

В. А. МАТУСЕВИЧ, Ю. В. ШАРАБАН, О. В. ШЕХОВ

ЦІЛЬОВА ФУНКЦІЯ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ШВИДКОДІЇ ЗАМКНУТОГО ПЛАНЕТАРНОГО МЕХАНІЗМУ, УТВОРЕНОГО ДВОМА ПРОСТИМИ ПЛАНЕТАРНИМИ МЕХАНІЗМАМИ ДЖЕЙМСА

Представлені результати побудови математичної моделі оцінки швидкодії проєктованої конструкції замкнутого планетарного механізму, утвореного з двох простих планетарних механізмів Джеймса. Швидкодія проєктованої конструкції механізму оцінюється величиною приведенного до його вхідного валу моменту інерції ланок механізму. Модель є безрозмірною функцією (аналог приведенного моменту інерції) двох змінних – передаточних відношень простих планетарних механізмів і набору числових параметрів. Параметри враховують значення коефіцієнтів, що характеризують моделі інерції мас зубчастих коліс і водилів, конструктивні та міцнісні обмеження зовнішніх зубчастих зачеплень простих планетарних механізмів Джеймса, а також структуру цих механізмів. Набір значень параметрів і діапазон варіювання можливих значень передаточних відношень простих планетарних механізмів впливають на положення мінімуму аналога приведенного моменту інерції. Виконаний аналіз впливу чисел сателітів простих планетарних механізмів і моменту інерції водила диференціального механізму на положення мінімумів аналогів приведенного моменту інерції замкнутого планетарного механізму при розрахунках на контактну і згинальну міцності. На основі функції аналога приведенного моменту інерції будується цільова функція параметричної оптимізації проєкції швидкодії конструкції замкнутого планетарного механізму.

Ключові слова: простий планетарний механізм Джеймса (типу \overline{AI}); замкнутий планетарний механізм; момент інерції зубчастого колеса; момент інерції водила; момент інерції планетарного механізму; контактна міцність зубчастого зачеплення; згинальна міцність зубчастого зачеплення; параметрична оптимізація; параметрична оптимізація приведенного моменту інерції планетарного механізму

V. MATUSEVICH, Ju. SHARABAN, A. SHEHOV

OBJECTIVE FUNCTION OF PARAMETRIC OPTIMIZATION OF THE SPEED OF A CLOSED PLANETARY MECHANISM FORMED BY TWO SIMPLE JAMES PLANETARY MECHANISMS

The results of building a mathematical model of estimation the speed of the designed construction of the closed planetary mechanism formed from two simple planetary mechanisms of James are presented. The speed of the designed construction of the mechanism is estimated by the value of the equivalent moment of inertia of the mechanism links reduced to its input shaft. A model is a dimensionless function (analogue the equivalent moment of inertia) of two variables - transmission relations of simple planetary mechanisms, and set of numerical parameters. The parameters take into account the values of the coefficients that characterize the mass inertia models of gears and planet carriers, the design and strength limitations of external gears of simple planetary mechanisms of James, as well as the structure of these mechanisms. Set of values of parameters and range of varying of possible values of transmission relations of simple planetary mechanisms influence on position of a minimum of the analogue the equivalent moment of inertia. The influence of the number of planetary gears of simple planetary mechanisms and the moment of inertia of the planet carrier of the differential mechanism on the positions of the minima of the analogues of the reduced moment of inertia of a closed planetary gear was analyzed in calculations for contact strength and bending strength. Based on the function of the analogue of the equivalent moment of inertia, the objective function of parametric optimization of the project fast-acting of the design of a closed planetary mechanism is built.

Keywords: simple James planetary mechanism (mechanisms type \overline{AI}); closed planetary mechanism; moment of inertia of gear-wheel; moment of inertia of the planet carrier; moment of inertia of the planetary mechanism; contact strength of the gearing; bending strength of the gearing; parametric optimization; parametric optimization of the equivalent moment of inertia of the planetary mechanism

Вступ. У електромеханічних приводах вантажо-підйомного устаткування літаків застосовують конструкції замкнутих планетарних передач [1]. Як правило, ці приводи працюють у стартстопному режимі з обмеженнями на часові показники циклограм їх вантаження. Тому швидкодія цих приводів є однією з найважливіших характеристик їх конструкції.

До сучасних конструкцій електромеханічних приводів різних авіаційних агрегатів пред'являються вимоги забезпечення підвищеної здатності навантаження і підвищеного ресурсу експлуатації з одночасним зменшенням їх масогабаритних показників. При цьому часто ці вимоги конфліктують з вимогою по швидкодії проєктованої конструкції електромеханічного приводу. Іноді вирішення вказаного конфлікту призводить до ускладнення і збільшення часу проєктування конструкції електромеханічного приводу. Тому практичну значущість набувають розробки методик оптимального багатокритерійного проєктування конструкцій електромеханічних приводів авіаційних агрегатів, у тому числі – вантажопідйомного устаткування.

Для оцінки швидкодії механічної передачі проєктованої конструкції електромеханічного приводу вибрана функція приведенного до вхідного валу механічної передачі моменту інерції її рухомих ланок.

Мета статті – побудова математичної моделі

цільової функції параметричної оптимізації швидкодії замкнутого планетарного механізму, утвореного двома простими планетарними механізмами типу \overline{AI} з урахуванням можливих значень їх передаточних відношень.

Аналіз літератури. Дослідженню динаміки електромеханічних приводів із зубчастими передачами присвячено багато робіт. У цих роботах, як правило, для досліджень застосовують динамічну модель механічної системи із зосередженими параметрами. Структура і параметри моделі повинні відбивати характер руху і навантаження ланок реальної конструкції приводу. Для оцінки перехідних характеристик електромеханічного приводу із зубчастою передачею можна обмежитися розглядом останньої у вигляді одномасової моделі із зосередженим інерційним параметром – приведеним моментом інерції до вхідного валу.

Визначення приведенного моменту інерції різних кінематичних схем планетарних механізмів наводиться у роботі [2]. У цій роботі також досліджуються властивості приведених моментів інерції планетарних механізмів для цілей оптимального проєктування планетарних механізмів за критерієм швидкодії. Проте в роботі

© В. А. Матусевич, Ю. В. Шарабан, О. В. Шехов, 2022

відсутній розгляд побудови цільових функцій оптимізації приведенного моменту інерції для замкнутих планетарних механізмів. Дослідження властивостей математичної моделі приведенного моменту інерції ряднопланетарних механізмів типу $n \times \overline{\text{AI}}$ розглянуті у роботі [3]. У роботі даються рекомендації по розподілу загального передаточного відношення механізму по його ступеням. Але ці рекомендації відносяться тільки до кінематичних механізмів. Урахування умов міцності зубчастих зачеплень на вигляд функції приведенного моменту інерції механізму і її властивостей у роботі не розглядалися.

Динамічна модель планетарного приводу типу $\overline{\text{AI}}$ кривошипних пресів розглядається у роботі [4]. Динамічна модель приводу пресу представляється у вигляді трьохмасової моделі із зосередженими інерційними елементами, сполученими кінематичною умовою і безінерційними жорсткими зв'язками. Для спрощення математичної моделі приводу моменти інерції сателітів у відносному русі були приведені до моментів інерції основних ланок редуктора.

Побудова динамічної моделі приводу допоміжної поверхні управління летальним апаратом для вивчення його ефективного функціонування розглянуто у роботі [5]. У конструкції приводу застосований двоступінчастий епіциклічний зубчастий механізм, в якому функції водила реалізують зубчасті колеса із зовнішніми і внутрішніми зачепленнями. Динамічна модель приводу формується у вигляді механічної системи з одним обертальним ступенем свободи (обертання вхідного валу приводу) і одним інерційним елементом – приведеним до вхідного валу моментом інерції планетарного редуктора. Рівняння руху моделі записується у вигляді диференціального рівняння 1-го порядку відносно кутової швидкості обертання вхідного валу приводу. Розв'язок цього рівняння знаходився чисельним методом.

Динамічна поведінка планетарного редуктора з двома центральними колесами з внутрішніми зачепленнями (планетарний механізм типу $\overline{\text{II}}$) розглядається у статті [6]. Для аналізу динаміки редуктора використана механічна система із зосередженими параметрами, що має чотири ступені свободи. Рівняння руху моделі отримані на основі рівнянь Лагранжа 2-го роду і представлені в матричній формі. Рівняння руху динамічної моделі планетарного редуктора розв'язувалося у програмному середовищі Matlab Simulink.

Структурне моделювання динаміки планетарного редуктора кривошипного пресу в середовищі програмного комплексу SimulationX розглянуто у роботі [7]. Модель враховує пружні властивості ланок, наявність люфтів і сил тертя. Відзначається, що наявність люфтів в підшипниках водила збільшує максимуми його прискорення. Теоретичне дослідження впливу структурної моделі інерції водила і сателітів на динамічну поведінку планетарної передачі типу 2К-Н (планетарний механізм типу $\overline{\text{AI}}$) розглядається у роботі [8]. Розробка математичної моделі динамічних характеристик електромеханічного приводу з планетарним механізмом Джеймса наведена у роботі [9]. Математична модель приводу розроблена з урахуванням того, що усі ланки планетарного механізму є жорсткими і відомі динамічні

характеристики електродвигуна. Наведені аналітичні розв'язки для розробленої математичної моделі приводу.

Дослідження мінімізації кінетичної енергії планетарного механізму типу $\overline{\text{AI}}$ розглядається у роботі [10]. Цільова функція кінетичної енергії механізму включає: кінетичну енергію обертання сонячного колеса (вхідний вал); кінетичну енергію руху сателітів разом з обертанням водила; кінетичну енергію обертання сателітів відносно власних осей. Змінними цільової функції є: модулі зубчастих зачеплень (дві змінні), ширини зубчастих зачеплень (дві змінні); числа зубців коліс механізму (чотири змінні). В якості вхідних даних механізму вибрані значення вхідної потужності, частоти обертання вхідного валу і загального передаточного відношення механізму. Для пошуку допустимих значень змінних цільової функції, коли вона має мінімальне значення, застосовують обмеження двох видів. Перший вид складають обмеження, пов'язані з геометрією і кінематикою зубчастих передач. Другий вид складають обмеження, пов'язані з контактною і згинальною міцністю зубчастих зачеплень. Мінімізація цільової функції виконувалася у програмному середовищі Matlab. Аналіз динаміки диференціального механізму типу $\overline{\text{AI}}$ з числом свободи, рівним двом, наводиться у роботі [11]. Рівняння руху динамічної моделі механізму отримані на основі рівнянь Лагранжа 2-го роду. Для перехідного та усталеного руху механізму досліджено зміни відношень для кутових швидкостей центральних зубчастих коліс і прикладених до них обертаючих моментів.

Матеріали досліджень. Виклад матеріалів статті є продовженням досліджень, які були представлені у роботах [1, 12]. Скористаємося позначеннями, поясненнями, рисунками, співвідношеннями і рівняннями цих робіт. На рис. 1 показана кінематична схема досліджуваного замкнутого планетарного механізму.

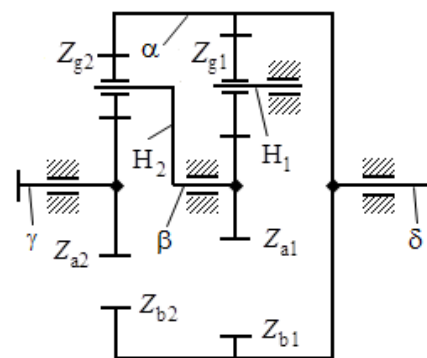


Рисунок 1 – Замкнутий планетарний механізм

Замкнутий планетарний механізм утворений з двох одновінцевих простих планетарних механізмів типу $\overline{\text{AI}}$. Перший механізм – диференціальний $Z_{a2}-Z_{g2}-Z_{a2}-H_2$, другий – планетарний $Z_{a1}-Z_{g1}-Z_{b1}-H_1$, в якому загальмовано водило H_1 .

Передаточне відношення досліджуваного механізму від валу γ до валу δ визначається за формулою

$$U_{\gamma\delta} = 1 - (p_1 + 1)(p_2 + 1), \quad (1)$$

де $p_1 = \frac{Z_{b1}}{Z_{a1}}$, $p_2 = \frac{Z_{b2}}{Z_{a2}}$ – кінематичні параметри

кінематичного ланцюга замикання (КЛЗ) і диференціального механізму (ДМ).

Простий планетарний механізм. Спочатку розглянемо моделювання інерційності простого планетарного механізму типу \overline{AI} , у якого його рухомі колеса і водило позначені відповідно як Z_a , Z_g і H .

Для рухомих ланок конструкції простого планетарного механізму типу \overline{AI} приймають наступні допущення (моделі) [2].

1. Зубчасте колесо замінюють диском, діаметр якого дорівнює діаметру діляльного кола, а ширина дорівнює ширині зубчастого вінця відповідного зубчастого колеса. Момент інерції цього диска дорівнює

$$J_i = \frac{m_i d_i^2}{8} = \frac{\pi \rho_i}{32} b_i d_i^4, \quad (2)$$

де i – індекс рухомих зубчастих коліс Z_a або Z_g .

2. Водило замінюють умовним диском, діаметр якого дорівнює подвоєній міжосьовій відстані зачеплення коліс Z_a - Z_g , а ширина дорівнює ширині зубчастого вінця b_a сосячного колеса Z_a . Момент інерції умовного диска дорівнює

$$\begin{aligned} J_H &= n_H \frac{\pi \rho_H}{32} b_a (d_a + d_g)^4 = \\ &= n_H \frac{\pi \rho_H}{32} b_a d_a^4 \left(1 + \frac{Z_g}{Z_a}\right)^4, \end{aligned} \quad (3)$$

де n_H – коефіцієнт приведення.

Коефіцієнт приведення n_H враховує невідповідність параметрів геометричної моделі водила до його конструкції.

3. Маса валів частково враховують в об'ємі зубчастих коліс і водила.

При урівноважених масах центр інерції простого планетарного механізму типу \overline{AI} співпадає з центральною віссю його основних ланок (центральної зубчастих коліс). У такому разі кінетична енергія механізму буде дорівнювати

$$\begin{aligned} T_{\text{мех}} &= T_a + k T_g + T_H = \frac{J_a \omega_a^2}{2} + \\ &+ k \left(\frac{J_g \omega_g^2}{2} + \frac{m_g V_{sg}^2}{2} \right) + \frac{J_H \omega_H^2}{2}, \end{aligned} \quad (4)$$

де k – число сателітів;

J_a – момент інерції центрального зубчастого колеса Z_a відносно власної осі;

J_g , m_g – відповідно, момент інерції одного сате-

літа Z_g відносно власної осі і його маса;

J_H – момент інерції водила H відносно власної осі;

ω_a , ω_g , ω_H – відповідно, кутова швидкість центрального зубчастого колеса Z_a , сателіта Z_g і водила H ;

V_{sg} – лінійна швидкість центру мас одного сателіта Z_g .

Приведений до валу центрального зубчастого колеса Z_a момент інерції механізму матиме вигляд

$$J_{np}^a = J_a + k \left(J_g \frac{\omega_g^2}{\omega_a^2} + m_g \frac{V_{sg}^2}{\omega_a^2} \right) + J_H \frac{\omega_H^2}{\omega_a^2}. \quad (5)$$

Підставивши в (5) співвідношення (2) і (3), отримаємо

$$\begin{aligned} J_{np}^a &= \frac{\pi \rho_a}{32} b_a d_a^4 + k \left[\frac{\pi \rho_g}{32} b_g d_g^4 \frac{1}{(u-2)^2} + \right. \\ &\left. + \frac{\pi \rho_g}{32} 8 b_g d_g^2 \frac{d_a^2}{16} \right] + n_H \frac{\pi \rho_H}{32} b_a d_a^4 \frac{u^2}{16}, \end{aligned} \quad (6)$$

де $u = u_{aH}^b = 1 + \frac{Z_b}{Z_a}$ – передаточне відношення механізму від зубчастого колеса Z_a до водила H при нерухомому зубчастому колесі Z_b .

При виведенні формули (6) були враховані співвідношення

$$\left(\frac{\omega_g}{\omega_a} \right)^2 = \frac{1}{(u-2)^2} \quad \text{і} \quad \left(\frac{V_{sg}}{\omega_a} \right)^2 = \frac{d_a^2}{4} \left(1 + \frac{Z_g}{Z_a} \right)^2 \frac{1}{u^2} = \frac{d_a^2}{16}.$$

Якщо усі зубчасті колеса і водило виготовлені з одного і того ж матеріалу, тобто має місце рівність $\rho = \rho_a = \rho_g = \rho_H$, тоді формулу (6) можна переписати до вигляду

$$\begin{aligned} J_{np}^a &= \frac{\pi \rho}{32} \left\{ b_a d_a^4 + k \left[b_g d_g^4 \frac{1}{(u-2)^2} + \right. \right. \\ &\left. \left. + 8 b_g d_g^2 \frac{d_a^2}{16} \right] + n_H b_a d_a^4 \frac{u^2}{16} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Перетворимо формулу (7) до вигляду

$$\begin{aligned} J_{np}^a &= \frac{\pi \rho}{32} b_a d_a^4 \left\{ 1 + k \left[\frac{b_g d_g^4}{b_a d_a^4} \frac{1}{(u-2)^2} + \right. \right. \\ &\left. \left. + 8 \frac{b_g d_g^2}{b_a d_a^2} \frac{1}{16} \right] + n_H \frac{u^2}{16} \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Якщо ширина зубчастих вінців зубчастих коліс простого планетарного механізму типу \overline{AI} виконана однаковою $b = b_a = b_g = b_b$, тоді формула (8) набере вигляду

$$J_{np}^a = \frac{\pi\rho}{32} b d_a^4 \left(1 + k \frac{3}{16} (u-2)^2 + n_H \frac{u^2}{16} \right). \quad (9)$$

При виведенні формули (9) враховано співвідношення $\frac{d_g}{d_a} = \frac{u-2}{2}$.

З умови контактної міцності зовнішнього зачеплення $Z_a - Z_g$ простого планетарного механізму типу \overline{AI} маємо співвідношення

$$b_a d_d^2 \geq \frac{0,7 M_a \Omega_H (K_{H\beta} K_{H\nu} Z_E) u}{k \cos^2(\alpha) t g(\alpha_w) \sigma_{HP}^2 (u-2)}, \quad (10)$$

де M_a – крутний момент, прикладений до сонячного колеса Z_a .

Позначення неперерахованих параметрів у формулі (10) такі ж, як прийнято у ГОСТ 21354-87 і в роботі [12].

Враховуючи (10), можемо записати

$$\begin{aligned} \frac{\pi\rho}{32} b_a d_d^4 &= \frac{\pi\rho}{32 b_a} (b_a d_d^2)^2 = \\ &= D_H \frac{u^2}{k^2 (u-2)^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

де D_H – коефіцієнт інерції при контактній міцності. Коефіцієнт інерції D_H обчислюють за формулою

$$D_H = \frac{\pi\rho}{32 b_a} \left[\frac{0,7 M_a \Omega_H (K_{H\beta} K_{H\nu} Z_E)}{\cos^2(\alpha) t g(\alpha_w) \sigma_{HP}^2} \right]^2. \quad (12)$$

Підставивши співвідношення (11) у формулу (9), отримаємо

$$\begin{aligned} J_{Hnp}^a &= D_H \frac{u^2}{k^2 (u-2)^2} \left[1 + k \frac{3}{16} (u-2)^2 + \right. \\ &\left. + n_H \frac{u^2}{16} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Формулу (13) можна подати у вигляді

$$J_{Hnp}^a = D_H \overline{J_H^a}, \quad (14)$$

де $\overline{J_H^a} = \frac{J_{Hnp}^a}{D_H}$ – аналог приведенного до валу

центрального зубчастого колеса Z_a моменту інерції механізму при розрахунку на контактну міцність.

Аналог приведенного до валу центрального зубчастого колеса Z_a моменту інерції простого планетарного механізму типу \overline{AI} при розрахунку на контактну міцність визначається за формулою

$$\begin{aligned} \overline{J_H^a} &= \frac{u^2}{k^2 (u-2)^2} \left[1 + k \frac{3}{16} (u-2)^2 + \right. \\ &\left. + n_H \frac{u^2}{16} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

З умови згинальної міцності зовнішнього зачеплення $Z_a - Z_g$ простого планетарного механізму типу \overline{AI} маємо співвідношення

$$b_a d_d^2 \geq \frac{2 M_a \Omega_F (K_{F\beta} K_{F\nu}) Y_{FS} Z_a}{k \sigma_{FP}}. \quad (16)$$

Позначення неперерахованих параметрів у формулі (16) такі ж, як прийнято у ГОСТ 21354-87 і в роботі [12].

З урахуванням (16), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\pi\rho}{32} b_a d_d^4 &= \frac{\pi\rho}{32 b_a} (b_a d_d^2)^2 = \\ &= D_F \frac{1}{k^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

де D_F – коефіцієнт інерції при згинальній міцності. Коефіцієнт інерції D_F обчислюють за формулою

$$D_F = \frac{\pi\rho}{32 b_a} \left[\frac{2 M_a \Omega_F (K_{F\beta} K_{F\nu}) Y_{FS} Z_a}{\sigma_{FP}} \right]^2. \quad (18)$$

Підставивши співвідношення (17) у формулу (9), отримаємо

$$J_{Fnp}^a = D_F \frac{1}{k^2} \left[1 + k \frac{3}{16} (u-2)^2 + n_H \frac{u^2}{16} \right]. \quad (19)$$

Формулу (19) можна подати у вигляді

$$J_{Fnp}^a = D_F \overline{J_F^a}, \quad (20)$$

де $\overline{J_F^a} = \frac{J_{Fnp}^a}{D_F}$ – аналог приведенного до валу центрального зубчастого колеса Z_a моменту інерції механізму при розрахунку на згинальну міцність.

Аналог приведенного до валу центрального зубчастого колеса Z_a моменту інерції простого планетарного механізму типу \overline{AI} при розрахунку на згинальну міцність визначається за формулою

$$\overline{J_F^a} = \frac{1}{k^2} \left[1 + k \frac{3}{16} (u-2)^2 + n_H \frac{u^2}{16} \right]. \quad (21)$$

Вигляд функціональної залежності приведенного моменту інерції $\overline{J_H^a}$ від значення передаточного відношення механізму u при фіксованих значеннях па-

раметрів k і n_H показаний на рис. 2.

Аналіз графіків, зображених на рис. 2, демонструє наявність мінімуму функції виду (15) і прагнення збільшення значення функції при $u \rightarrow 2$. Дійсно, з формули (15) виходить наявність розриву функції при $u = 2$.

Оптимальне значення передаточного відношення, при якому значення функції аналога приведенного моменту інерції виду (15) буде мінімальним, можна знаходити різними методами (графічними, аналітичними і чисельними).

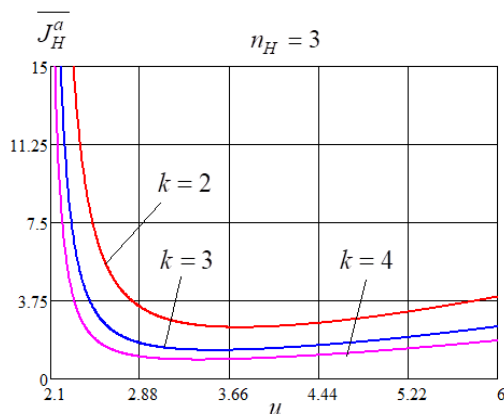


Рисунок 2 – Графік функції $\overline{J}_H^a = \overline{J}_H^a(u)$

Вираз (15) матиме мінімальне значення за умови $\frac{\partial \overline{J}_H^a(u, k, n_H)}{\partial u} = 0$. Знайшовши цю похідну, отримаємо наступне рівняння

$$3ku(u-2)^3 - 32ku = 0. \quad (22)$$

Рівняння (22) має чотири корені. Два дійсних і два комплексних. Один із дійсних коренів дорівнює нулю, інший знаходиться за формулою

$$u_{opt} = 2 + \sqrt[3]{\frac{32}{3k}}. \quad (23)$$

Отже, з формули (23) виходить, що значення оптимального передаточного відношення u_{opt} простого планетарного механізму типу \overline{AI} , при якому його приведений момент інерції J_{Hnp}^a буде мінімальним, не залежить від параметра n_H , а визначається тільки значенням параметра k . Для залежностей, графіки яких показані на рис. 2, маємо наступні значення оптимального передаточного відношення u_{opt} : 3,7472 ($k=2$); 3,5263 ($k=3$); 3,3867 ($k=4$).

Вигляд функціональної залежності приведенного моменту інерції \overline{J}_F^a від значення передаточного відношення механізму u при фіксованих значеннях параметрів k і n_H показаний на рис. 3.

Аналіз графіків, зображених на рис. 3, показує наявність мінімуму функції виду (21). При цьому цей мінімум відповідає значенню передаточного

відношення $u = 2$, яке однакове для усіх графіків.

Дійсно, якщо знайти похідну $\frac{\partial \overline{J}_F^a(u, k, n_H)}{\partial u}$ і прирівняти її нулю, то отримаємо наступне рівняння

$$\frac{3(u-2)}{8k} = 0. \quad (24)$$

Рівняння (24) має один дійсний корінь $u_{opt} = 2$.

Отже, з формули (24) виходить, що значення оптимального передаточного відношення u_{opt} простого планетарного механізму типу \overline{AI} , при якому його приведений момент інерції J_{Fnp}^a буде мінімальним, не залежить від параметра n_H , а визначається тільки значенням параметра k .

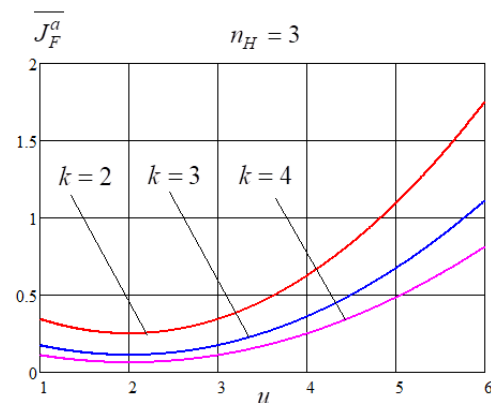


Рисунок 3 – Графік функції $\overline{J}_F^a = \overline{J}_F^a(u)$

Для кінематичних механізмів, для яких контактна і згинальна міцності зубців не є визначальними, функція приведенного моменту інерції (9) може бути подана у вигляді

$$J_{np}^a = D \overline{J}^a, \quad (25)$$

де $\overline{J}^a = \frac{J_{np}^a}{D}$ – аналог приведенного до валу центрального зубчастого колеса Z_a моменту інерції механізму;

$$D = \frac{\pi \rho}{32} b d_a^4 \text{ – коефіцієнт інерції (масштабу).}$$

Аналог приведенного до валу центрального зубчастого колеса Z_a моменту інерції простого планетарного механізму типу \overline{AI} , параметри конструкції якого вибрані за конструктивними і технологічними вимогами (кінематичні механізми), визначається за наступною формулою

$$\overline{J}^a = 1 + k \frac{3}{16} (u-2)^2 + n_H \frac{u^2}{16}. \quad (26)$$

Вигляд функціональної залежності приведенного моменту $\overline{J}^a = \overline{J}^a(u)$ від значення передаточного від-

ношення механізму u при фіксованих значеннях параметрів k і n_H показаний на рис. 4.

Аналіз графіків, зображених на рис. 4, показує наявність мінімуму функції виду (26). При цьому цей мінімум відповідає значенню передаточного відношення $u = 2$, яке однакове для усіх графіків.

Мінімальне значення аналога приведенного моменту інерції \overline{J}^a , рівне 1, не залежить від значень параметрів k і n_H . Дійсно, якщо знайти похідну $\frac{\partial}{\partial u} \overline{J}^a(u, k, n_H)$ і прирівняти її нулю, то отримаємо наступне рівняння

$$\frac{3k(2u-4)}{16} = 0 \Rightarrow 2u - 4 = 0. \quad (27)$$

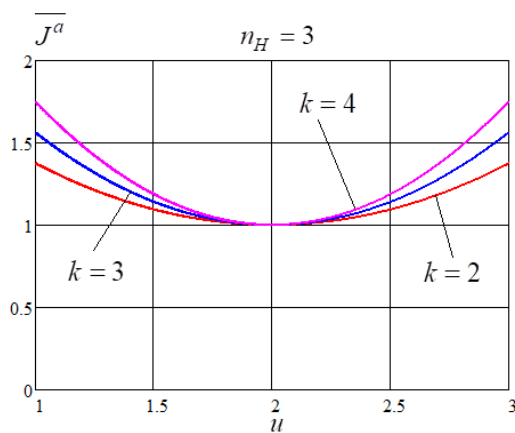


Рисунок 4 – Графік функції $\overline{J}^a = \overline{J}^a(u)$

Рівняння (27) має один дійсний корінь $u_{opt} = 2$.

Розглянемо моделювання інерційності простого планетарного механізму типу $\overline{A1}$, у якого загальмовано водило H , а усі зубчасті колеса є рухомими. Для цього механізму його кінетична енергія (4) буде визначатися за формулою

$$T_{mex} = T_a + kT_g + T_b = \frac{J_a \omega_a^2}{2} + k \frac{J_g \omega_g^2}{2} + \frac{J_b \omega_b^2}{2}, \quad (28)$$

де J_b , ω_b – відповідно, момент інерції відносно власної осі і кутова швидкість центрального зубчастого колеса Z_b .

Зробивши викладення, які були використані вище, можна отримати вираз для визначення наступних приведених моментів інерції досліджуваного простого планетарного механізму типу $\overline{A1}$.

Аналог приведенного до валу центрального зубчастого колеса Z_a моменту інерції простого планетарного механізму типу $\overline{A1}$ при розрахунку на контактну міцність виду (15) буде визначатися за формулою

$$\overline{J}_H^a = \frac{u^2}{k^2(u-2)^2} \left[1 + k \frac{(u-2)^2}{4} + (u-1)^2 \right]. \quad (29)$$

Аналог приведенного до валу центрального зубчастого колеса Z_a моменту інерції простого планетарного механізму типу $\overline{A1}$ при розрахунку на згинальну міцність виду (21) буде визначатися за формулою

$$\overline{J}_F^a = \frac{1}{k^2} \left[1 + k \frac{(u-2)^2}{4} + (u-1)^2 \right]. \quad (30)$$

Зауважимо, що при виведенні формул (29) і (30) було прийнято допущення, що в простому планетарному механізмі типу $\overline{A1}$ його розміри визначаються міцністю зовнішнього зачеплення $Z_a - Z_g$, а внутрішнє зачеплення $Z_g - Z_b$ недовантажено.

Аналог приведенного до валу центрального зубчастого колеса Z_a моменту інерції простого планетарного механізму типу $\overline{A1}$, параметри конструкції якого вибрані за конструктивними і технологічними вимогами, виду (26) буде визначатися за наступною формулою

$$\overline{J}^a = 1 + k \frac{(u-2)^2}{4} + (u-1)^2. \quad (31)$$

Якщо побудувати графіки функціональної залежності виду (29), то вони будуть схожі на графіки, показані на рис. 2. Проте положення їх мінімумів визначають шляхом розв'язання наступного рівняння

$$u \left[(k+4)u^3 - (6k+20)u^2 + (12k+24)u - 8k - 16 \right] = 0. \quad (32)$$

Рівняння (32) має чотири корені. Два дійсних і два комплексних. Один із дійсних коренів дорівнює нулю. Інший знаходиться з розв'язання кубічного рівняння, яке в (32) знаходиться усередині квадратних дужок. Для залежностей виду (31) маємо наступні значення оптимального передаточного відношення u_{opt} : 3,4713 ($k = 2$); 3,4034 ($k = 3$); 3,3463 ($k = 4$).

Вигляд функціональної залежності (30) такий же самий, як у функції (21). Проте положення її мінімуму визначають шляхом розв'язання наступного рівняння

$$2k + 4 - (k+4)u = 0 \Rightarrow (k+4)u = 2k + 4. \quad (33)$$

Рівняння (33) має один дійсний корінь $u_{opt} = \frac{2k+4}{k+4}$.

Для залежностей вигляду (30) маємо наступні значення оптимального передаточного відношення

u_{opt} : 4/3 ($k = 2$); 10/7 ($k = 3$); 3/2 ($k = 4$).

Диференціальний механізм. Розглянемо моделювання інерційності диференціального механізму типу \overline{AI} , у якого його рухомі колеса і водило позначені відповідно як Z_a , Z_g , Z_b і H . Співвідношення між кутовими швидкостями зубчастих коліс та водила має вигляд

$$\begin{aligned} \omega_a &= u_{ab}^H \omega_b + u_{aH}^b \omega_H = \\ &= -p \omega_b + (1+p) \omega_H. \end{aligned} \quad (34)$$

З рівняння (34) видно, що з трьох кутових швидкостей тільки дві можуть бути незалежними, а третя – залежна.

Кінетична енергія диференціального механізму буде дорівнювати

$$\begin{aligned} T_{mex} &= T_a + kT_g + T_H + T_b = \frac{J_a \omega_a^2}{2} + \\ &+ k \left(\frac{J_g \omega_g^2}{2} + \frac{m_g V_{sg}^2}{2} \right) + \frac{J_H \omega_H^2}{2} + \frac{J_b \omega_b^2}{2}. \end{aligned}$$

Якщо незалежними величинами прийняти кутові швидкості сонячного колеса Z_a і водила H , то матимемо наступні приведені моменти інерції.

Приведений до валу центрального зубчастого колеса Z_a момент інерції механізму матиме вигляд

$$\begin{aligned} J_{np}^a &= J_a + k \left(\frac{J_g \omega_g^2}{\omega_a^2} + \frac{m_g V_{sg}^2}{\omega_a^2} \right) + \\ &+ \frac{J_H \omega_H^2}{\omega_a^2} + \frac{J_b \omega_b^2}{\omega_a^2}. \end{aligned} \quad (35)$$

Приведений до валу водила H момент інерції механізму матиме вигляд

$$\begin{aligned} J_{np}^H &= J_H + k \left(\frac{J_g \omega_g^2}{\omega_H^2} + \frac{m_g V_{sg}^2}{\omega_H^2} \right) + \\ &+ \frac{J_a \omega_a^2}{\omega_H^2} + \frac{J_b \omega_b^2}{\omega_H^2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Замкнутий планетарний механізм. Кінетична енергія замкнутого планетарного механізму буде дорівнювати

$$T_{mex} = T_{DM} + T_{KLZ}, \quad (37)$$

де T_{DM} , T_{KLZ} – відповідно кінетична енергія диференціального механізму та кінематичного ланцюга замикання.

Кінетична енергія диференціального механізму визначається за формулою

$$\begin{aligned} T_{DM} &= T_{a2} + k_2 T_{g2} + T_{H2} + T_{b2} = \\ &= \frac{J_{a2} \omega_{a2}^2}{2} + k_2 \left(\frac{J_{g2} \omega_{g2}^2}{2} + \frac{m_{g2} V_{sg2}^2}{2} \right) + \\ &+ \frac{J_{H2} \omega_{H2}^2}{2} + \frac{J_{b2} \omega_{b2}^2}{2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Кінетична енергія кінематичного ланцюга замикання визначається за формулою

$$\begin{aligned} T_{KLZ} &= T_{a1} + k_1 T_{g1} + T_{b1} = \\ &= \frac{J_{a1} \omega_{a1}^2}{2} + k_2 \frac{J_{g1} \omega_{g1}^2}{2} + \frac{J_{b1} \omega_{b1}^2}{2}. \end{aligned} \quad (39)$$

Приведений до валу центрального зубчастого колеса Z_{a2} (вал γ) момент інерції механізму матиме вигляд

$$J_{np}^\gamma = J_{DMnp}^\gamma + J_{KLZnp}^\gamma, \quad (40)$$

де J_{DMnp}^γ , J_{KLZnp}^γ – відповідно приведені моменти інерції диференціального механізму і кінематичного ланцюга замикання.

Приймаємо наступні допущення:

– усі ланки механізму виготовлені з одного і того ж матеріалу;

– розміри зубчастих коліс ДМ і КЦЗ визначаються міцністю їх зовнішніх зачеплень $Z_{a2} - Z_{g2}$ і $Z_{a1} - Z_{g1}$ відповідно;

– внутрішні зачеплення $Z_{g2} - Z_{b2}$ і $Z_{g1} - Z_{b1}$ недовантажені.

Приведений до валу центрального зубчастого колеса Z_{a2} момент інерції ДМ матиме вигляд

$$\begin{aligned} J_{DMnp}^\gamma &= J_{a2} + k_2 \left(\frac{J_{g2} \omega_{g2}^2}{\omega_{a2}^2} + \frac{m_{g2} V_{sg2}^2}{\omega_{a2}^2} \right) + \\ &+ \frac{J_{H2} \omega_{H2}^2}{\omega_{a2}^2} + \frac{J_{b2} \omega_{b2}^2}{\omega_{a2}^2}. \end{aligned} \quad (41)$$

Для кутових швидкостей зубчастих коліс ДМ маємо наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} \omega_{a2} &= \omega_\gamma = U_{\gamma\delta} \omega_\delta; \\ \omega_{H2} &= \omega_{a1} = -p_1 \omega_\delta = -p_1 \frac{\omega_\gamma}{U_{\gamma\delta}}; \\ \omega_{b2} &= \omega_{b1} = \omega_\delta; \\ \omega_{g2} &= \left[1 - \frac{2p_2(p_1+1)}{p_1(p_2-1)} \right] \omega_{H2} = \\ &= \left[1 - \frac{2p_2(p_1+1)}{p_1(p_2-1)} \right] (-p_1) \omega_\delta. \end{aligned} \quad (42)$$

З урахуванням формул (2) і (3) перепишемо вираз (41) до вигляду

$$J_{DMnp}^{\gamma} = \frac{\pi\rho}{32} b_{a2} d_{a2}^4 + k_2 \left(\frac{\pi\rho}{32} b_{g2} d_{g2}^4 \frac{\omega_{g2}^2}{\omega_{a2}^2} + \frac{\pi\rho}{32} 8b_{g2} d_{g2}^2 \frac{V_{sg2}^2}{\omega_{a2}^2} \right) + n_{H2} \frac{\pi\rho}{32} b_{a2} d_{a2}^4 \times \left(\frac{(p_2+1)^4}{16} \frac{\omega_{H2}^2}{\omega_{a2}^2} + \frac{\pi\rho}{32} b_{b2} d_{b2}^4 \frac{\omega_{b2}^2}{\omega_{a2}^2} \right). \quad (43)$$

У формулі (43) відношення квадратів швидкостей дорівнюють

$$\frac{\omega_{g2}^2}{\omega_{a2}^2} = \frac{(p_1 + p_1 p_2 + 2 p_2)^2}{(p_2 - 1)^2 U_{\gamma\delta}^2}; \quad \frac{\omega_{H2}^2}{\omega_{a2}^2} = \frac{p_1^2}{U_{\gamma\delta}^2}; \quad (44)$$

$$\frac{V_{sg2}^2}{\omega_{a2}^2} = \frac{d_{a2}^2 p_1^2 (p_2 + 1)^2}{16 U_{\gamma\delta}^2}; \quad \frac{\omega_{b2}^2}{\omega_{a2}^2} = \frac{1}{U_{\gamma\delta}^2}.$$

З урахуванням умови $b_{a2} = b_{g2} = b_{b2}$ (див. прийняті допущення) формула (43) набере вигляду

$$J_{DMnp}^{\gamma} = \frac{\pi\rho}{32} b_{a2} d_{a2}^4 \left\{ 1 + k_2 \left[\frac{d_{g2}^4}{d_{a2}^4} \times \frac{(p_1 + p_1 p_2 + 2 p_2)^2}{(p_2 - 1)^2 U_{\gamma\delta}^2} + \frac{d_{g2}^2 p_1^2 (p_2 + 1)^2}{4 d_{a2}^2 U_{\gamma\delta}^4} \right] + n_{H2} \left(\frac{(p_2 + 1)^4 p_1^2}{16 U_{\gamma\delta}^2} + \frac{d_{b2}^4}{d_{a2}^4} \frac{1}{U_{\gamma\delta}^2} \right) \right\} \quad (45)$$

Підставивши співвідношення

$$\frac{d_{g2}}{d_{a2}} = \frac{p_2 - 1}{2} \quad \text{і} \quad \frac{d_{b2}}{d_{a2}} = p_2$$

у формулу (44), отримаємо

$$J_{DMnp}^{\gamma} = \frac{\pi\rho}{32} b_{a2} d_{a2}^4 \left\{ 1 + k_2 \left[\frac{(p_2 - 1)^2}{16} \times \frac{(p_1 + p_1 p_2 + 2 p_2)^2}{U_{\gamma\delta}^2} + \frac{(p_2 - 1)^2 p_1^2}{4} \times \frac{(p_2 + 1)^2}{U_{\gamma\delta}^4} \right] + n_{H2} \left(\frac{(p_2 + 1)^4 p_1^2}{16 U_{\gamma\delta}^2} + \frac{p_2^4}{U_{\gamma\delta}^2} \right) \right\}. \quad (46)$$

Приведений до валу центрального зубчастого колеса Z_{a2} момент інерції КЛЗ матиме вигляд

$$J_{KL3np}^{\gamma} = \frac{J_{a1} \omega_{a1}^2}{\omega_{a2}^2} + k_1 \frac{J_{g1} \omega_{g1}^2}{\omega_{a2}^2} + \frac{J_{b1} \omega_{b1}^2}{\omega_{a2}^2}. \quad (47)$$

Для кутових швидкостей зубчастих коліс КЛЗ маємо наступні співвідношення:

$$\omega_{b1} = \omega_{\delta}; \quad \omega_{g1} = \frac{2p_1}{p_1 - 1} \omega_{\delta}. \quad (48)$$

З урахуванням формул (2), (3) і (48) перепишемо

вираз (47) до вигляду

$$J_{KL3np}^{\gamma} = \frac{\pi\rho}{32} b_{a1} d_{a1}^4 \frac{\omega_{a1}^2}{\omega_{a2}^2} + k_1 \frac{\pi\rho}{32} b_{g1} d_{g1}^4 \times \frac{\omega_{g1}^2}{\omega_{a2}^2} + \frac{\pi\rho}{32} b_{b1} d_{b1}^4 \frac{\omega_{b1}^2}{\omega_{a2}^2}. \quad (49)$$

У формулі (49) відношення квадратів швидкостей дорівнюють:

$$\frac{\omega_{a1}^2}{\omega_{a2}^2} = p_1^2 \frac{\omega_{\delta}^2}{\omega_{\gamma}^2} = \frac{p_1^2}{U_{\gamma\delta}^2};$$

$$\frac{\omega_{g1}^2}{\omega_{a2}^2} = \frac{4 p_1^2 \omega_{\delta}^2}{(p_1 - 1)^2 \omega_{\gamma}^2} = \frac{4 p_1^2}{(p_1 - 1)^2 U_{\gamma\delta}^2}; \quad (50)$$

$$\frac{\omega_{b1}^2}{\omega_{a2}^2} = \frac{1}{U_{\gamma\delta}^2}.$$

З урахуванням умови $b_{a1} = b_{g1} = b_{b1}$ (див. прийняті допущення), формула (49) набере вигляду

$$J_{KL3np}^{\gamma} = \frac{\pi\rho}{32} b_{a1} d_{a1}^4 \left\{ \frac{p_1^2}{U_{\gamma\delta}^2} + k_1 \left[\frac{d_{g1}^4}{d_{a1}^4} \times \frac{4 p_1^2}{(p_1 - 1)^2 U_{\gamma\delta}^2} + \frac{d_{b1}^4}{d_{a1}^4 U_{\gamma\delta}^2} \right] \right\}. \quad (51)$$

Підставивши співвідношення

$$\frac{d_{g1}}{d_{a1}} = \frac{p_1 - 1}{2} \quad \text{і} \quad \frac{d_{b1}}{d_{a1}} = p_1$$

у формулу (51), отримаємо наступний вираз

$$J_{KL3np}^{\gamma} = \frac{\pi\rho}{32} b_{a1} d_{a1}^4 \left\{ \frac{p_1^2}{U_{\gamma\delta}^2} + k_1 \frac{p_1^2}{4 U_{\gamma\delta}^2} \times (p_1 - 1)^2 + \frac{p_1^4}{U_{\gamma\delta}^2} \right\}. \quad (52)$$

Підставивши вирази (46) і (51) у (40), отримаємо наступний вираз

$$J_{np}^{\gamma} = \frac{\pi\rho}{32} b_{a2} d_{a2}^4 \left\{ 1 + k_2 \left[\frac{(p_2 - 1)^2}{16} \times \frac{(p_1 + p_1 p_2 + 2 p_2)^2}{U_{\gamma\delta}^2} + \frac{(p_2 - 1)^2 p_1^2}{4} \times \frac{(p_2 + 1)^2}{U_{\gamma\delta}^4} \right] + n_{H2} \left(\frac{(p_2 + 1)^4 p_1^2}{16 U_{\gamma\delta}^2} + \frac{p_2^4}{U_{\gamma\delta}^2} \right) \right\} + \frac{\pi\rho}{32} b_{a1} d_{a1}^4 \left\{ \frac{p_1^2}{U_{\gamma\delta}^2} + k_1 \frac{p_1^2}{4 U_{\gamma\delta}^2} \times (p_1 - 1)^2 + \frac{p_1^4}{U_{\gamma\delta}^2} \right\}. \quad (53)$$

Перетворимо вираз (53) до вигляду

$$J_{np}^{\gamma} = \frac{\pi\rho}{32} b_{a2} d_{a2}^4 \left\{ 1 + k_2 \left[\frac{(p_2 - 1)^2}{16} \times \frac{(p_1 + p_1 p_2 + 2 p_2)^2}{U_{\gamma\delta}^2} + \frac{(p_2 - 1)^2 p_1^2}{4} \times \frac{(p_2 + 1)^2}{U_{\gamma\delta}^4} \right] + n_{H2} \left[\frac{(p_2 + 1)^4 p_1^2}{16 U_{\gamma\delta}^2} + \frac{p_2^4}{U_{\gamma\delta}^2} + \frac{b_{a1} d_{a1}^4}{b_{a2} d_{a2}^4} \left[\frac{p_1^2}{U_{\gamma\delta}^2} + k_1 \frac{p_1^2}{4 U_{\gamma\delta}^2} (p_1 - 1)^2 + \frac{p_1^4}{U_{\gamma\delta}^2} \right] \right\}. \quad (54)$$

Замінимо у вираженні (54) кінематичні параметри p_1 і p_2 відповідними передаточними відношеннями u_1 і u_2 :

$$J_{np}^{\gamma} = \frac{\pi\rho}{32} b_{a2} d_{a2}^4 \left\{ 1 + k_2 \left[\frac{(u_2 - 2)^2}{16} \times \frac{(u_1 u_2 + u_2 - 2)^2}{U_{\gamma\delta}^2} + \frac{(u_2 - 2)^2 (u_1 - 1)^2}{4} \times \frac{u_2^2}{U_{\gamma\delta}^4} \right] + n_{H2} \left[\frac{u_2^4 (u_1 - 1)^2}{16 U_{\gamma\delta}^2} + \frac{(u_2 - 1)^4}{U_{\gamma\delta}^2} + \frac{b_{a1} d_{a1}^4}{b_{a2} d_{a2}^4} \left[\frac{(u_1 - 1)^2}{U_{\gamma\delta}^2} + k_1 \frac{(u_1 - 1)^2}{4 U_{\gamma\delta}^2} \times (u_1 - 2)^2 + \frac{(u_1 - 1)^4}{U_{\gamma\delta}^2} \right] \right\}, \quad (55)$$

де $u_1 = 1 + p_1$, $u_2 = 1 + p_2$ – відповідно передаточні відношення простих планетарних механізмів типу АІ.

З умови контактної міцності зовнішнього зачеплення $Z_{a2} - Z_{g2}$ замкнутого планетарного механізму скористаємося співвідношенням виду (10).

Враховуючи (10), можемо записати

$$\frac{\pi\rho}{32} b_{a2} d_{a2}^4 = \frac{\pi\rho}{32 b_{a2}} (b_{a2} d_{a2}^2)^2 = D_{H2} \frac{u_2^2}{k_2^2 (u_2 - 2)^2 U_{\gamma\delta}^2}. \quad (56)$$

Коефіцієнт інерції D_{H2} обчислюють за формулою

$$D_{H2} = \frac{\pi\rho}{32 b_{a2}} \left[\frac{0,7 M_{\delta} \Omega_{H2} (K_{H\beta} K_{H\gamma} Z_E)_2}{\cos^2(\alpha) \operatorname{tg}(\alpha_{w2}) \sigma_{HP2}^2} \right]^2. \quad (57)$$

Підставивши співвідношення (57) у формулу (55), отримаємо

$$J_{Hnp}^{\gamma} = D_{H2} \frac{u_2^2}{k_2^2 U_{\gamma\delta}^2 (u_2 - 1)^2} \times \left\{ E_2 + \frac{b_{a1} d_{a1}^4}{b_{a2} d_{a2}^4} E_1 \right\}, \quad (58)$$

де E_2 , E_1 – вирази, що відповідно відносяться до ДМ і КЛЗ у формулі (55).

Множник виразу E_1 у формулі (58) подамо у вигляді

$$\frac{b_{a1} d_{a1}^4}{b_{a2} d_{a2}^4} = \frac{(b_{a1} d_{a1}^2)^2 b_{a2}}{(b_{a2} d_{a2}^2)^2 b_{a1}} = \Pi_b \left[\frac{k_2 u_1 (u_2 - 1) \Omega_{H1} \Pi_H}{k_1 (u_1 - 1) \Omega_{H2}} \right]^2, \quad (59)$$

де Π_H – коефіцієнт, що характеризує відмінність у контактній міцності зовнішніх зачеплень $Z_{ai} - Z_{gi}$ [1];

$\Pi_b = \frac{b_{a2}}{b_{a1}}$ – коефіцієнт, що характеризує відмінність значень ширини зубчастих вінців сонячних коліс замкнутого планетарного механізму.

Числове значення коефіцієнта Π_b може бути як менше 1, так і більше. Значення $\Pi_b = 1$ зазвичай реалізується для кінематичних механізмів.

Формулу (58) можна подати у вигляді

$$J_{Hnp}^{\gamma} = D_{H2} \overline{J_H^{\gamma}}, \quad (60)$$

$\overline{J_H^{\gamma}} = \frac{J_{Hnp}^{\gamma}}{D_{H2}}$ – аналог приведенного до валу центрального зубчастого колеса Z_{a2} моменту інерції механізму при розрахунку на контактну міцність.

Аналог приведенного до валу центрального зубчастого колеса Z_{a2} (до валу γ) моменту інерції замкнутого планетарного механізму при розрахунку на контактну міцність визначається за формулою

$$\overline{J_H^{\gamma}} = \frac{u_2^2}{k_2^2 U_{\gamma\delta}^2 (u_2 - 2)^2} \times \left\{ E_2 + \Pi_b \left[\frac{k_2 u_1 (u_2 - 1) \Omega_{H1} \Pi_H}{k_1 (u_1 - 1) \Omega_{H2}} \right]^2 E_1 \right\}. \quad (61)$$

З умови згинальної міцності зовнішнього зачеплення $Z_{a2} - Z_{g2}$ замкнутого планетарного механізму скористаємося співвідношенням виду (16).

Враховуючи (16), можемо записати

$$\frac{\pi\rho}{32} b_{a2} d_{a2}^4 = \frac{\pi\rho}{32 b_{a2}} (b_{a2} d_{a2}^2)^2 = \frac{D_{F2}}{k_2^2 U_{\gamma\delta}^2}. \quad (62)$$

Коефіцієнт інерції D_{F2} обчислюють за формулою

$$D_{F2} = \frac{\pi\rho}{32b_{a2}} \left[\frac{2M_{\delta}\Omega_{F2} (K_{F\beta} K_{Fv})_2}{\sigma_{FP2}} \times \right. \\ \left. \times Y_{FS2} Z_{a2} \right]^2 \quad (63)$$

Підставивши співвідношення (63) у формулу (55), отримаємо

$$J_{Fnp}^{\gamma} = \frac{D_{F2}}{k_2^2 U_{\gamma\delta}^2} \left\{ E_2 + \frac{b_{a1} d_{a1}^4}{b_{a2} d_{a2}^4} E_1 \right\} \quad (64)$$

Множник виразу E_1 у формулі (64) подамо у вигляді

$$\frac{b_{a1} d_{a1}^4}{b_{a2} d_{a2}^4} = \frac{(b_{a1} d_{a1}^2)^2}{(b_{a2} d_{a2}^2)^2} \frac{b_{a2}}{b_{a1}} = \\ = \Pi_b \left[\frac{k_2 Z_{a1} \Omega_{F1}}{k_1 Z_{a2} \Omega_{F2}} \Pi_F \right]^2 u_2^2, \quad (65)$$

де Π_F – коефіцієнт, що характеризує відмінність у згинальній міцності зовнішніх зачеплень $Z_{ai} - Z_{gi}$ [1].

Формулу (64) можна подати у вигляді

$$J_{Fnp}^{\gamma} = D_{F2} \overline{J}_F^{\gamma}, \quad (66)$$

де $\overline{J}_F^{\gamma} = \frac{J_{Fnp}^{\gamma}}{D_{F2}}$ – аналог приведенного до валу центрального зубчастого колеса Z_{a2} моменту інерції механізму при розрахунку на згинальну міцність.

Аналог приведенного до валу центрального зубчастого колеса Z_{a2} (до валу γ) моменту інерції замкнутого планетарного механізму при розрахунку на згинальну міцність визначається за формулою

$$\overline{J}_F^{\gamma} = \frac{1}{k_2^2 U_{\gamma\delta}^2} \times \\ \times \left\{ E_2 + \Pi_b \left[\frac{k_2 Z_{a1} \Omega_{F1}}{k_1 Z_{a2} \Omega_{F2}} \Pi_F \right]^2 u_2^2 E_1 \right\} \quad (67)$$

Для кінематичних механізмів, для яких контактна і згинальна міцності зубців не є визначальними, функція приведенного моменту інерції (9) може бути подана у вигляді

$$J_{np}^{\gamma} = D J^{\gamma}, \quad (68)$$

де $J^{\gamma} = \frac{J_{np}^{\gamma}}{D}$ – аналог приведенного до валу центрального зубчастого колеса Z_{a2} моменту інерції меха-

нізму;

$$D = \frac{\pi\rho}{32} b d_{a2}^4 - \text{коефіцієнт інерції (масштабу)}.$$

Аналог приведенного до валу центрального зубчастого колеса Z_{a2} моменту інерції замкнутого планетарного механізму, параметри конструкції якого вибрані за конструктивними і технологічними вимогами (кінематичні механізми), визначається за наступною формулою

$$\overline{J}^{\gamma} = E_2 + \frac{d_{a1}^4}{d_{a2}^4} E_1. \quad (69)$$

Вигляд функціональної залежності аналога приведенного моменту інерції \overline{J}_H^{γ} від значення передаточного відношення u_2 при фіксованих значеннях параметрів цієї функції показаний на рис. 5. Графіки були побудовані при наступних значеннях параметрів функції: $U_{\gamma\delta} = -26,04$; $n_{H2} = 5$; $\Pi_H = 2$; $\Pi_b = 0,5$.

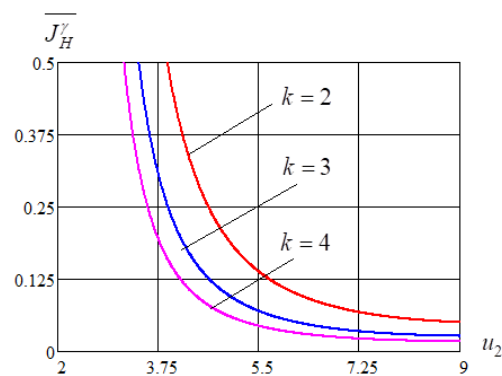


Рисунок 5 – Графік функції $\overline{J}_H^{\gamma} = \overline{J}_H^{\gamma}(u_2)$

Аналіз графіків, зображених на рис. 5, демонструє відсутність для кожної кривої явного мінімуму. Точка мінімуму функції аналога приведенного моменту інерції \overline{J}_H^{γ} для замкнутого планетарного механізму відповідає правій межі діапазону зміни можливих значень варійованого кінематичного параметра p_2 ($u_2 = p_2 + 1$), якщо ця межа не перевищує значення, рівне 8. У разі перевищення цього значення вказана точка може бути розташована усередині діапазону. Проте, на практиці звичайне значення кінематичного параметра p_2 вибирають із діапазону [2, 8].

Вигляд функціональної залежності аналога приведенного моменту інерції \overline{J}_F^{γ} від значення передаточного відношення u_2 при фіксованих значеннях параметрів цієї функції показаний на рис. 6. Графіки були побудовані при наступних значеннях параметрів функції: $U_{\gamma\delta} = -26,04$; $n_{H2} = 5$; $\Pi_z = 1$; $\Pi_F = 2$; $\Pi_b = 0,5$.

На рис. 6 штриховою лінією показано найменше значення функції \overline{J}_F^{γ} для параметра $k = 4$. Як видно з графіків, показаних на рис. 6, положення мінімального

значення функції \overline{J}_F^γ також наближене до правої межі діапазону зміни можливих значень варійованого кінематичного параметра u_2 .

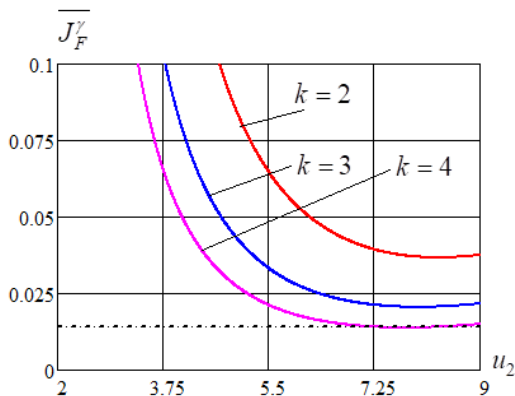


Рис. 6 – Графік функції $\overline{J}_F^\gamma = \overline{J}_F^\gamma(u_2)$

На рис. 7 показаний вигляд функціональної залежності аналога приведенного моменту інерції \overline{J}^λ від значення передаточного відношення u_2 для кінематичного замкнутого планетарного механізму. Графіки були побудовані при наступних значеннях параметрів функції: $U_{\gamma\delta} = -26,04$; $n_{H2} = 3$; $\Pi_{da} = 1$. Як видно з цих графіків, точка мінімуму функції \overline{J}^λ розташована усередині області можливих значень передаточного відношення u_2 . Зі збільшенням числа сателітів k вказана точка зміщується у бік лівої межі області можливих значень передаточного відношення u_2 , а саме значення функції \overline{J}^λ зростає. Для залежностей виду (67) маємо наступні значення оптимального передаточного відношення u_{2opt} : 5,371 ($k=2$); 5,236 ($k=3$); 5,148 ($k=4$).

Отже, залежність значення функції виду (68) від числа сателітів така ж, як і для функції вигляду (26).

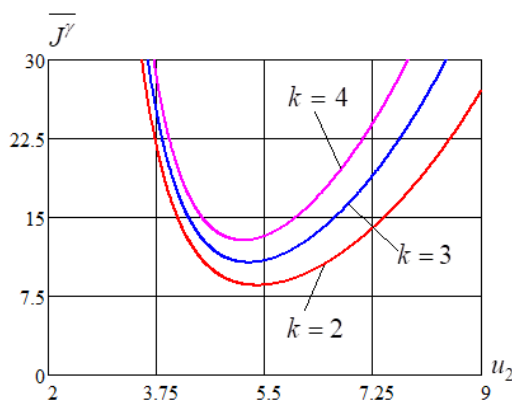


Рисунок 7 – Графік функції $\overline{J}^\lambda = \overline{J}^\lambda(u_2)$

Для усіх аналогів приведенного моменту інерції, розглянутих вище, зі збільшенням числа сателітів значення аналога зменшується. Зниження моменту інерції

води́ла і параметра n_{H2} у функції аналога приведенного моменту інерції призводить до її зменшення.

Висновки. Розроблена математична модель оцінки швидкодії замкнутого планетарного механізму, утвореного двома простими планетарними механізмами типу \overline{AI} , яка враховує їх структурні схеми і умови контактної та згинальної міцності зовнішніх зубчастих зачеплень сонячних коліс і сателітів. Модель є безрозмірною параметричною функцією (аналогом приведенного до вхідного валу момента інерції) двох змінних. Змінні є передаточними відношеннями простих планетарних механізмів типу \overline{AI} , визначені для структурних схем, коли у таких механізмів епіцикли нерухомі, а вхідними і вихідними ланками є відповідно сонячні колеса і води́ла. В якості параметрів моделі вибрані такі характеристики конструкцій простих планетарних механізмів типу \overline{AI} :

- числа сателітів;
- коефіцієнти приведення мас зубчастих коліс і води́ла;
- коефіцієнти, що характеризують відмінності у контактній та згинальній міцності зовнішніх зубчастих зачеплень сонячних коліс і сателітів;
- число зубців одного з сонячних коліс і коефіцієнт, що характеризує відмінність значень чисел зубців сонячних коліс;
- характеристики матеріалів зубчастих коліс механізмів.

Математичні моделі параметричних функцій приведенного до вхідного валу моменту інерції замкнутого планетарного механізму, утвореного двома простими планетарними механізмами типу \overline{AI} , були використані при їх проєктуванні для ряду авіаційних приводів.

Список літератури

1. Матусевич В. А., Шарабан Ю. В., Шехов А. В. Моделирование и анализ параметрической оптимизации массы замкнутого планетарного механизма, образованного двумя простыми планетарными механизмами Джеймса. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: *Машинознавство та САПР*. Харків, НТУ «ХПІ», 2021, №2. С. 56–70.
2. Ткаченко В. А. *Планетарные механизмы (оптимальное проектирование)*. Харьков: Нац. Аэрокосм. Ун-т «Харьк. Авиаци. Ин-т», 2003. 446 с.
3. Абрамов В. Т., Матусевич В. А., Шехов А. В. Оптимизация параметров планетарных механизмов по критерию быстродействия. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Тематичний випуск «Проблеми механічного приводу». Харків, НТУ «ХПІ», 2007, №21. С. 45-52.
4. Явтушенко А. В., Глебенко А. В., Васильченко Т. А., Видмих С. С. Динамическая модель планетарного привода кривошипных прессов. *Вісник КДПУ імені Михайла Остроградського*. Кременчук, 2009, №59. С. 44-47.
5. Bertucci A., Jacazio G., Sorli M. *Performance Study and Mathematical Model of Aerospace Geared Rotary Actuators* [Performance Study and Mathematical Model of Aerospace Geared Rotary Actuators]. – Режим доступу: https://www.ripublication.com/ijaer18/ijaerv13n1_25.pdf. – Дата звертання : 11 серпня 2019.
6. Matejic, M. S., Blagojevic M. Z., Matejic, M. M. *Dynamic behaviour of a planetary reducer with double planet gears* [Dynamic behaviour of a planetary reducer with double planet gears]. – Режим доступу : <https://scidar.kg.ac.rs/bitstream/123456789/13980/1/10.5194-ms-12-997-2021.pdf>. – Дата звертання : 20 січня 2022.
7. Jomartov A., Tuleshov A. *Modeling Dynamics of Planetary Gears*

- of Crank Press on SimulationX [Modeling Dynamics of Planetary Gears of Crank Press on SimulationX]. – Режим доступу : https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-03320-0_5. – Дата звертання : 15 травня 2019.
8. Ogawa A, Adachi K. *Theoretical Studies of Influence of the Configuration on the Function of Planetary Gear Inerter for Rotating Drivetrain* [Theoretical Studies of Influence of the Configuration on the Function of Planetary Gear Inerter for Rotating Drivetrain]. – Режим доступу : https://www.jstage.jst.go.jp/article/jsaeijae/9/2/9_20184088_pdf. – Дата звертання : 19 червня 2019.
 9. Nematov E, Khudjaev M, Khasanov B. *Development of a mathematical model of dynamic characteristics of a drive with a planetary mechanism* [Development of a mathematical model of dynamic characteristics of a drive with a planetary mechanism]. – Режим доступу : https://www.e3sconferences.org/articles/e3sconf/pdf/2021/34/e3sconf_uesf2021_08022.pdf. – Дата звертання : 1 лютого 2022.
 10. Filiza I. H., Olgunera S, Evyapanb E. *A Study on Optimization of Planetary Gear Trains* [A Study on Optimization of Planetary Gear Trains]. Режим доступу : <http://przyrbwn.icm.edu.pl/APP/PDF/132/app132z3p088.pdf>. – Дата звертання : 1 серпня 2018.
 11. Lin Xu, Kai Liu, Yahui Cui, Peiyuan Meng. *Dynamics Analysis of planetary Gear Train with Two Degrees of Freedom* [Dynamics Analysis of planetary Gear Train with Two Degrees of Freedom]. – Режим доступу : <https://download.atlantispress.com/article/25847353.pdf>. – Дата звертання : 1 травня 2018.
 12. Матусевич В. А., Шарабан Ю. В., Шехов А. В. Параметрическая оптимизация несущей способности замкнутого планетарного механизма, образованного двумя механизмами типа АІ. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Машинознавство та САПР*. Харків, НТУ «ХПІ», 2020, № 2. С. 66–77.
- References (transliterated)**
1. Matusевич V. A., Sharaban Ju. V., Shehov A. V. Modelirovaniye u analiz parametrycheskoj optymyzacyu massy zamknutogo planetarnogo mehanyzma, obrazovannogo dvumya prostymy planetarnymu mehanyzmy Dzhеjmsa [Modeling and analysis of parametric optimization of the mass of a closed planetary mechanism formed by two mechanisms of Dames]. *Visnyk Nacional'nogo tehničnogo universytetu «KhPI». Serija: Mashynoznavstvo ta SAPR*. Harkiv, NTU «KhPI» Publ., 2021, no. 2, pp. 56–70.
 2. Tkachenko V. A. *Planetarnye mekhanizmy (optimal'noe proektirovaniye)* [Planetary mechanisms (optimal design)]. Kharkov: National Aerospace University «Khark. Aviat. In-t», 2003. 446 p.
 3. Abramov V. T., Matusевич V. A., Shehov A. V. Optymyzacya parametrov planetarnykh mehanyzmov po kryteriyu bystrodeystviya [Optimization of parameters of planetary mechanisms on the criterion of speed]. *Visnyk Nacional'nogo tehničnogo universytetu «KhPI». Tematychnyj vypusk «Problemy mekhanichnogo pryvodu»* [Bulletin of the NTU «KhPI». Thematic issue Problem of mechanical drive]. Harkiv, NTU «KhPI» Publ., 2007, no. 21, pp. 45-52.
 4. Javtushenko A. V., Glebenko A. V., Vasylychenko T. A., Vydmych S. S. *Dynamycheskaja model' planetarnogo pryvoda kryvoshypnyh pressov* [Dynamic model of planetary drive of crank-type presses]. *Visnyk KDPU ineni Myhajla Ostrograds'kogo*. Kremenčuk, 2009, no. 59, pp. 44-47.
 5. Bertucci A., Jacazio G., Sorli M. *Performance Study and Mathematical Model of Aerospace Geared Rotary Actuators* [Performance Study and Mathematical Model of Aerospace Geared Rotary Actuators]. Available at: https://www.ripublication.com/ijaer18/ijaerv13n1_25.pdf. (accessed 11.08.2019).
 6. Matejic, M. S., Blagojevic M. Z., Matejic, M. M. *Dynamic behaviour of a planetary reducer with double planet gears* [Dynamic behaviour of a planetary reducer with double planet gears]. Available at: <https://scidar.kg.ac.rs/bitstream/123456789/13980/1/10.5194-ms-12-997-2021.pdf>. (accessed 20.01.2022).
 7. Jomartov A., Tuleshov A. *Modeling Dynamics of Planetary Gears of Crank Press on SimulationX* [Modeling Dynamics of Planetary Gears of Crank Press on SimulationX]. Available at: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-03320-0_5. (accessed 15.05.2019).
 8. Ogawa A, Adachi K. *Theoretical Studies of Influence of the Configuration on the Function of Planetary Gear Inerter for Rotating Drivetrain* [Theoretical Studies of Influence of the Configuration on the Function of Planetary Gear Inerter for Rotating Drivetrain]. Available at: https://www.jstage.jst.go.jp/article/jsaeijae/9/2/9_20184088_pdf. (accessed 19.06.2019).
 9. Nematov E, Khudjaev M, Khasanov B. *Development of a mathematical model of dynamic characteristics of a drive with a planetary mechanism* [Development of a mathematical model of dynamic characteristics of a drive with a planetary mechanism]. Available at: https://www.e3sconferences.org/articles/e3sconf/pdf/2021/34/e3sconf_uesf2021_08022.pdf. (accessed 01.02.2022).
 10. Filiza I. H., Olgunera S, Evyapanb E. *A Study on Optimization of Planetary Gear Trains* [A Study on Optimization of Planetary Gear Trains]. Available at: <https://przyrbwn.icm.edu.pl/APP/PDF/132/app132z3p088.pdf>. (accessed 01.08.2018).
 11. Lin Xu, Kai Liu, Yahui Cui, Peiyuan Meng. *Dynamics Analysis of planetary Gear Train with Two Degrees of Freedom* [Dynamics Analysis of planetary Gear Train with Two Degrees of Freedom]. Available at: <https://download.atlantispress.com/article/25847353.pdf>. (accessed 01.05.2018).
 12. Matusевич V. A., Sharaban Ju. V., Shehov A. V. *Parametrycheskaja optymyzacya nesushhej sposobnosti zamknutogo planetarnogo mehanyzma, obrazovannogo dvumya mehanyzmy tyipa АІ* [Parametric optimization of the bearing capacity of the closed planetary mechanism formed by two mechanisms of type АІ]. *Visnyk Nacional'nogo tehničnogo universytetu «KhPI». Serija: Mashynoznavstvo ta SAPR*. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2020, no. 2, pp. 66–67.

Надійшло (received) 07.07.2022

Відомості про авторів / About the Authors

Матусевич Володимир Анатолійович / Matusевич Vladimir – Державне підприємство «Харківське агрегатне конструкторське бюро», головний конструктор-директор, м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3108-9234>; e-mail: khabd_chief@ukr.net

Шарабан Юрій Володимирович / Sharaban Jurij – Державне підприємство «Харківське агрегатне конструкторське бюро», заступник головного конструктора, м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7295-0927>; e-mail: suv-kharkov@ukr.net

Шехов Олександр Володимирович / Shehov Aleksandr – Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», старший викладач кафедри теоретичної механіки, машинознавства і роботомеханічних систем, м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2312-0155>; e-mail: shav01@ukr.net