ. (2001). Elastoplastic contact between randomly rough surfaces. *Physical Review Letters*, vol. 87(11), pp. 116101.
31. Persson BNJ, F. Bucher, Bernardino Chiaia (2002). Elastic contact between randomly rough surfaces: comparison of theory with numerical results. *Physical Review B*, vol. 65(18), pp. 184106
32. Zavarise G., M. Borri-Brunetto, Paggi M. (2007). On the resolution dependence of micromechanical contact models. *Wear*, vol. 262(1), pp. 42–54.
33. Yang C., Persson BNJ (2008). Contact mechanics: contact area and interfacial separation from small contact to full contact. *Journal of Physics: Condensed Matter*, vol. 20(21), pp. 215214.
34. Ciavarella M., Greenwood JA, Paggi M. (2008). Inclusion of «interaction» in the greenwood and williamson contact theory. *Wear*, vol. 265(5), pp. 729–734.
35. Ciavarella M., Murolo G., Demelio G., Barber JR (2004). Elastic contact stiffness and contact resistance for the weierstrass profile. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 52(6), pp. 1247–1265.
36. Ciavarella M., Dibello S., Demelio G. (2008). Conductance of rough random profiles. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45(3), pp. 879–893.
37. Ragnar Holm. (2013). *Electric contacts: theory and application*. Springer Science & Business Media, Technology & Engineering. 484 p.
38. Barber JR. (2003). Bounds on the electrical resistance between contacting elastic rough bodies. *In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society, vol. 459, pp.53–66.
39. Paggi M., Barber JR (2011). Contact conductance of rough surfaces composed of modified rmd patches. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 54(21), pp. 4664–4672.
40. Pastewka L., Robbins M. O., Persson Bo NJ (2013). Finite-size scaling in the interfacial stiffness of rough elastic contacts.

- Physical Review E Staff*, vol. 87(6), pp. 062809.
41. Демкин Н.Б. *Контактирование шероховатых поверхностей*. Москва: Наука, 1970. 227 с.
  42. Решетов Д.Н., Портман В.Т. *Точность металлорежущих станков*. Москва: Машиностроение, 1986. 336 с.
  43. Cinat, P., Paggi, M., Gnecso, G. (2019). Identification of roughness with optimal contact response with respect to real contact area and normal stiffness. *Mathematical Problems in Engineering*, 2019.
  44. Li, Q., Pohrt, R., Lyashenko, I. A., Popov, V. L. (2018). Boundary element method for nonadhesive and adhesive contacts of a coated elastic half-space. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 1350650119854250.
  45. Li, Q., Popov, V. L. (2019). Adhesive contact between a rigid body of arbitrary shape and a thin elastic coating. *Acta Mechanica*, 1–7.
  46. Vakis A.I., Yastrebov V.A., Scheibert, J. [et al.] (2018). Modeling and simulation in tribology across scales: An overview, *Tribology International*, vol. 125, pp. 169–199.
  47. Liu, J., Ke, L., & Zhang, C. (2021). Axisymmetric thermoelastic contact of an FGM-coated half-space under a rotating punch. *Acta Mechanica*, 232(6), 2361–2378.
  48. Liu, T. J., Yang, F., Yu, H., & Aizikovich, S. M. (2021). Axisymmetric adhesive contact problem for functionally graded materials coating based on the linear multi-layered model. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 49(1), 41–58.
  49. Çömez, İ., & Omurtag, M. H. (2021). Contact problem between a rigid punch and a functionally graded orthotropic layer resting on a Pasternak foundation. *Archive of Applied Mechanics*, 91(9), 3937–3958.
  50. Argatov, I., & Papangelo, A. (2021). Axisymmetric JKR-type adhesive contact under equibiaxial stretching. *The journal of adhesion*, 97(2), 140–154.
  51. Argatov, I. I. (2021). Controlling the adhesive pull-off force via the change of contact geometry. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 379(2203), 20200392.
  52. Ciavarella, M., & Papangelo, A. (2021). On the interaction of viscoelasticity and waviness in enhancing the pull-off force in sphere/flat contacts. *Tribology Letters*, 69(4), 1–11.
  53. Papangelo, A., & Ciavarella, M. (2022). Viscoelastic dissipation in repeated normal indentation of an Hertzian profile. *International Journal of Solids and Structures*, 236, 111362.
  54. Müser, M. H., & Persson, B. N. (2022). Crack and pull-off dynamics of adhesive, viscoelastic solids. *Europhysics Letters*, 137(3), 36004.
  55. Streliaiev, Y., Martynyak, R., & Chumak, K. (2021). Thermomechanical Slip in Elastic Contact Between Identical Materials. *Acta mechanica et automatica*, 15(4), 187–192.
  56. Пригоровский Н.И. *Методы и средства определения полей деформаций и напряжений*. Москва: Машиностроение, 1983. 248 с.
  57. Вест, Ч. Голографическая интерферометрия. Москва: Мир, 1982. 504 с. (пер. с англ.).
  58. Kim S., Miller M. C. (2016). Validation of a finite element humeroradial joint model of contact pressure using Fuji pressure sensitive film. *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 138(1), pp. 014501.
  59. Demba S., S. Elsholz, C. Ammon, S. Rose-Meierhöfer (2016). The usability of a pressure-indicating film to measure the teat load caused by a collapsing liner. *Sensors*, vol. 16(10), pp. 1597.
  60. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А. Решение задач о контактном взаимодействии шероховатых тел с применением модели нелинейного винклеровского слоя. *Механіка та машинобудування*. Харків, НТУ «ХПІ». 2016. № 1. С. 3–14.
  61. Ткачук М.М., Грабовський А.В., Ткачук М.А., Саверська М.С. Розрахунково-експериментальне дослідження впливу профілю і жорсткості проміжного шару на розподіл контактного тиску між складнопрофільними тілами. *Механіка та машинобудування*. 2019. №1. С. 36–50.
  62. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Грабовський А. В., Саверская М. С., Ткачук Н. А., Зарубина А. А., Сериков В. И., Мерещкая К. А. Расчетно-экспериментальное исследование элементов механических систем. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Харків, НТУ «ХПІ». 2018. № 29 (1305). С. 129–156.
  63. Ткачук Н.Н., Львов Г.И., Грабовський А.В., Скрипченко Н.Б. Контактное взаимодействие элементов машин с нелинейно упругим промежуточным слоем. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Харків, НТУ «ХПІ». 2018. № 33 (1309). С. 43–63.
  64. Tkachuk M. (2018). A Numerical Method for Axisymmetric Adhesive Contact Based on Kalker's Variational Principle. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, no. 3/7(93), pp. 34–41
  65. Аврунин Г. А., Кабаненко И. В., Хавиль В. В., Истратов А. В., Богачев С. В., Лизунов К. М. Объемная гидроредатча с шариковыми поршнями ГОП-900: характеристики и технический уровень. *Механіка та машинобудування*. Харків: НТУ «ХПІ». 2004. № 3. С. 14–21.
  66. Ткачук М. М. *Контактна механіка тіл із урахуванням нелінійних властивостей поверхневих та проміжних шарів*: монографія. Дніпро: Видавець Обдимко Ольга Станіславівна, 2022. 255 с.

## References (transliterated)

1. Tkachuk M. M. *Mikromekhanichni modeli ta metody oserednennia vlastyvoستي materialiv terezhevoi struktury ta promizhnykh shariv kontaktuiuychkh til*. Avtoref. dysertatsii na zdobuttia nauk. stupenia doktora tekhnichnykh nauk. Spetsialnist 01.02.04 – mekhanika deformivnoho tverdogo tila. Instytutu problem mashynobuduvannia im. A.M. Pidhornoho NAN Ukrainy, Kharkiv, 2019. 43 p.
2. Tkachuk M. M., Saverska M. S., Kutsenko S. V., Zinchenko O. I., Klochkov I. Ye., Tkachuk M. A., Voloshyna I. O. (2022). Teoretychni osnovy doslidzhen kontaktnoi vzaiemodii ta pruzhno-plastychnoho deformuvannia elementiv mashynviiskovoho ta tsvyilnoho pryznachennia. *Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «KhPI»*. Seriya: Mashynoznavstvo ta SAPR, no. 1, pp. 139–147. doi: 10.20998/2079-0775.2022.12
3. Tkachuk M. M., Grabovskiy A., Tkachuk M. A., Saverska M., Hrechka I. (2020). A semi-analytical method for analys of contact interaction between structural elements along aligned surfaces. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 1/7 (103), pp. 16–25. doi:10.15587/1729-4061.2020.193985.
4. Tkachuk M.M., Skripchenko N., Tkachuk M.A., Grabovskiy A. (2018). Numerical methods for contact analysis of complex-shaped bodies with account for non-linear interface layers. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 5/7 (95), pp. 22–31. doi: 10.15587/1729-4061.2018.143193.
5. Slobodyan B.S., Lyashenko B.A., Malanchuk N.I., Marchuk V.E., Martynyak R.M. (2016). Modeling of contact interaction of periodically textured bodies with regard for frictional slip. *Journal of Mathematical Sciences*, 215 (1), pp. 110–120
6. Kozachok O. P., Slobodian B. S., Martynyak R. M. (2018). Contact of two elastic bodies with wavy topography in the presence of gases in gaps. *Materials Science*, 54(2), pp. 194–201
7. Malanchuk N. I., Slobodian B. S., Martynyak R. M. (2017). Friction Sliding of Elastic Bodies in the Presence of Subsurface Inclusions. *Materials Science*, 52(6), pp. 819–826.
8. Li Q., Popov V. L. (2019). Adhesive contact between a rigid body of arbitrary shape and a thin elastic coating. *Acta Mechanica*, vol. 230, iss. 7, pp. 2447–2453.
9. Stephan E. P., Tran T. (2021). *FEM–BEM Coupling. Schwarz Methods and Multilevel Preconditioners for Boundary Element Methods*. Springer, Cham, pp. 331–366.
10. Nagaraj M. H. [et al.] (2020). Nonlinear analysis of compact and thin-walled metallic structures including localized plasticity under contact conditions. *Engineering Structures*, vol. 203, pp. 109819.
11. Tkachuk M. M., Grabovskiy A., Tkachuk M. A., Hrechka I., Ishchenko O., Domina N. (2019). Investigation of multiple contact interaction of elements of dividing stamps. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, no. 4/7(100), pp. 6–15
12. Grabovskiy A., Tkachuk M., Hrechka I., Sierykov V. (2021). Contact interaction of a ball piston and a running track in a hydrovolumetric transmission. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, pp. 195–203. ISSN 2195-4356.
13. Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A., Prokopyshyn I. I. (2015). Contact of elastic bodies with nonlinear Winkler surface layers. *Journal of Mathematical Sciences*, 3, vol. 205, iss. 4, pp. 535–539.
14. Johnson, K. L. *Contact Mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1987. 464 p.
15. Zienkiewicz O. C., R. L. Taylor, J. Z. Zhu. *The Finite Element*

- Method: Its Basis and Fundamentals*] 7th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013. 756 p.
16. Krauch S., Starfield A. *Metody granichnikh elementov v mekhanike tverdogo tela*. Moskva: Mir, 1987. 328 p.
  17. Kinderlehrer D., Stampacchia G. *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*. *Classics in Applied Mathematics* (Том 31). SIAM, 2000. 333 p.
  18. Trémoières R., Lions J.-L., Glowinski R. *Numerical Analysis of Variational Inequalities*. Amsterdam: Elsevier, 2011. 775 p.
  19. Zhao J., E. Vollebregt, C. (2016). Oosterlee Extending the BEM for elastic contact problems beyond the half-space approach. *Mathematical Modelling and Analysis*, vol. 21 (1), pp. 119–141.
  20. Kalker J.J. (1977). Variational principles of contact elastostatics. *J. Inst. Math. and Appl.*, vol. 20, pp. 199–221.
  21. Аргатов И.И., Дмитриев Н.Н. *Основы теории упругого дискретного контакта*. Санкт-Петербург: Политехника, 2003. 233 с.
  22. Ciavarella M. (2015). Adhesive rough contacts near complete contact. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 104, pp. 104–111.
  23. Papangelo A., N. Hoffmann, M. (2017). Ciavarella Load-separation curves for the contact of self-affine rough surfaces. *Scientific reports*, vol. 7 (1), p. 6900.
  24. Pohrt R., Popov V. L. (2013). Contact mechanics of rough spheres: Crossover from fractal to hertzian behavior. *Advances in Tribology*, vol. 2013.
  25. Pohrt R., Popov V. L. (2013). Contact stiffness of randomly rough surfaces. *Scientific reports*, vol. 3(1):3293
  26. Popov V. L., R. Pohrt, Li Q. (2017). Strength of adhesive contacts: Influence of contact geometry and material gradients. *Friction*, vol. 5(3), pp. 308–325.
  27. Nayak P.R. (1971). Random Process Model of Rough Surfaces. *Journal of Lubrication Technology*, vol. 93(3), pp. 398–407.
  28. Paggi M., Ciavarella M. (2010). The coefficient of proportionality  $\kappa$  between real contact area and load, with new asperity models. *Wear*, vol. 268(7), pp. 1020–1029.
  29. Ciavarella M., G Demelio, JR Barber, Yong Hoon Jang (2000). Linear elastic contact of the weierstrass profile. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society, vol. 456, pp. 387–405.
  30. Persson BNJ. (2001). Elastoplastic contact between randomly rough surfaces. *Physical Review Letters*, vol. 87(11), pp. 116101.
  31. Persson BNJ, F. Bucher, Bernardino Chiaia (2002). Elastic contact between randomly rough surfaces: comparison of theory with numerical results. *Physical Review B*, vol. 65(18), pp. 184106
  32. Zavarise G., M. Borri-Brunetto, Paggi M. (2007). On the resolution dependence of micromechanical contact models. *Wear*, vol. 262(1), pp. 42–54.
  33. Yang C., Persson BNJ (2008). Contact mechanics: contact area and interfacial separation from small contact to full contact. *Journal of Physics: Condensed Matter*, vol. 20(21), pp. 215214.
  34. Ciavarella M., Greenwood JA, Paggi M. (2008). Inclusion of «interaction» in the greenwood and williamson contact theory. *Wear*, vol. 265(5), pp. 729–734.
  35. Ciavarella M., Murolo G., Demelio G., Barber JR (2004). Elastic contact stiffness and contact resistance for the weierstrass profile. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 52(6), pp. 1247–1265.
  36. Ciavarella M., Dibello S., Demelio G. (2008). Conductance of rough random profiles. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45(3), pp. 879–893.
  37. Ragnar Holm. (2013). *Electric contacts: theory and application*. Springer Science & Business Media, Technology & Engineering. 484 p.
  38. Barber JR. (2003). Bounds on the electrical resistance between contacting elastic rough bodies. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society, vol. 459, pp.53–66.
  39. Paggi M., Barber JR (2011). Contact conductance of rough surfaces composed of modified rnd patches. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 54(21), pp. 4664–4672.
  40. Pastewka L., Robbins M. O., Persson Bo NJ (2013). Finite-size scaling in the interfacial stiffness of rough elastic contacts. *Physical Review E Staff*, vol. 87(6), pp. 062809.
  41. Демкин Н.Б. *Контактирование шероховатых поверхностей*. Москва: Наука, 1970. 227 с.
  42. Решетов Д.Н., Портман В.Т. *Точность металлорежущих станков*. Москва: Машиностроение, 1986. 336 с.
  43. Cinat, P., Paggi, M., Gnecco, G. (2019). Identification of roughness with optimal contact response with respect to real contact area and normal stiffness. *Mathematical Problems in Engineering*, 2019.
  44. Li, Q., Pohrt, R., Lyashenko, I. A., Popov, V. L. (2018). Boundary element method for nonadhesive and adhesive contacts of a coated elastic half-space. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 1350650119854250.
  45. Li, Q., Popov, V. L. (2019). Adhesive contact between a rigid body of arbitrary shape and a thin elastic coating. *Acta Mechanica*, 1–7.
  46. Vakis A.L., V.A. Yastrebov, Scheibert, J. [et al.] (2018). Modeling and simulation in tribology across scales: An overview, *Tribology International*, vol. 125, pp. 169–199.
  47. Liu, J., Ke, L., & Zhang, C. (2021). Axisymmetric thermoelastic contact of an FGM-coated half-space under a rotating punch. *Acta Mechanica*, 232(6), 2361-2378.
  48. Liu, T. J., Yang, F., Yu, H., & Aizikovich, S. M. (2021). Axisymmetric adhesive contact problem for functionally graded materials coating based on the linear multi-layered model. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 49(1), 41–58.
  49. Çömez, İ., & Omurtag, M. H. (2021). Contact problem between a rigid punch and a functionally graded orthotropic layer resting on a Pasternak foundation. *Archive of Applied Mechanics*, 91(9), 3937–3958.
  50. Argatov, I., & Papangelo, A. (2021). Axisymmetric JKR-type adhesive contact under equibiaxial stretching. *The journal of adhesion*, 97(2), 140-154.
  51. Argatov, I. I. (2021). Controlling the adhesive pull-off force via the change of contact geometry. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 379(2203), 20200392.
  52. Ciavarella, M., & Papangelo, A. (2021). On the interaction of viscoelasticity and waviness in enhancing the pull-off force in sphere/flat contacts. *Tribology Letters*, 69(4), 1–11.
  53. Papangelo, A., & Ciavarella, M. (2022). Viscoelastic dissipation in repeated normal indentation of an Hertzian profile. *International Journal of Solids and Structures*, 236, 111362.
  54. Müser, M. H., & Persson, B. N. (2022). Crack and pull-off dynamics of adhesive, viscoelastic solids. *Europhysics Letters*, 137(3), 36004.
  55. Streliaiev, Y., Martynyak, R., & Chumak, K. (2021). Thermomechanical Slip in Elastic Contact Between Identical Materials. *Acta mechanica et automatica*, 15(4), 187–192.
  56. Prigorovskij N.I. (1983). *Metody i sredstva opredeleniya polej deformaczij i napryazhenij*. Moskva: Mashinostroenie, 248 p.
  57. Vest, Ch. *Golograficheskaya interferometriya*. Moskva: Mir, 1982. 504 p. (per. s angl.).
  58. Kim S., Miller M. C. (2016). Validation of a finite element humeroradial joint model of contact pressure using Fuji pressure sensitive film. *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 138(1), pp. 014501.
  59. Demba S., S. Elsholz, C. Ammon, S. Rose-Meierhöfer (2016). The usability of a pressure-indicating film to measure the teat load caused by a collapsing liner. *Sensors*, vol. 16(10), pp. 1597.
  60. Tkachuk N.N., Skripchenko N.B., Tkachuk N.A. (2016). Reshenie zadach o kontaktnom vzaimodejstvii sherokhoverat'nykh tel s primeneniem modeli nelinejnogo vinklerovskogo sloya. *Mekhani'ka ta mashinobuduvannya*. Kharkiv, NTU «KhPI», no. 1, pp. 3–14
  61. Tkachuk M.M., Hrabovskiy A.V., Tkachuk M.A., Saverska M.S. (2019). Rozrakhunkovo-eksperymentalne doslidzhennia vplyvu profilu i zhorstkosti promizhnoho шарu na rozpodil kontaktnoho tysku mizh skladnoprofilnymy tilamy. *Mekhanika ta mashynobuduvannya*, no.1, pp. 36–50.
  62. Tkachuk N.N., Skrypchenko N.B., Hrabovskiy A. V., Saverskaia M. S., Tkachuk N. A., Zarubyna A. A., Serykov V. Y., Meretskaia K. A. (2018). Raschetno-eksperymentalnoe yssledovanye elementov mekhanicheskikh system. *Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «Kharkivskiy politekhnichnyi instytut»*. Kharkiv, NTU «KhPI», no. 29 (1305), pp. 129–156.
  63. Tkachuk N.N., L'vov G.L., Grabovskij A.V., Skripchenko N.B. (2018). Kontaktnoe vzaimodejstvie elementov mashin s nelinejno uprugim promezhutochnym sloem. *Vіsnyk Naczi'onal'nogo tekhnichnogo uni'versytetu «Kharkiv's'kij poli'tekhnichnij i nstitut»*. Kharkiv, NTU «KhPI», no. 33 (1309), pp. 43–63.
  64. Tkachuk M. (2018). A Numerical Method for Axisymmetric Adhesive Contact Based on Kalker's Variational Principle. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, no. 3/7(93), pp. 34–41
  65. Avrunin G. A., Kabanenko I. V., Khavil' V. V., Istratov A. V.,



Bogachev S. V., Lizunov K. M. (2004). Ob`emnaya gidroperedacha s sharikovy`mi porshnyami GOP-900: kharakteristiki i tekhnicheskij uroven`. *Mekhani`ka ta mashinobuduvannya*. Kharkiv: NTU «KhPI», no. 3, pp. 14–21.

66. Tkachuk M. M. (2022). *Kontaktna mekhanika til iz*

*urakhuvanniam neliniynykh vlastyvostei poverkhnevyykh ta promizhnykh shariv: monohrafiia*. Dnipro: Vydavets Obdymko Olha Stanislavivna, 255 p.

*Надійшла (received) 05.02.2022*

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Ткачук Микола Миколайович / Tkachuk Mykola Mykolayovych** – доктор технічних наук, старший дослідник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», провідний науковий співробітник кафедри інформаційних технологій та систем колісних і гусеничних машин імені О.О. Морозова, м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4753-4267>; e-mail: [m.tkachuk@tmm-sapr.org](mailto:m.tkachuk@tmm-sapr.org).

**Гречка Ірина Павлівна / Hrechka Iryna** – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4907-9170>; тел.: (057)7076534; e-mail: [girinar7@gmail.com](mailto:girinar7@gmail.com).

**Ткачук Микола Анатолійович / Tkachuk Mykola** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідувач кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4174-8213>; тел.: (057) 707-69-02; e-mail: [tma@tmm-sapr.org](mailto:tma@tmm-sapr.org).

**Сериков Володимир Іванович / Sierykov Volodymyr** – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), доцент, старший науковий співробітник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», докторант кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин, м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-64-78; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5295-3925>; e-mail: [SerikovVI@tmm-sapr.org](mailto:SerikovVI@tmm-sapr.org)

**Грабовський Андрій Володимирович / Grabovskiy Andrey** – доктор технічних наук, старший науковий співробітник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», провідний науковий співробітник кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6116-0572>; тел.: (057)7076166, e-mail: [andrej8383@gmail.com](mailto:andrej8383@gmail.com).

**Пінчук Наталія Володимирівна / Pinchuk Natalia** – кандидат фізико-математичних наук, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», старший науковий співробітник кафедри «Матеріалознавство», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0954-2266>; e-mail: [spiritnata@gmail.com](mailto:spiritnata@gmail.com)

**Ткачук Ганна Володимирівна / Tkachuk Hanna** – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», старший науковий співробітник кафедри «Інформаційні технології та системи колісних і гусеничних машин ім. О. О. Морозова», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0435-1847>, e-mail: [TkachuckAV@tmm-sapr.org](mailto:TkachuckAV@tmm-sapr.org).

**Клочков Ілля Євгенович / Klochkov Illia** – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», молодший науковий співробітник кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин, м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-69-01; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4923-2833>; e-mail: [s008@tmm-sapr.org](mailto:s008@tmm-sapr.org).

**Цендра Георгій Вікторович / Tsendra Heorgii** – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; e-mail: [tma@tmm-sapr.org](mailto:tma@tmm-sapr.org)

**Шевченко Андрій Валерійович / Shevchenko Andriy** – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; e-mail: [tma@tmm-sapr.org](mailto:tma@tmm-sapr.org)

**Киричук Владислав Владиславович / Kyrychuk Vladyslav** – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», студент кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин, м. Харків, Україна; e-mail: [kyrvladv@gmail.com](mailto:kyrvladv@gmail.com)

**Фрізюк Дмитро Олександрович / Friziuk Dmytro** – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», студент кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин, м. Харків, Україна; e-mail: [bobalu322995@gmail.com](mailto:bobalu322995@gmail.com)