

*О. В. УСТИНЕНКО, С. В. ЧЕРЕЛЬОВ, М. БОШАНСКІ, Р. В. ПРОТАСОВ, О. В. БОНДАРЕНКО, Н. О. ЛЕВІН*

## ОПТИМАЛЬНЕ ПРОЄКТУВАННЯ ЕВОЛЬВЕНТНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПРЯМОЗУБЦЕВИХ ПЕРЕДАЧ З ПІДВИЩЕНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ ПЕРЕКРИТТЯ: ЦІЛЬОВА ФУНКЦІЯ, ЗМІННІ ПРОЄКТУВАННЯ ТА ОБМЕЖЕННЯ

Зниження маси та габаритів евольвентних циліндричних прямозубцевих передач є актуальною задачею сучасного машинобудування. Одним із перспективних шляхів її розв'язання є застосування зачеплення зі збільшеною робочою висотою зубців та коефіцієнтом торцевого перекриття  $\varepsilon_a \geq 2$ . Дослідження присвячено розробці методів оптимального проєктування саме таких передач. Критерій оптимальності сформульовано наступним чином: контактні напруження у полюсі зачеплення повинні приймати мінімально можливі значення при виконанні усіх конструктивних, геометро-кінематичних та технологічних обмежень, насамперед, при забезпеченні коефіцієнта торцевого перекриття  $\varepsilon_a \geq 2$ . Визначені змінні проєктування: коефіцієнти висоти головки зубців вихідних контурів шестерні та колеса  $h_{a1}^*, h_{a2}^*$ ; кут профілю вихідного контуру  $\alpha$ ; коефіцієнт зміщення вихідного контуру шестерні  $x_1$ . Сформовано систему обмежень на змінні проєктування: основне функціональне обмеження на мінімальну величину коефіцієнта торцевого перекриття –  $\varepsilon_a \geq 2$ ; обмеження на коефіцієнти висоти головки зубців вихідних контурів шестерні та колеса  $h_{a1}^*, h_{a2}^*$ ; обмеження на кут профілю вихідного контуру  $\alpha$ ; обмеження на значення коефіцієнтів зміщення вихідного контуру  $x_1, x_2$ ; відсутність підрізання ніжок зубців шестерні та колеса; відсутність загострення вершин зубців шестерні та колеса; відсутність інтерференції у зачепленні; умова забезпечення згинальної міцності зубців шестерні та колеса. Обрано метод розв'язання задачі оптимального проєктування. З усього різноманіття було обрано метод зондування простору параметрів проєктування. У якості пробних точок використовуються точки ЛПт-послідовності. Метод дає змогу оперувати значною кількістю параметрів – до 51, забезпечує достатньо велику кількість рівномірно-розподілених пробних точок – до  $2^{20}$ . У подальших дослідженнях планується розробити методики та алгоритми розв'язання задачі, а також провести тестові та перевіірочні розрахунки з метою підтвердження та оцінки отриманих теоретичних результатів.

**Ключові слова:** циліндрична прямозубцева передача, коефіцієнт торцевого перекриття, контактні напруження, оптимальне проєктування, цільова функція, змінні проєктування, обмеження на змінні проєктування

*O. USTYNYENKO, S. CHERELEV, M. BOŠANSKÝ, R. PROTASOV, O. BONDARENKO, N. LEVIN*

## OPTIMAL DESIGN OF INVOLUTE SPUR GEARS WITH INCREASED CONTACT RATIO: OBJECTIVE FUNCTION, VARIABLES PLANNING AND CONSTRAINTS

Reducing the mass and dimensions of involute spur gears is an actual task of modern mechanical engineering. One of the perspective ways to solve it is the use of gearing with an increased working tooth depth and profile contact ratio  $\varepsilon_a \geq 2$ . The study is devoted to the development of optimal design methods for such gears. Optimality criteria is formulated as follows: the contact stresses in the pitch point must take a minimum value when all constructive, geometric, kinematic, and technological constraints are met, first, when the profile contact ratio  $\varepsilon_a \geq 2$  is ensured. Variables planning are defined. These are addendum coefficients of the basic racks tooth for pinion and wheel  $h_{a1}^*, h_{a2}^*$ ; profile angle of the basic rack  $\alpha$ ; addendum modification coefficient of the pinion  $x_1$ . Formed a system of constraints for the variables planning: the main functional constraint of the minimum value of the profile contact ratio:  $\varepsilon_a \geq 2$ ; constraint for the addendum coefficients of the basic racks tooth for pinion and wheel  $h_{a1}^*, h_{a2}^*$ ; constraint for profile angle of the basic rack  $\alpha$ ; constraint for addendum modification coefficients  $x_1, x_2$ ; absence of the cutter interference for tooth dedendum; absence of the sharpening for tooth addendum; absence of the mesh interference; ensuring the bending strength of pinion and wheel teeth. A method for solving the problem of optimal design is chosen. The method of probing the space of design parameters was chosen from all the variety. The points of the LPt-sequence are used as test points. The method allows you to operate with a significant number of parameters – up to 51, provides a sufficiently large number of evenly distributed test points – up to  $2^{20}$ . In further studies, it is planned developing of methods and algorithms for solving the problem. Also carry out test and verification calculations to confirm and evaluate the theoretical results.

**Keywords:** spur gear, profile contact ratio, contact stress, optimal design, objective function, variables planning, constraints of the variables planning.

**Вступ. Актуальність задачі.** Поліпшення ма-согабаритних характеристик механічних приводів є однією з найбільш актуальних задач сучасного машинобудування, як вітчизняного, так і світового. Суттєву частину серед них займають циліндричні зубчасті передачі у вигляді редукторів загального призначення у складі трансмісій колісних та гусеничних машин, редукторів турбогвинтових авіаційних та газотурбінних корабельних двигунів тощо. Тому підвищення характеристик зубчастих передач, в першу чергу їх навантажувальної здатності, є актуальною науково-прикладною задачею сучасної науки.

Як загальновідомо [1], навантажувальна здатність закритої зубчастої передачі визначається насамперед рівнем контактних напружень у зачепленні. Традиційні евольвентні передачі, поряд із беззаперечними технологічними та експлуатаційними перевагами, мають два суттєвих недоліки, які не дозволяють значно знизити контактні напруження у зачепленні, а саме:

– двоопуклий контакт зубців, що підвищує рівень контактних напружень;

– безпосередня залежність між радіусом кривизни евольвентного профілю  $\rho$  та радіусом (габаритом) зубчастого колеса  $r$ . Тому збільшення радіусів кривизни спряжених профілів зубців, яке веде до зниження контактних напружень, спричиняє зростання розмірів та маси передачі.

**Аналіз існуючих досліджень.** На наш час існує декілька шляхів розв'язання цієї задачі. Серед них найбільш поширеним (виключаючи шляхи поліпшення властивостей та підвищення твердості поверхневого шару матеріалів) є застосування зачеплення з опукло-увігнутим контактом зубців.

Один з таких варіантів – передача Вільдгабера-Новікова [2], яка не є обкатною у профільному напрямку. Але поряд з перевагами вона має суттєвий недолік, а саме, її неможливо зробити прямозубцевою. Традиційні обкатні передачі з опукло-увігнутим контактом були запропоновані багатьма дослідни-

© О. В. Устиненко, С. В. Черельов, М. Бошанскі,  
Р. В. Протасов, О. В. Бондаренко, Н. О. Левін, 2022

ками. Це, наприклад, синусоїдальні передачі [3], еволютне зачеплення А. І. Павлова [4], С-С зачеплення М. Бошанські та М. Вереша [5].

Усі вищезгадані передачі забезпечують суттєве зниження контактних напружень, але мають і недоліки, серед яких виділимо найбільш суттєві:

1. Технологічні складності виготовлення ріжучого обкатного інструмента.

2. Висока чутливість роботи зачеплень до похибок міжосьової відстані. Іншими словами, усі ці передачі потребують суттєвого зменшення допусків на виготовлення базових отворів картерів, що веде до підвищення собівартості виробництва.

Але також існує інший шлях суттєвого підвищення навантажувальної здатності зубчастих передач за критерієм контактної міцності. Він базується на використанні традиційного евольвентного зачеплення, яке має геометричні параметри, що забезпечують сумарний коефіцієнт перекриття  $\varepsilon_\gamma$  більш, ніж 2 [6, 7]. У цьому випадку одна пара зубців передає лише частину потужності  $N$  (у чисто теоретичному ідеальному варіанті  $N/[\varepsilon_\gamma]$ , де  $[\varepsilon_\gamma]$  – ціла частина  $\varepsilon_\gamma$ ).

У косозубцевих та особливо у шевронних передачах це досягається в основному за рахунок осьового перекриття зубців з коефіцієнтом  $\varepsilon_\beta$ . Такі передачі мають вельми широке застосування. Наприклад, відомі серійні шевронні передачі у турбінобудуванні із сумарним коефіцієнтом перекриття  $\varepsilon_\gamma \approx 6$  [6].

У прямозубцевих передачах, які є основними, наприклад, для планетарних приводів, осьове перекриття зубців відсутнє. Для них з метою досягнення коефіцієнта торцевого перекриття  $\varepsilon_\alpha \geq 2$  рекомендують так зване НСР-зачеплення, у якому збільшують робочу висоту зубців шляхом застосування нестандартних вихідних контурів зі збільшеними коефіцієнтами висоти головки та ніжки [8–11], а також використовують зменшені кути профілю вихідного контуру, наприклад  $14,5^\circ$  [6].

**Постановка задачі.** Незважаючи на достатню кількість успішних досліджень геометрії, якісних характеристик і міцності прямозубцевих передач зі збільшеною робочою висотою зубців та коефіцієнтом торцевого перекриття  $\varepsilon_\alpha \geq 2$ , такі передачі та механічні приводи на їхній основі не набули значного поширення. Це пов'язано насамперед з трьома причинами:

1. Коефіцієнт торцевого перекриття  $\varepsilon_\alpha \geq 2$  в реальній передачі можливо реалізувати лише при високій точності обробки зубців, коли їхні пружні деформації під навантаженням переважають похибки кроку зачеплення [12].

2. Збільшення коефіцієнтів висоти головки та ніжки при одночасному зменшенні кута профілю вихідного контуру призводить до зростання рівня згинальних напружень у корені зубця.

3. Також збільшення коефіцієнтів висоти головки та ніжки при одночасному зменшенні кута профілю вихідного контуру суттєво підвищує ризик підрізання та інтерференції зубців у зачепленні. А зменшення кута профілю також призводить до деякого зростання рівня контактних напружень.

Що стосується першої причини, то сучасний рівень технології виготовлення зубчастих коліс дозво-

ляє забезпечити потрібну точність зубців. Для цього навіть не потрібні такі фінішні операції із високою собівартістю, як зубошліфування [6].

Друга причина не є вирішальною перешкодою для розповсюдження таких передач. Як було зазначено вище, основним фактором, що характеризує навантажувальну здатність, є рівень контактних напружень у зачепленні.

Третя причина є на наш час більш вагомим. Дійсно, під час вибору параметрів зачеплення, особливо, коли треба забезпечити  $\varepsilon_\alpha \geq 2$ , проєктувальник стикається зі складним та суперечливим процесом. Наприклад, ми забезпечили для конкретної передачі  $\varepsilon_\alpha \geq 2$  за рахунок тільки збільшення висоти зубців, але отримали інтерференцію у зачепленні. Дещо знизивши висоту зубця та зменшивши кут профілю вихідного контуру, досягнемо мети з геометричної точки зору. Але при цьому піднімається рівень контактних напружень, що зводить нанівець усі наші зусилля.

Вихід із цієї суперечливої ситуації автори бачать у визначенні основних геометричних параметрів зачеплення за допомогою методів математичної оптимізації. Варіюючи цими параметрами з урахуванням конструктивних, геометричних та технологічних обмежень, ми маємо можливість отримати евольвентну прямозубцеву передачу з мінімальними контактними напруженнями (мінімальні габарити та маса) при виконанні умови  $\varepsilon_\alpha \geq 2$ .

Таким чином, *метою дослідження* є розробка методів оптимального проєктування евольвентних циліндричних прямозубцевих передач за критерієм мінімальних контактних напружень при забезпеченні коефіцієнта торцевого перекриття  $\varepsilon_\alpha \geq 2$ , з урахуванням конструктивних, геометричних та технологічних обмежень.

Для досягнення зазначеної мети необхідно розв'язати наступні завдання:

1. Розробити математичну модель проєктування евольвентних циліндричних прямозубцевих передач, які забезпечують коефіцієнт торцевого перекриття  $\varepsilon_\alpha \geq 2$ , з оптимальними параметрами, а саме:

- побудувати цільову функцію за критерієм мінімальних контактних напружень;
- обрати змінні проєктування;
- сформуванати систему обмежень на змінні проєктування.

2. Обрати методи розв'язання задачі оптимального проєктування евольвентних циліндричних прямозубцевих передач з коефіцієнтом торцевого перекриття  $\varepsilon_\alpha \geq 2$ .

3. Розробити методики та алгоритми розв'язання задачі.

4. Провести тестові та перевірочні розрахунки з метою підтвердження та оцінки отриманих теоретичних результатів.

Очікуються наступні результати:

- наукові: математична модель та методи оптимального проєктування евольвентних циліндричних прямозубцевих передач за критерієм мінімальних контактних напружень при забезпеченні коефіцієнта торцевого перекриття  $\varepsilon_\alpha \geq 2$ ;
- практичні: прикладні методи та методики оптимізації, основні геометричні параметри зачеплень,

що оптимізовані.

Таким чином, метою цієї статті буде початкова постановка оптимізаційної задачі, а саме:

- побудова цільової функції за критерієм мінімальних контактних напружень у зачепленні;
- визначення змінних проектування;
- формування системи числових та функціональних обмежень на змінні проектування;
- обрання методу розв'язання задачі оптимального проектування.

**Побудова цільової функції за критерієм мінімальних контактних напружень у зачепленні.** Критерій оптимальності запропонуємо у наступному вигляді: контактні напруження у полюсі зачеплення повинні приймати мінімально можливі значення при виконанні усіх конструктивних, геометрокінематичних та технологічних обмежень, насамперед, при забезпеченні коефіцієнта торцевого перекриття  $\epsilon_\alpha \geq 2$ . Тоді запишемо цільову функцію у наступному вигляді:

$$F_\sigma = \sigma_H \rightarrow \min. \quad (1)$$

Розрахунок контактних напружень  $\sigma_H$ , МПа, виконуємо за відомою формулою Г. Герца [1, 6] для випадку початкового дотику пружних тіл по лінії. Врахуємо, що досліджуються передачі із коефіцієнтом торцевого перекриття  $\epsilon_\alpha \geq 2$ . Це означає, що у будь який момент часу має місце двопарне зачеплення, тобто теоретична сумарна довжина контактних ліній завжди не менш, ніж  $2b_w$ , де  $b_w$  – робоча ширина зубчастого вінця. Тоді маємо:

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{F_n K_{H\alpha} E_H}{b_w \rho_H [\epsilon_\alpha]}}. \quad (2)$$

У залежності (2):

$F_n$  – нормальне зусилля у зачепленні;

$K_{H\alpha}$  – коефіцієнт, що враховує розподілення навантаження між зубцями. Зазвичай, згідно стандартних методик [13, 14], для прямозубцевих передач приймають  $K_{H\alpha} = 1$ , але при  $\epsilon_\alpha \geq 2$  виникає необхідність врахувати нерівномірність навантаження двох пар зубців;

$E_H$  – приведений модуль пружності матеріалу,

$$E_H = 2 \frac{E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2}, \quad (3)$$

де  $E_1, E_2$  – модулі пружності матеріалів шестерні та колеса;

$[\epsilon_\alpha]$  – ціла частина  $\epsilon_\alpha$ ;

$\rho_H$  – приведений радіус кривизни,

$$\rho_H = \frac{\rho_{w1} \cdot \rho_{w2}}{\rho_{w1} + \rho_{w2}}, \quad (4)$$

де  $\rho_{w1}, \rho_{w2}$  – радіуси кривизни профілів зубців шестерні та колеса в полюсі зачеплення.

Радіуси кривизни  $\rho_{w1}, \rho_{w2}$  будемо визначати за допомогою відомої формули для евольвенти [1]

$$\rho_{w1,2} = 0,5d_{w1,2} \sin(\alpha_w). \quad (5)$$

У залежності (5):

$\alpha_w$  – кут зачеплення в полюсі, визначається з основного рівняння евольвентного зачеплення [15],

$$\operatorname{inv} \alpha_w = 2 \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{inv} \alpha, \quad (6)$$

де  $x_{1,2}$  – коефіцієнти зміщення вихідного контуру шестерні та колеса;

$z_{1,2}$  – числа зубців шестерні та колеса;

$\alpha$  – кут профілю вихідного контуру (рис. 1);

$d_{w1,2}$  – початкові діаметри шестерні та колеса,

$$d_{w1,2} = mz_{1,2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}, \quad (7)$$

де  $m$  – модуль зачеплення.

Коефіцієнт торцевого перекриття  $\epsilon_\alpha$  визначається за залежністю [15]

$$\epsilon_\alpha = \frac{z_1 (\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w) + z_2 (\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w)}{2\pi}, \quad (8)$$

де  $\alpha_{a1,2}$  – кути профілю на вершинах зубців шестерні та колеса,

$$\alpha_{a1,2} = \arccos \left( \frac{d_{b1,2}}{d_{a1,2}} \right). \quad (9)$$

У залежності (9):

$d_{b1,2}$  – основні діаметри шестерні та колеса

$$d_{b1,2} = m z_{1,2} \cos \alpha; \quad (10)$$

$d_{a1,2}$  – діаметри вершин зубців шестерні та колеса

$$d_{a1,2} = m z_{1,2} + 2(h_{a1,2}^* + x_{1,2} - \Delta y)m, \quad (11)$$

де  $h_{a1,2}^*$  – коефіцієнти висоти головки зубців вихідних контурів шестерні та колеса (рис. 1);

$\Delta y$  – коефіцієнт зрівняльного зміщення,

$$\Delta y = x_1 + x_2 - 0,5(z_1 + z_2) \left( \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} - 1 \right). \quad (12)$$

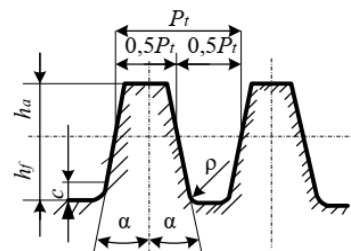


Рисунок 1 – Схема вихідного контуру

Зауважимо, що, на відміну від традиційних евольвентних передач, у тому числі зі стандартним вихідним контуром, де прийняті однакові коефіцієнти висоти головки зубців шестерні та колеса ( $h_{a1}^* = h_{a2}^* = h_a^*$ ), будемо використовувати так зване різне контурне зачеплення, для якого  $h_{a1}^* \neq h_{a2}^*$ . У цьому випадку, як було обґрунтовано у роботі [11], можливо досягнення більших значень  $\epsilon_\alpha$ .

Таким чином, рівняння (1)...(12) складають математичну модель оптимізації евольвентних циліндричних прямозубцевих передач за критерієм мінімальних контактних напружень у зачепленні, при забезпеченні коефіцієнта торцевого перекриття  $\varepsilon_\alpha \geq 2$ .

**Визначення змінних проектування.** У якості змінних проектування оберемо ті геометричні параметри евольвентного зачеплення які безпосередньо впливають на величину коефіцієнта торцевого перекриття  $\varepsilon_\alpha$  [16].

По-перше, це висоти зубців шестерні та колеса  $h_1$  та  $h_2$ . З метою узагальнення розрахунків і результатів будемо виконувати моделювання з використанням коефіцієнтів висоти головки зубців шестерні та колеса  $h_{a1}^*$ ,  $h_{a2}^*$ , як прийнято у традиційних розрахунках геометрії зубчастих зачеплень.

По-друге, значення кута профілю вихідного контуру  $\alpha$ . Відомо, що при його зменшенні  $\varepsilon_\alpha$  зростає. Але при зменшенні  $\alpha$  зростає величина контактних напружень  $\sigma_H$  у евольвентному зачепленні, це пов'язано із зменшенням приведенного радіусу кривизни. Таким чином, ми маємо неоднозначність впливу величини кута  $\alpha$  на рівень контактних напружень  $\sigma_H$  для передач з  $\varepsilon_\alpha \geq 2$ .

По-третє, при зростанні сумарного коефіцієнта зміщення вихідного контуру  $x_\Sigma = x_1 + x_2$  коефіцієнт торцевого перекриття  $\varepsilon_\alpha$  дещо зменшується. А у випадку, коли  $h_{a1}^* \neq h_{a2}^*$ , на величину  $\varepsilon_\alpha$  може впливати не тільки  $x_\Sigma$ , але й  $x_1$  та  $x_2$  окремо.

Прийmemo для подальших досліджень, що оптимальному проектуванню підлягають зубчасті передачі з наперед призначеними геометричними характеристиками. А саме, нам відомі модуль зачеплення  $m$ ; числа зубців шестерні та колеса  $z_{1,2}$ ; міжосьова відстань передачі  $a_w$ ; робоча ширина зубчастого вінця  $b_w$ . У цьому випадку ми маємо однозначну величину сумарного коефіцієнта зміщення вихідного контуру  $x_\Sigma$ . Тому зручно аналізувати вплив на величину  $\varepsilon_\alpha$  тільки одного коефіцієнта зміщення, наприклад,  $x_1$ .

Виходячи з цього, обираємо у якості змінних проектування для нашої цільової функції (1) наступні параметри:

**1, 2.** Коефіцієнти висоти головки зубців вихідних контурів шестерні та колеса  $h_{a1}^*$ ,  $h_{a2}^*$ .

**3.** Кут профілю вихідного контуру  $\alpha$ .

**4.** Коефіцієнт зміщення вихідного контуру шестерні  $x_1$ .

**Формування системи числових та функціональних обмежень на змінні проектування.** Обмеження повинні враховувати конструктивні, геометро-кінематичні та технологічні характеристики зубчастого зачеплення. Обмеження вводяться у вигляді рівностей та нерівностей, при цьому змінні проектування можуть бути обмежені як числовими значеннями, так і деякими функціями [17]. Також можуть бути накладені обмеження на деякі співвідношення між змінними проектування.

У нашому випадку маємо наступну систему обмежень.

1. Основне функціональне обмеження на мінімальну величину коефіцієнта торцевого перекриття:

$\varepsilon_\alpha \geq 2$ .

2. Коефіцієнти висоти головки зубців вихідного контуру шестерні та колеса  $h_{a1}^*$ ,  $h_{a2}^*$  обмежуються відповідними числовими діапазонами:  $h_{a1\min}^* \leq h_{a1}^* \leq h_{a1\max}^*$ ;  $h_{a2\min}^* \leq h_{a2}^* \leq h_{a2\max}^*$ .

3. Кут профілю вихідного контуру  $\alpha$  обмежується числовим діапазоном  $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$ , де  $\alpha_{\min}$  визначається із умови відсутності заклинювання передачі,  $\alpha_{\min} \geq (1,1 \dots 1,2) \operatorname{tg} f$  ( $f$  – коефіцієнт тертя ковзання у зачепленні);  $\alpha_{\max}$  призначається у межах  $22 \dots 25^\circ$ , виходячи із досвіду проектування евольвентних зачеплень [6].

4. Коефіцієнти зміщення вихідного контуру  $x_1$ ,  $x_2$  шестерні та колеса обмежуються відповідними числовими діапазонами:  $x_{1\min} \leq x_1 \leq x_{1\max}$ ;  $x_{2\min} \leq x_2 \leq x_{2\max}$ , де  $x_{1\min}$ ,  $x_{2\min}$  визначаються із умови відсутності підрізання ніжок зубців;  $x_{1\max}$ ,  $x_{2\max}$  визначаються із умови відсутності загострення вершин зубців.

5. Умова відсутності підрізання ніжок зубців шестерні та колеса.

6. Умова відсутності загострення вершин зубців шестерні та колеса.

7. Умова відсутності інтерференції у зачепленні.

8. Умова забезпечення згинальної міцності зубців шестерні та колеса:  $\sigma_{F1,2} \leq \sigma_{FP1,2}$ , де  $\sigma_{F1,2}$  та  $\sigma_{FP1,2}$  – відповідно, розрахункові та допустимі згинальні напруження.

**Обрання методу розв'язання задачі оптимального проектування.** На сьогоднішній день існує достатня кількість різних методів розв'язання оптимізаційних задач [17]. З усього різноманіття було обрано метод, який добре себе зарекомендував у процесі оптимізації тривальних коробок передач, трансмісій та редукторів [18, 19], а саме, зондування простору параметрів, де у якості пробних точок в одиничному багатомірному кубі використовуються точки ЛПт-последовності [20]. Метод дає змогу оперувати значною кількістю параметрів (до 51) та забезпечує достатньо велику кількість рівномірно-розподілених пробних точок (до  $2^{20}$ ).

Також досить вагомим аргументом є те, що ЛПт-последовності – це найкращі серед відомих у наш час рівномірно розподілених последовностей [20].

Скористуємося основними положеннями та розрахунковими залежностями [20] щодо рівномірно розподілених последовностей.

Якщо точки  $Q_i$  з декартовими координатами  $(q_{i,1}, \dots, q_{i,n})$  є рівномірно розподіленою последовністю в  $K^n$  (одиничний  $n$ -вимірний куб), то точки  $A_i$  з декартовими координатами  $(\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n})$ , де при  $j = 1, 2, \dots, n$  ( $j$  – порядковий номер змінної проектування,  $n$  – кількість змінних проектування),

$$\alpha_{i,j} = a_j + (b_j - a_j) q_{i,j} \quad (13)$$

є рівномірно розподіленою последовністю в паралелепіпеді  $\Pi$  ( $n$ -вимірний паралелепіпед), що складається з точок  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , координати яких задовольняють нерівностям  $a_j \leq \alpha_j \leq b_j$ .

Декартові координати  $q_{i,j}$  для ЛПт-последовності зазвичай обчислюються за арифметичним алгорит-

мом. Цей алгоритм базується безпосередньо на розрахунках за спеціальною таблицею чисельників  $r_j^{(l)}$ . За заданим номером точки  $i$  спочатку обчислюємо допоміжну величину  $m$ , а потім для кожного  $j$ -го параметру обчислюємо координату  $q_{i,j}$ ,

$$m = 1 + \left[ \frac{\ln i}{\ln 2} \right];$$

$$q_{i,j} = \sum_{k=1}^m 2^{-k+1} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{l=k}^m \left[ 2 \{i^{-l}\} \right] \cdot \left[ 2 \{r_j^{(l)} 2^{k-l-1}\} \right] \right\}, \quad (14)$$

де  $[X]$  – ціла частина деякого числа  $X$ ;  
 $\{X\}$  – дробова частина того ж числа.

Таким чином, розв'язання задачі оптимального проектування методом ЛПт-пошуку складається з наступних етапів.

1. Завдання вхідних даних, у тому числі обмежень на змінні проектування.
2. Генерування декартових координат  $q_{i,j}$  за залежністю (14).
3. Генерування значень змінних проектування  $a_{i,j}$  згідно залежності (13). Тут  $i = 1, 2, \dots, 2^{20}$  – номер пробної точки;  $j = 1, 2, 3, 4$  – порядковий номер змінної проектування;  $a_j, b_j$  – відповідно мінімальні та максимальні значення обмежень на змінні проектування.
4. Перевірка обмежень на змінні проектування.
5. Складання масиву можливих варіантів.
6. Пошук мінімального значення шляхом сортування масиву.

Таким чином, математичний апарат ЛПт-пошуку дає змогу швидко та якісно розв'язати задачу оптимізації зубчастих передач за критерієм мінімальних контактних напружень при забезпеченні коефіцієнта торцевого перекриття  $\varepsilon_\alpha \geq 2$ .

#### Висновки:

1. Розв'язання задачі оптимального проектування евольвентних циліндричних прямозубцевих передач з коефіцієнтом торцевого перекриття  $\varepsilon_\alpha \geq 2$  є перспективним напрямком досліджень, тому що дає змогу суттєво поліпшити навантажувальну здатність та масогабаритні показники механічних приводів.
2. Побудовано цільову функцію та математичну модель оптимізації передач з коефіцієнтом торцевого перекриття  $\varepsilon_\alpha \geq 2$  за критерієм мінімальних контактних напружень у зачепленні. Вона дає змогу врахувати усі характерні особливості таких передач.
3. Визначені змінні проектування, у якості яких обрані параметри, які безпосередньо впливають на величину коефіцієнта торцевого перекриття  $\varepsilon_\alpha$ . Це коефіцієнти висоти головки зубців вихідних контурів шестерні та колеса  $h_{a1}^*$ ,  $h_{a2}^*$ ; кут профілю вихідного контуру  $\alpha$  та коефіцієнт зміщення вихідного контуру шестерні  $x_1$ .
4. Обрано метод розв'язання задачі оптимального проектування, а саме зондування простору параметрів за допомогою ЛПт-послідовності. Він дає змогу швидко та достатньо точно знайти оптимальні геометричні параметри зачеплення.
5. Запропоновано орієнтовну послідовність розв'язання задачі оптимального проектування методом

ЛПт-пошуку. Вона буде використана як підґрунтя для розробки докладного алгоритму оптимального проектування передач з коефіцієнтом торцевого перекриття  $\varepsilon_\alpha \geq 2$ .

6. У подальших дослідженнях планується розробити прикладні методики та алгоритми розв'язання задачі, провести тестові та перевірочні розрахунки з метою підтвердження і оцінки отриманих теоретичних результатів, а також запропонувати варіанти передач з коефіцієнтом торцевого перекриття  $\varepsilon_\alpha \geq 2$ , що забезпечують суттєве підвищення навантажувальної здатності.

#### Список літератури

1. Павлице В.Т. *Основи конструювання та розрахунків деталей машин*. Львів, Афіша, 2003. 560 с.
2. Radzevich P. Stephen. *High-Conformal gearing. Kinematics and Geometry*. CRC Pres, 2016. 349 p.
3. Грицай І.С., Литвиняк Я.М. Синусоїдальні зубчасті передачі як альтернатива традиційним передачам та новий метод їх виготовлення. *Вісник НТУ "ХП"*. Тематичний випуск "Проблеми механічного приводу". Харків, НТУ "ХП", 2009, № 19, с. 43–53.
4. Павлов А.И. *Современная теория зубчатых зацеплений*. Харьков, ХНАДУ, 2005. 100 с.
5. Vereš, M., Bošanský, M., Gaduš J. *Theory of Convex-Concave and plane cylindrical gearing*. STU, Bratislava, Slovakia, 2006. 180 p.
6. *Dudley's Handbook of Practical Gear Design and Manufacture*. Edited by Stephen P. Radzevich. CRC Pres, 2022. 1144 p.
7. Chanhoh Choi, Hyoungjong Ahna, Young-jun Park, Geun-ho Leec, Su-chul Kim. Influence of gear tooth addendum and dedendum on the helical gear optimization considering mass, efficiency, and transmission error. *Mechanism and Machine Theory*. Vol. 166, December 2021, no. of article 104476. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0094114X21002342> (accessed 30.05.2022).
8. M. Rameshkumar, P. Sivakumar, S. Sundaresh and K. Gopinath. Load Sharing Analysis of High-Contact-Ratio Spur Gears in Military Tracked Vehicle Applications. *Gear Technology*, July 2010, pp. 43–50.
9. Miryam Sanchez, Jose Pedrero, Miguel Pleguezuelos. Tooth-root stress calculation of high transverse contact ratio spur and helical gears. *Mechanism and Machine Theory*. February 2014, vol. 64, no. 2, pp. 93–110.
10. Predrag S. Dobratic, Mileta R. Ristivojevic. Uticaj parametara cilindricnih zupcastih parova na stepen sprezanja profila zubaca. *Vojnotehnicki glasnik / Military technical courier*. 2014, vol. LXII, no. 3, pp. 80–100.
11. Milan Rackov. *Optimization of HCR Gearing Geometry from Scuffing Point of View*. PhD Thesis. Bratislava, 2014. 103 p.
12. Бунаков Ю.Н., Устиненко А.В. Выбор рационального коэффициента высоты головки зуба. *Теория механизмов и машин*. 1988, вып. 44, с. 7–9.
13. *ГОСТ 21354-87. Передачи зубчатые цилиндрические эвольвентные внешнего зацепления. Расчет на прочность*. Москва, изд-во стандартов, 1989. 76 с.
14. *ISO 6336:2006 Metod B. Calculation of load capacity of spur and helical gears*. 2007.
15. *ГОСТ 16532-70. Передачи зубчатые цилиндрические эвольвентные внешнего зацепления. Расчет геометрии*. Москва, изд-во стандартов, 1983. 43 с.
16. Болотовский И.А., Гурьев Б.И., Смирнов В.Э., Шендерей Б.И. *Цилиндрические эвольвентные зубчатые передачи внешнего зацепления. Расчет геометрии: Справочное пособие*. Москва, Машиностроение, 1974. 160 с.
17. H. Rekleytys, A. Reyvyntran, K. Rjehsdel. *Engineering Optimization*. New York, A Wiley-Interscience Publ., 1983.
18. Бондаренко О. В., Устиненко О. В., Сериков В. І. Приклад рационального проектування зубчастого циліндричного двоступінчастого редуктору методом псевдовипадкового пошуку при багатьох критеріях. *Вісник НТУ "ХП"*. Серія: *Машинознавство та САПР*. Харків, НТУ "ХП", 2018, № 25 (1301). С. 31–35.
19. O. Ustinenko, O. Bondarenko, I. Klochkov, V. Serykov. Multi-criteria optimization of tracked vehicle transmissions. *Proc. of 6th International BAPT Conference Power Transmissions*. 19–22.06.2019, Varna, 1 (2019), pp. 196–199.

20. Соболев И. М., Статников Р. Б. *Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями*. Москва, Дрофа, 2006. 175 с.

## References (transliterated)

- Pavlyshche V. T. *Osnovy konstruirovaniya ta rozrahunok detalej mashyn* [Fundamentals of design and calculation of machine parts]. L'viv, Afisha Publ., 2003. 560 p.
- Radzevich P. Stephen. *High-Conformal gearing. Kinematics and Geometry*. CRC Pres, 2016. 349 p.
- Grycaj I. Je., Lytvynjak Ja. M. Synusoi'dal'ni zubchasti peredachi jak al'ternatyva tradycijnym peredacham ta novyj metod i'h vygotovlennja [Sinusoidal gears as an alternative to traditional gears and a new method of their manufacture]. *Visnyk NTU "KhPI". Tematychnyj vyputsk "Problemy mehanichnogo pryvodu"* [Bulletin of the NTU "KhPI". Thematic issue Problem of mechanical drive]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2009, no. 19, pp. 43–53.
- Pavlov A. I. *Sovremennaya teoriya zubchatikh zaceplenij* [The modern theory of gearing]. Kharkov, KhNADUPubl., 2005, 100 p.
- Vereš, M., Bošanský, M., Gaduš, J. *Theory of Convex-Concave and plane cylindrical gearing*. STU, Bratislava, Slovakia, 2006. 180 p.
- Dudley's Handbook of Practical Gear Design and Manufacture*. Edited by Stephen P. Radzevich. CRC Pres, 2022. 1144 p.
- Chanho Choi, Hyoungjong Ahna, Young-jun Park, Geun-ho Leec, Su-chul Kim. Influence of gear tooth addendum and dedendum on the helical gear optimization considering mass, efficiency, and transmission error. *Mechanism and Machine Theory*. Vol. 166, December 2021, no. of article 104476. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0094114X21002342> (accessed 30.05.2022).
- M. Rameshkumar, P. Sivakumar, S. Sundaresh and K. Gopinath. Load Sharing Analysis of High- Contact-Ratio Spur Gears in Military Tracked Vehicle Applications. *Gear Technology*, July 2010, pp. 43–50.
- Miryam Sanchez, Jose Pedrero, Miguel Pleguezuelos. Tooth-root stress calculation of high transverse contact ratio spur and helical gears. *Mechanism and Machine Theory*. February 2014, vol. 64, no. 2, pp. 93–110.
- Predrag S. Dobratic, Mileta R. Ristivojevic. Uticaj parametara cilindricnih zupcastih parova na stepen sprezanja profila zubaca. *Vojnotehnicki glasnik / Military technical courier*. 2014, vol. LXII, no. 3, pp. 80–100.
- Milan Rackov. *Optimization of HCR Gearing Geometry from Scuffing Point of View*. PhD Thesis. Bratislava, 2014. 103 p.
- Bunakov Ju.N., Ustinenko A.V. Vybora racional'nogo koeficienta vysoty golovki zuba [The choice of a rational addendum factor. Theory of mechanisms and machines]. *Teoriya mehanizmov i mashin* [Theory of mechanisms and machines]. 1988, vol. 44, pp. 7–9.
- GOST 21354–87. *Peredachi zubchatye cilindricheskie jevol'ventnye vneshnego zacepleniya. Raschet na prochnost'* [State Standard 21354-87. Cylindrical involute gears of external engagement. Strength calculation]. Moscow, Standarts Publ., 1989. 76 p.
- ISO 6336:2006 *Metod B. Calculation of load capacity of spur and helical gears*. 2007.
- GOST 16532–70. *Peredachi zubchatye cilindricheskie jevol'ventnye vneshnego zacepleniya. Raschet geometrii* [State Standard 16532–70. Cylindrical involute external gear pairs. Calculation of geometry]. Moscow, Standarts Publ., 1983. 43 p.
- Bolotovskij I.A., Gur'ev B.I., Smirnov V.Je., Shenderej B.I. *Cilindricheskie jevol'ventnye zubchatye peredachi vneshnego zacepleniya. Raschet geometrii: Spravochnoe posobie* [Cylindrical involute gears with external engagement. Geometry Calculation: Reference Guide]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1974. 160 p.
- H. Rekleytys, A. Revyndran, K. Rjehsdel. *Engineering Optimization*. New York, A Wiley-Interscience Publ., 1983.
- Bondarenko O. V., Ustynenko O. V., Serykov V. I. Priklad racional'nogo proektuvannja zubchastogo cilindrichnogo dvostupinchastogo reduktora metodom psevdovypadkovogo poshuku pry bagat'oh kryterijah [Example of rational design of toothed cylindrical gears using pseudo-random method search with multiple criteria]. *Visnyk NTU "KhPI". Serija: "Mashynoznavstvo ta SAPR"* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Engineering and CAD]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2018, no. 25 (1301), pp. 31–35.
- O. Ustinenko, O. Bondarenko, I. Klochkov, V. Serykov. Multi-criteria optimization of tracked vehicle transmissions. *Proc. of 6th International BAPT Conference Power Transmissions*. 19–22.06.2019, Varna, 1 (2019), pp. 196–199.
- Sobol' I. M., Statnikov R. B. *Vybor optimal'nyh parametrov v zadachah so mnogimi kriterijami* [The choice of optimal parameters in problems with many criteria]. Moscow, Drofa Publ., 2006. 175 p.

Надійшло (received) 30.06.2022

## Відомості про авторів / About the Authors

**Устиненко Олександр Віталійович / Ustynenko Oleksandr** – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), доцент, старший науковий співробітник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-64-78; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6714-6122>; e-mail: [ustin1964@tmm-sapr.org](mailto:ustin1964@tmm-sapr.org)

**Черельов Станіслав Володимирович / Cherelev Stanislav** – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-69-01; ORCID: <https://orcid.org/0000-0000-0000-0000>; e-mail: [s1515@tmm-sapr.org](mailto:s1515@tmm-sapr.org)

**Мірослав Бошанскі / Miroslav Božanský** – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), професор, Словацький технічний університет в Братиславі, професор кафедри транспортної техніки та конструювання; м. Братислава, Словаччина; тел.: +421-257-296-426; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0505-2689>; e-mail: [miroslav.bosansky@stuba.sk](mailto:miroslav.bosansky@stuba.sk)

**Протасов Роман Васильович / Protasov Roman** – Словацький технічний університет в Братиславі, старший викладач кафедри транспортної техніки та конструювання; м. Братислава, Словаччина; тел.: +421-949-352-655; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1611-0610>; e-mail: [roman.protasov@stuba.sk](mailto:roman.protasov@stuba.sk)

**Бондаренко Олексій Вікторович / Bondarenko Oleksiy** – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; м. Харків, Україна; тел.: (067) 189-97-00; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2693-5301>; e-mail: [avbondko@gmail.com](mailto:avbondko@gmail.com)

**Левін Нікіта Олександрович / Levin Nickita** – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-69-01; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4155-6553>; e-mail: [nlevin97@gmail.com](mailto:nlevin97@gmail.com)