

*М. М. ТКАЧУК, М. С. САВЕРСЬКА, С. В. КУЦЕНКО, О. І. ЗІНЧЕНКО, І. Є. КЛОЧКОВ,
М. А. ТКАЧУК, І. О. ВОЛОШИНА*

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕНЬ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТА ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ МАШИН ВІЙСЬКОВОГО ТА ЦИВІЛЬНОГО ПРИЗНАЧЕННЯ

Проблема, що вирішується та описана у статті, полягає у необхідності синтезу нових технічних рішень для елементів об'єктів військової техніки. Із цією метою розроблені та реалізовані наукові засади, удосконалені математичні та чисельні моделі для дослідження напружено-деформованого стану тіл із сучасних матеріалів в умовах контактної взаємодії та пружно-пластичного деформування. При цьому принциповою особливістю є застосування мікроструктурних моделей властивостей матеріалів у об'ємі та на поверхні. Крім того, на рівні макромасштабу розроблена більш загальна варіаційна постановка, яка враховує фізичну та структурну нелінійності. Це дає суттєво вищі можливості в обґрунтуванні більш досконалих технічних рішень елементів об'єктів військової техніки із тактико-технічними та технічними характеристиками на світовому рівні шляхом здійснення досліджень напружено-деформованого стану контактуючих тіл. З цією метою розроблено варіаційне формулювання на основі розвитку варіаційного принципу Кальєра. Завдання формується для приращення контактної тиску. Дискретизація здійснено методом граничних елементів. Крім того, розроблено постановку на основі розвитку теорії варіаційних нерівностей. У цьому випадку завдання формується для приращення переміщень точок контактуючих тіл. Відповідно, дискретизація здійснена методом скінченних елементів. На завершення здійснено узагальнення системи розв'язувальних рівнянь і нерівностей. У результаті поставлено в загальному вигляді завдання визначення напружено деформованого стану контактуючих тіл із урахуванням пружно-пластичного деформування. Ця постановка є основою для досліджень та обґрунтування проектних рішень елементів машин за критеріями міцності.

Ключові слова: машини військового та цивільного призначення; напружено-деформований стан; контакт; тактико-технічні характеристики

*Н. Н. ТКАЧУК, М. С. САВЕРСКАЯ, С. В. КУЦЕНКО, Е. И. ЗИНЧЕНКО, И. Е. КЛОЧКОВ,
Н. А. ТКАЧУК, И. А. ВОЛОШИНА*

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИН ВОЕННОГО И ГРАЖДАНСКОГО НАЗНАЧЕНИЯ

Проблема, которая решается и описана в статье, состоит в необходимости синтеза новых технических решений для элементов объектов военной техники. С этой целью разработаны и реализованы научные принципы, усовершенствованные математические и численные модели для исследования напряженно-деформированного состояния тел, состоящих из современных материалов в условиях контактного взаимодействия и упруго-пластического деформирования. При этом принципиальной особенностью является использование микроструктурных моделей свойств материалов в объеме и на поверхности. Это дает существенно большие возможности в обосновании более совершенных технических решений элементов объектов военной техники с тактико-техническими и техническими характеристиками на мировом уровне путем совершения исследований напряженно-деформированного состояния контактирующих тел. С этой целью разработана вариационная формулировка на основе развития вариационного принципа Кальєра. Задача формуруется для приращений контактного давления. Дискретизация осуществлена методом граничных элементов. Кроме того, разработана постановка на основе развития теории вариационных неравенств. В этом случае задача формуруется для приращений перемещений точек контактирующих тел. Соответственно, дискретизация осуществлена методом конечных элементов. В завершение осуществлено обобщение системы разрешающих уравнений и неравенств. В результате поставлена в общем виде задача определения напряженно-деформированного состояния контактирующих тел с учетом упруго-пластического деформирования. Эта постановка является основой для исследований и обоснования проектных решений элементов машин по критериям прочности.

Ключевые слова: машины военного и гражданского назначения; напряженно-деформированное состояние; контакт; тактико-технические характеристики

*М. М. ТКАЧУК, М. САВЕРСКА, С. КУТСЕНКО, О. ЗИНЧЕНКО, И. КЛОЧКОВ, М. А. ТКАЧУК,
И. ВОЛОШЫНА*

THEORETICAL BASIS FOR THE ANALYSIS OF CONTACT INTERACTION AND ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION OF ELEMENTS OF CIVIL AND MILITARY PURPOSE VEHICLES

The problem that is solved and described in the article is the need to synthesize new technical solutions for the elements of military equipment. To this end, scientific principles have been developed and implemented, mathematical and numerical models for the study of the stress-strain state of bodies made of modern materials in the conditions of contact interaction and elastic-plastic deformation have been improved. A fundamental feature is the use of microstructural models of the properties of materials in volume and on the surface. In addition, at the macro-scale level, a more general variational statement has been developed that takes into account physical and structural nonlinearities. This gives significantly higher opportunities in substantiating better technical solutions of elements of military equipment with tactical and technical and technical characteristics at the world level by conducting studies of the stress-strain state of contacting bodies. A variational formulation based on a modified Kalker principle has been developed for this purpose. The problem is stated with respect to the increments of the contact pressure. The discretization is performed by means of the boundary element method. Besides, another formulation via variational inequalities is developed. In this case the contact problem is stated for the displacement increments of the surface points of the two bodies. Correspondingly, discretization is performed by means of the finite element method. The resolving system of equations and inequalities is ultimately derived in the general form. The analysis of the stress-strain state of the contacting bodies with account for their elasto-plastic deformations is hence performed in the most general form. This problem statement forms a basis for the analysis and justification of design solutions for machine elements by strength criteria.

Keywords: military and civilian vehicles; stress-strain state; contact; tactical and technical characteristics

Вступ. Значна частина елементів конструкцій машин військового та цивільного призначення

© М. М. Ткачук, М. С. Саверська, С. В. Куценко, О. І. Зінченко, І. Є. Клочков, М. А. Ткачук, І. О. Волошина, 2022

(МВЦП) працює в умовах пружно-пластичного деформування та контактної взаємодії. Ця обставина має тенденцію для все більшого розповсюдження із огляду на повсюдний тренд на інтенсифікацію експлуатаційних навантажень МВЦП та передачу між елементами конструкцій значної потужності через обмежені області контактної взаємодії.

Отже, у багатьох випадках необхідно або миритися із невідворотністю появи пластичних деформацій, або робити спроби їх уникнути, або, навпаки, – управляти ними.

Зокрема, перелічені варіанти властиві кульковим поршням радіальних гідропередач для оснащення перспективних танкових трансмісій, зубчастим приводам нагнітачів повітря високофорсованих двигунів, торсіонним валам підвіски транспортних засобів спеціального призначення тощо. При цьому, в кожному із випадків реалізується контакт робочих поверхонь спряжених елементів конструкцій уздовж поверхонь складної форми. Це може спровокувати високий рівень контактного тиску внаслідок його нерівномірного розподілу на область можливого контакту та малості розмірів області реального контакту. У свою чергу, це може викликати появу не тільки пружних, але і пластичних деформацій.

Проте, незважаючи на спільні особливості пружно-пластичного контакту у наведених вище прикладах, із точки зору технічних вимог ситуація у кожному випадку – особлива.

Так, для певних випадків взаємодії кулькових поршнів радіальних гідропередач із статорним кільцем [1] виникає задача визначення профіля зазора після первинного пружно-пластичного зминання поверхневого шару.

Для зубчастих передач (наприклад, приводів нагнітачів повітря танкових двигунів) можна поставити задачу про визначення такої модифікації профіля робочих поверхонь їхніх зубців, який попереджує виникнення пластичних деформацій у їх тілі.

Що ж стосується торсіонних валів систем підсороювання транспортних засобів спеціального призначення, у цьому випадку застосовується на етапі виготовлення технологія заневолювання. Завдяки цьому у тілі валів створюються залишкові напруження внаслідок пластичних деформацій, що є сприятливим для усунення можливості появи останніх при дії експлуатаційних навантажень.

Незважаючи на певні відмінності технічних вимог та умов роботи названих випадків, у методологічному аспекті формується загальна задача, яка характеризується трьома видами нелінійностей: фізична (внаслідок пластичного деформування), структурна (із-за контакту) та геометрична (у випадку значних переміщень та деформацій). Відповідно, задача аналізу напружено-деформованого стану (НДС) контактуючих тіл стає набагато більш складною, ніж у випадку наявності лише одного типу нелінійності. Тому актуальною і важливою є проблема розроблення удосконалених підходів, моделей та методів аналізу НДС елементів МВЦП в умовах контакту і пружно-пластичного деформування, яка породила напрямок досліджень, що склали зміст цієї статті.

Аналіз методів аналізу напружено-деформованого стану в умовах контакту і пластичного деформування.

На теперішній час методи аналізу НДС в умовах контакту і пластичного деформування досягли значного розвитку. Контактна взаємодія є змістом досліджень багатьох вітчизняних і зарубіжних учених К. В. Аврамова, В. А. Александрова, В. О. Бабешка, М. І. Бобиря, І. І. Воровича, Л. О. Галіна, І. Г. Горячевої, С. М. Гребенюка, О. М. Гузя, Б. П. Зайцева, А. С. Кравчука, В. С. Кирилюка, В. І. Куща, Г. І. Львова, Р. М. Мартиняка, В. В. Михаськіва, В. І. Моссаковського, М. І. Мухелішвілі, В. В. Панасюка, В. З. Партона, А. М. Підгорного, Д. А. Пожарського, В. С. Проценка, А. Ф. Улітки, А. П. Філіппова, І. Я. Штаєрмана, J. R. Barber, M. Ciavarella, A. C. Fischer-Cripps, J. Ghaednia, A. Greenwood, H. Hertz, K. L. Johnson, J. J. Kalker, T. A. Laursen, L. Pastewka, V. L. Popov, B. I. Wohlmuth, P. Wriggers, G. Zavarise та багатьох інших. Оpubліковано низку оглядів із механіки контактної взаємодії, у яких є посилання на множину робіт, зокрема [2].

Контактні явища, які відбуваються при взаємодії елементів машинобудівних конструкцій, зумовлені реалізацією численних фізико-механічних процесів. Різноманіття їх проявів і взаємозалежність вимагають комплексного підходу до розв'язання дослідницьких задач у цій області.

Як уже зазначалося, необхідно створити адекватну і математично коректну постановку задачі аналізу напружено-деформованого стану в умовах контакту і пластичного деформування.

Значні труднощі у вивченні механізмів контактної взаємодії викликає те, що зона їх протікання недоступна для засобів об'єктивного контролю. Практика досліджень, що склалася натепер у цій області, заснована на методах аналізу морфології поверхонь тертя і часток зношування [2].

Для дослідження напружено-деформованого стану елементів машинобудівних конструкцій розвинено низку моделей і методів, які враховують важливі різні чинники [3–5]. Зокрема, це ушкоджуваність при складному навантаженні, контактна взаємодія, механіка руйнування тощо. Для розв'язання задач аналізу НДС широко застосовуються методи теорії варіаційних нерівностей, варіаційний принцип Калькера і метод граничних елементів (МГЕ), мікроструктурні моделі, метод скінчених елементів (МСЕ). Усі ці розробки мають значну цінність і широку застосовність, у тому числі – для нелінійних задач. При цьому враховуються і контактна взаємодія, і пластична деформація та ушкоджуваність, і мікроструктурні ефекти. Це створило можливість

- для аналізу складних полів переміщень, деформацій і напружень;
- прогнозування довговічності, міцності і навантажувальної здатності елементів машинобудівних конструкцій.

У роботі [6] узагальнені деякі підходи і методи, які використовуються для розв'язання задач контактної механіки. Вони включають аналітичні розв'язки, засновані на моделях Greenwood-Williamson, Archard, фрактальних теорій Persson тощо, а також чисельні

методи: МГЕ, МСЕ, рухливих клітинних автоматів, методи молекулярної динаміки тощо.

У роботі [7] представлений нелінійний чисельний аналіз контактних задач пружно-пластичності компактних і тонкостінних металевих конструкцій. Акцент робиться на використанні вдосконалених одновимірних моделей високого порядку на основі уніфікованого формулювання Каррери (Carrege Unified Formulation, CUF) для урахування злокалізованих ефектів. Результати CUF добре узгоджуються з еталонними тривимірними розв'язками методу скінченних елементів. CUF довів свою придатність для декількох обчислювальних задач, таких як нелінійні структурні задачі, які враховують геометричні нелінійності, нелінійності матеріалів і багатомасштабний аналіз композитних структур.

Контактна взаємодія складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій у багатьох випадках є чинником, що визначає працездатність, довговічність, навантажувальну здатність та інші характеристики виробу у цілому. Прикладами можуть служити тіла кочення підшипників, зубці передач з модифікованими робочими поверхнями, кулькові поршні радіальних гідروпередач і багато інших складнопрофільних тіл (СПТ) [8, 9].

Альтернативою можуть виступати різні варіанти методу декомпозиції області (МДО). У рівняннях цих методів є присутніми ітераційні параметри, які сильно впливають як на сам факт збіжності методу, так і на швидкість збіжності.

Для мультиконтактної задачі із складною геометрією вибір відповідних значень ітераційних параметрів часто є нетривіальною задачею. У таких випадках може бути застосований підхід, який полягає у комбінації дворівневого аддитивного методу Шварца (варіант МДО з перекриттям підобластей) для розбиття великої контактної задачі на низку локальних задач і методу Неймана-Діріхле (варіант МДО без перекриття підобластей) для розв'язання простіших контактних задач [10].

Локальні контактні задачі є нелінійними, для них здійснюється свій ітераційний процес (відповідні ітерації називаються внутрішніми). Метод Неймана-Діріхле полягає у тому, що на кожній ітерації спочатку розв'язуються задачі для однієї групи тіл, для яких на контактних поверхнях задані умови Неймана, а потім розв'язуються задачі для іншої групи тіл, для яких на контактних поверхнях задані умови Діріхле. У кінці внутрішньої ітерації відбувається обчислення нових наближень для контактної пари тіл із використанням власних ітераційних параметрів для кожної контактної пари.

Деякі із робіт присвячені розвитку мікромеханічних моделей, наприклад, на рівні множини мікронерівностей на поверхнях контактуючих тіл [11]. Це, зокрема, питання впливу на контактну взаємодію форми контактуючих поверхонь, адгезії, текстури та властивостей поверхневого шару та інших чинників.

Для чисельного та аналітичного визначення контактної взаємодії застосовують різні моделі та методи. Зокрема, це модель Герца, методи граничних інтегральних рівнянь (МГІР) та скінченних елементів [12], теорія варіаційних нерівностей, варіаційний принцип

Калькера тощо. У той же час повного та ефективного розв'язання задач, які виникають при моделюванні контактної взаємодії СПТ, перелічені методи та моделі не забезпечують.

Це стосується, у першу чергу, відсутності універсальних формулювань для генерування розв'язувальних співвідношень аналізу контактної взаємодії тіл із урахуванням різних чинників, а, крім того, механізмів ідентації мікромеханічних моделей властивостей поверхневих і проміжних шарів у ці співвідношення та урахування їх залежності від історії навантаження.

Разом із тим певні формулювання в роботах Zhao J., E. Vollebregt С., природним чином адаптовані до розвитку у напрямках, що становлять інтерес. Так, варіаційні принципи, які можуть бути сформовані на розвиток принципу Калькера [13, 14], володіють певною універсальністю щодо властивостей контактуючих тіл. Це дає змогу, використовуючи принцип Калькера як початкове «ядро», нарощувати його за рахунок доданків, у яких зосереджені різні характерні властивості тих чи інших досліджуваних об'єктів. Це уможливує урахування нелінійних властивостей поверхневих шарів матеріалів тіл, які піддані технологічним операціям зміцнення, напилення, термообробки тощо. Вплив цих ефектів є суттєвим, тому потрібно розробляти фізично адекватні та математично строгі моделі, які передбачають, зокрема, залежність поведінки матеріалів досліджуваних об'єктів від історії навантаження.

Проте на сьогодні такі розробки, які повною мірою націлені на перелічені проблемні аспекти, у літературі відсутні. Отже, склалося протиріччя між потребами практики промислового виробництва у нових методах і моделях аналізу контактної взаємодії та можливостями механіки.

На противагу існуючим розробкам [3–11] підходи, які описані у роботах [13–15], продемонстрували суттєвий прогрес у напрямку розвитку моделей та методів аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл. Це є основою для урахування нових чинників, зокрема, залежності властивостей матеріалів контактуючих об'єктів від історії навантаження.

У роботах [2, 13–15] описані вдосконалені методи аналізу контактної взаємодії СПТ і напружено-деформованого стану з нелінійними проміжними шарами, властивості яких залежать від історії навантаження. Ці методи побудовані на основі розвитку варіаційного принципу Калькера у частині розширення множини варіюваних чинників за рахунок параметрів історії навантаження.

Щоби досягнути високої експлуатаційної надійності та довговічності широкої номенклатури деталей машин, що працюють в умовах циклічних навантажень, тертя та дії корозійних середовищ, яке має концентратори, застосовують пластичну деформацію [16]. При цьому прогнозування параметрів зміцнення (міра деформації, глибина зміцненого шару, шорсткість обробленої поверхні), що враховує технологічні режими обробки і фізико-хімічні властивості матеріалу деталі, є складною науковою задачею.

Основні проблеми, що виникають при здійсненні операцій пластичної деформації, відносяться у основ-

ному до області технології, зокрема, до пошуку найбільш раціональних і високопродуктивних способів деформації і до створення пристроїв для їх реалізації. Натепер розроблені і успішно застосовуються у виробничій практиці численні способи зміцнення деталей машин і елементів конструкцій пластичною деформацією. Відрізняються вони в основному схемою силової дії деформуючого елемента на оброблювану поверхню.

У огляді [17] Segal V. проаналізував режими і процеси інтенсивної пластичної деформації (ППД, Severe Plastic Deformation (SPD)), яка розглядається як технологія обробки матеріалів.

Для підвищення геометричних і фізико-механічних характеристик поверхневого шару, який чинить первинний вплив на експлуатаційні властивості виробів, здійснюють обробно-зміцнюючу обробку деталей, для чого широко застосовуються методи поверхнево-пластичної деформації (ППД). Усі методи ППД засновані на використанні пластичних властивостей металів, здатних приймати залишкове напруження без порушення цілісності та об'єму заготовки.

Скінченно-елементне моделювання процесу кування сталеві заготовки із використанням програми Deform 3D здійснене Obiko J.O., Mwema F.M., Bodunrin M.O. [18].

У роботі [19] розв'язується задача про напружено-деформований стан замкового з'єднання робочих лопаток 1-го ступеня циліндра середнього тиску в умовах пластичної деформації. При розв'язанні з задачі використовується теорія пружно-пластичних деформацій. Розв'язання задачі здійснюється із використанням двох різних підходів до завдання кривих пластичної деформації. Оцінюється застосовність використання простішої білінійної апроксимації замість класичної мультилінійної.

У роботі [20] Д. В. Лавинським, О. К. Морачковським розглянуто пружно-пластичне деформування контактно-взаємодіючих тіл при дії імпульсного електромагнітного поля.

Елементи військових колісних та гусеничних машин зазнають значно інтенсивніших навантажень, ніж елементи машин цивільного призначення. При їх експлуатації діє, як правило, не один, а сукупно декілька чинників, які спричиняють кожен окремо нелінійні ефекти. Вони впливають один на одного, тому розглядати їх незалежно неможливо. Отже, пряме та безпосереднє застосування створених раніше моделей та відповідних методів не дає можливості адекватно і точно визначити довговічність, міцність та навантажувальну здатність елементів об'єктів військової техніки, що працюють у складних умовах навантаження при дії декількох чинників, які спричиняють нелінійності різного типу. Отже, незважаючи на значні можливості існуючих розробок, для елементів машин військового та цивільного призначення вкрай важливо розробити моделі та методи досліджень, які поєднують: мікροструктурно обґрунтовані властивості матеріалів; чинники, які зумовлюють різні типи нелінійностей; узагальнений параметричний опис моделей елементів досліджуваних конструкцій.

Така комплексна розробка та дослідження повною мірою тепер відсутні. Це не дає можливості розв'язувати актуальні та важливі задачі, які постають

і для елементів об'єктів військової техніки, і для конструкцій цивільного призначення.

Таким чином, на теперішній час відсутні універсальні методи розв'язання поставлених у роботі задач, які б задовольняли вимогам не тільки адекватного і точного моделювання, але й також адаптивного його здійснення, що дуже важливо на перших етапах проектування і технологічної підготовки виробництва, на яких необхідні багатоваріантні розрахунки НДС із урахуванням чинників пружно-пластичного деформування і контактної взаємодії.

Разом із тим у низці робіт [13–15, 21, 22] розроблені варіанти підходів, моделей та методів аналізу контактної взаємодії із урахуванням фізичної нелінійності матеріалів тіл, які можуть стати основою для вирішення поставленої в роботі проблеми. Саме ці напрацювання і були обрані у роботі як базові при розробці та розвитку теоретичних основ досліджень контактної взаємодії та пружно-пластичного деформування елементів об'єктів військової та цивільної техніки.

Мета роботи – розвиток теоретичних основ досліджень контактної взаємодії та пружно-пластичного деформування елементів машин військового та цивільного призначення.

Розвиток варіаційної гранично-елементної постановки задачі контактної взаємодії в умовах пружно-пластичного деформування. Розглядається задача пружно-пластичного деформування контактуючих тіл із розмірами області контакту, набагато меншою за їх розміри. За певних умов ці тіла можуть розглядатися як напівнескінченні. Враховуючи, що для випадку контакту пружних тіл справедливий співвідношення для визначення контактної тиску у вигляді

$$\Phi(p) = \frac{1}{2} \int_{(S)} p(w) \cdot w ds + \int_{(S)} p(h - \delta) ds \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$p(\xi, \eta) \geq 0 \text{ у } S,$$

де $\Phi(p)$ – функціонал повної додаткової енергії Калькера;

$w = u_{z_1} + u_{z_2}$ – локальне зближення точок контактуючих на поверхні S тіл;

δ – загальне зближення тіл;

S – область, що покриває область можливого контакту,

h – розподіл початкового зазору.

Застосовуючи як один із варіантів чисельного розв'язання контактної задачі подання шуканого розподілу тиску p у вигляді комбінації пірамідальних кусково-лінійних функцій $p_n \equiv p_{ij}$ (рис. 1) p_n :

$$p(\zeta, \eta) \equiv \sum_n \hat{p}(\zeta - \zeta_n, \eta - \eta_n) \cdot p_n,$$

маємо у дискретизованому вигляді із (1) систему розв'язувальних співвідношень:

$$\begin{cases} Cp + h = \delta; \\ \sum_{J_c} c^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot p_n = P, \quad n \in J_c; \\ p \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

де C – матриця коефіцієнтів впливу;
 p – вектор-масив вузлових значень контактного тиску;
 h – вектор-масив вузлових значень нормального початкового зазору між тілами;
 δ – зближення нескінченно віддалених точок контактуючих тіл;
 c – крок трикутної моделі скінченних елементів на поверхні можливого контакту тіл;
 P – інтегральна притискна сила між тілами;
 J_c – множина вузлів, у яких реалізується активний контакт.

Система рівнянь та нерівностей, яка справедлива для випадку пружного деформування, може бути переписана для прирощень компонент у вигляді:

$$\begin{cases} C^{(s)}(p, \tau) \cdot \Delta p^{(s)} + h - \delta^{(s-1)} = \Delta \delta^{(s)}; \\ \sum_{J_c^{(s)}} \Delta p^{(s)} \cdot c^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \Delta P^{(s)}; \\ p^{(s-1)} + \Delta p^{(s)} \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Тут $C^{(s)}$ – матриця коефіцієнтів впливу, яка визначається для поточного стану контактуючих тіл на кроці s .

Властивості цих тіл, що розглядаються як деякі пружні анізотропні, залежать від поточного стану (тобто значень контактного тиску) та історії процесу, яка зберігається у певному внутрішньому параметрі τ [24]. При цьому у окремих точках тіла можуть реалізуватися: пружне деформування; активне навантаження; нейтральне навантаження [24]. Відповідно, обчислюються властивості $C^{(s)}(p, \tau)$.

Масив прирощень вузлових значень контактного тиску на s -му кроці $\Delta p^{(s)}$ задовольняє умовам сумісності переміщень у вузлах, де реалізується активний контакт, причому як компоненти у першому рядку у системі співвідношень (3) присутні: прирощення зближення $\Delta \delta^{(s)}$ та накопичене до $(s-1)$ -го кроку сумарне вибирання зазору:

$$\delta^{(s-1)} = \sum_{r=1}^{s-1} \Delta \delta^{(r)}. \quad (4)$$

Останній рядок у (3) відображає невід’ємність поточного рівня контактного тиску на s -му кроці. Цим самим ураховується можливість немонотонної поведінки прирощень $\Delta p^{(r)}$, які можуть бути і від’ємними, аби тільки виконувалася нерівність у (3). Тут

$$p^{(s-1)} = \sum_{r=1}^{s-1} \Delta p^{(r)}. \quad (5)$$

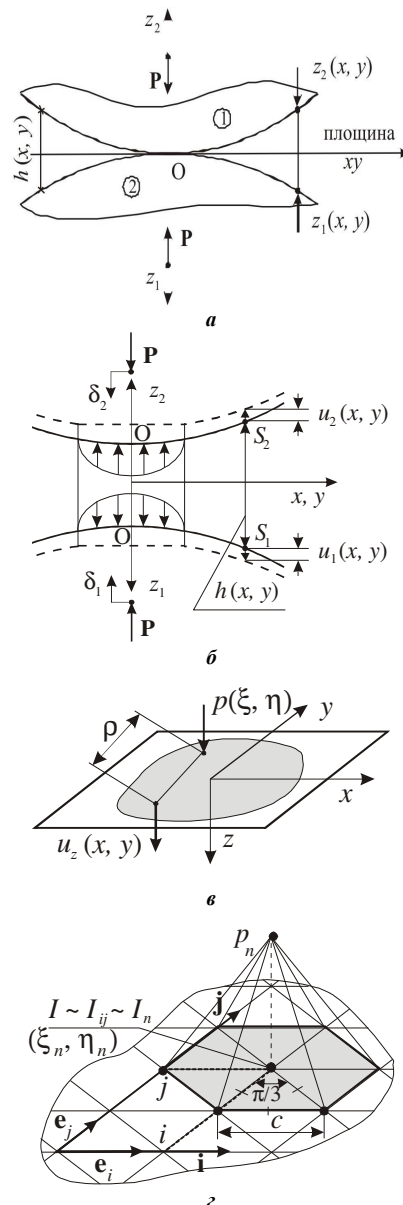


Рисунок 1 – До аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл [23]:
 а – подання локального зазору між контактуючими тілами; б – деформація тіл і утворення контактної площадки під дією нормального зусилля;
 в – переміщення границі напівпростору під дією нормального зусилля; г – регулярна трикутна сітка з кроком c та із вузлами (i, j) і пірамідальний елемент тиску $p_n \equiv p_{ij}$

У (4), (5) співвідношення, що відповідають кроку $s = 1$, вважаються справедливими для випадку пружного деформування. Тоді

$$s = 1; \tau = 0; C^{(s)}(p, 0) = C; p^{(0)} = 0; \delta^{(0)} = 0. \quad (6)$$

Звичайно, співвідношення (3) справедливі для нескінченно малих прирощень $dp, d\delta, dP$. Проте за вибору достатньо помірного кроку за навантаженнями $\Delta p^{(r)}$ похибку при переході до скінченних прирощень (заміна у (3) d на Δ) можна зробити прийнятною.

Тоді, розбиваючи історію навантаження на деяку кількість кроків, можна покроково визначати розподіл області контакту (тобто $J_C^{(s)}$), тиску $p^{(s)}$, зближення $\delta^{(s)}$, а за відповідними співвідношеннями [24] – і компоненти НДС контактуючих тіл.

Розвиток постановок на основі теорії варіаційних нерівностей і методу скінченних елементів. Спираючись, як і вище, на поданні історії навантаження контактуючих тіл у вигляді послідовності кроків, а також аналогічного до вищеприйнятого опису пружно-пластичного НДС як пружного, проте для матеріалу із визначеними за співвідношеннями теорії пластичності інкрементального типу властивостями [24], можна для визначення НДС тіл на s -му кроці застосувати співвідношення теорії варіаційних нерівностей [25–28]. Тоді, подаючи функціонал повної енергії системи, що досліджується, у вигляді

$$J(\Delta u^{(s)}) = a(\Delta u^{(s)}, \Delta u^{(s)}) - b(\Delta u^{(s)}), \quad (7)$$

де $a(v, v)$ – квадратична форма (потенціальна енергія пружного деформування тіл, що займають область Ω):

$$a(v, v) = \frac{1}{2} \int_{(\Omega)} \sigma_{ij}(v) \cdot \varepsilon_{ij}(v) d\Omega, \quad (8)$$

де σ_{ij} , ε_{ij} – компоненти тензорів напружень та деформацій відповідно:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{dv_i}{dx_j} + \frac{dv_j}{dx_i} \right), \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}, \quad (9)$$

де x_i – декартові координати, до розгляду в яких віднесено вектор переміщень точок із компонентами $v_j(x_i)$;

$$i, j = 1, 2, 3;$$

C_{ijkl} – тензор пружних констант матеріалу ($i, j, k, l = 1, 2, 3$), який визначається за відомими співвідношеннями теорії пластичності (як уже зазначалося, на основі аналізу типу поведінки матеріалу та історії навантаження) [24].

Слід зауважити, що співвідношення Коші (перше рівняння у (9)) може бути узагальнене на випадок скінченних деформацій, і тоді воно стане нелінійним (тобто урахується і геометрична нелінійність). Крім того, варто зазначити, що у (8) квадратична форма підсумовується за всіма областями Ω_q , якщо тіло не одне, а декілька. Це також справедливо і для лінійної форми $b(v)$ у (7):

$$b(v) = \int_{(S)} f_i \cdot u_i ds, \quad (10)$$

де f – розподілене навантаження на поверхні S (а з урахуванням наявності кількох тіл – за всіма S_q).

Задача визначення НДС у цьому випадку набуває вигляду:

$$J(\Delta u^{(s)}) \rightarrow \min, \Delta u^{(s)} \in K^{(s)}. \quad (11)$$

Тут $K^{(s)}$ – множина таких функцій $\Delta v^{(s)}$, що задовольняють умовам:

$$\Delta v_{\alpha}^{(s)} + \Delta v_{\beta}^{(s)} + \delta_{\alpha\beta}^{(s-1)} \leq \delta_{\alpha\beta}, \quad (12)$$

де v_{α} , v_{β} – нормальні переміщення на поверхнях контактуючих тіл Ω_{α} і Ω_{β} відповідно;

$\delta_{\alpha\beta}$ – нормальний зазор між поверхнями S_{α} і S_{β} контактуючих тіл;

$\delta_{\alpha\beta}^{(s-1)}$ – накопичене зближення точок поверхонь S_{α} і S_{β} уздовж нормалі.

Якщо до дискретизації функції $\Delta u^{(s)}$ застосувати метод скінченних елементів [12], тобто подати їх у вигляді

$$\Delta u^{(s)} = \sum_z \Delta \mu_z^{(s)} \cdot \varphi_z, \quad (13)$$

де μ_z – масив вузлових переміщень із номерами z із множини Z скінченно-елементної моделі досліджуваної системи тіл;

φ_z – відповідні базисні функції,

то одержимо із (11):

$$\frac{1}{2} \sum_{\omega, \lambda} A_{\omega\lambda} \cdot \Delta \mu_{\omega}^{(s)} \cdot \Delta \mu_{\lambda}^{(s)} - \sum_{\lambda} b_{\lambda}^{(s)} \cdot \Delta \mu_{\lambda}^{(s)} \rightarrow \min, \quad (14)$$

де $A_{\omega\lambda}$, b_{λ} – компоненти матриці жорсткості та вектору вузлових навантажень (відповідають s -му кроку навантаження), що визначаються шляхом підстановки базисних функцій φ_{ω} та φ_{λ} у білінійну форму, якою породжена квадратична форма (8), та у лінійну форму (10).

Мінімум (14) відшуковується на множині лінійних односторонніх обмежень, що визначаються із (12) при підстановці подання (13).

Таким чином, послідовно мінімізуючи (14), визначається множина $K^{(s)}$ (тобто її дискретний аналог у вигляді вузлів, де досягається рівність у дискретних аналогах співвідношень типу (12)), прирощення вектору переміщень $\Delta u^{(s)}$ та компонент тензорів $\Delta \sigma^{(s)}$, $\varepsilon^{(s)}$, а також контактний тиск як нев'язка у рівняннях рівноваги у контактуючих вузлах. Відповідно, розв'язується задача визначення напружено-деформованого стану контактуючих тіл за пружно-пластичного деформування їх матеріалів.

Як і у попередньому випадку методу граничних елементів, для методу скінченних елементів теж справедливе зауваження стосовно того, що усі співвідношення справедливі відносно нескінченно малих прирощень компонент НДС, а перехід до скінченних (тобто від d до Δ) обмежується рівнем похибки, яка при

цьому регулюється шляхом вибору кроку за навантаженням.

Узагальнення розв'язувальної системи співвідношень для дослідження контактної взаємодії та пружно-пластичного деформування елементів конструкцій машин військового та цивільного призначення. Розглядаючи співвідношення МГЕ та МСЕ, наведені вище, можна сформулювати розв'язувальні співвідношення для задачі, що сформульована, у вигляді:

$$J(\mathbf{Y}) = \frac{1}{2} \sum M_{ed} \mathbf{Y}_e \mathbf{Y}_d - \sum \mathbf{N}_e \mathbf{Y}_e \rightarrow \min, \quad (15)$$

$$\sum_g Q_{qn} \mathbf{Y}_g \leq \mathbf{H}_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

де \mathbf{Y} – вектор, що об'єднує ті чи інші невідомі (вузловий тиск чи вузлові переміщення) на певному кроці навантаження, що розглядаються у прирощеннях;

матриця M – відповідно коефіцієнти матриць впливу (C) чи жорсткості (A), див. вище;

\mathbf{N} – вектор, у якому зібрані вузлові зазори чи сили;

Q – матриця, що формує обмеження не проникнення вузлів тіл одне в одного,

\mathbf{H} – вектор міжвузлових зазорів.

Співвідношення (15), (16) формують послідовності задач квадратичного програмування, проте зі змінними (при переході від $(s-1)$ -го до s -го кроку) компонентами M, N, Q, H . Тому для розв'язання такого типу задач застосовні різні методи: релаксаційні процедури [29], ітераційні алгоритми [13, 14], оптимізаційні методи [30] тощо. Вибір того чи іншого методу диктується умовами конкретної задачі.

Висновки.

1. Викладено теоретичні основи досліджень контактної взаємодії та пружно-пластичного деформування елементів машин військового та цивільного призначення. Вони базуються на поданні пружно-пластичного напружено-деформованого стану як послідовності пружних станів, але із властивостями матеріалів, які коригуються, на відміну від традиційних підходів, залежно від поточного його стану та історії навантаження у кожній точці.

2. Із застосуванням модифікації варіаційного принципу Калькера та метода граничних елементів задача про контактну взаємодію зводиться до послідовності розв'язань задач пошуку мінімуму квадратичного функціоналу на множині лінійних обмежень. На кожному етапі шуканими є прирощення контактного тиску у вузлах гранично-елементної сітки. На відміну від попередніх варіантів МГЕ, компоненти розв'язувальної системи співвідношень залежать від історії навантажень.

3. Аналогічно до п. 2, але із застосуванням теорії варіаційних нерівностей та методу скінченних елементів, вихідна задача теж розбивається на низку кроків, проте – відносно переміщень у вузлах скінченно-елементної сітки (точніше, – прирощень переміщень). Відмінністю від традиційних постановок, аналогічно до п. 2, є залежність усіх компонент розв'язувальних співвідношень від поточного напру-

жено-деформованого стану та історії навантаження у кожній точці контактуючих тіл. Це відрізняє такі співвідношення від традиційних для контакту тіл із фізично лінійними матеріалами. При цьому досягається перевага у частині урахування історії процесу контактної взаємодії.

4. Здійснено узагальнення розв'язувальної системи співвідношень для дослідження контактної взаємодії та пружно-пластичного деформування елементів машин військового та цивільного призначення. Воно полягає в уніфікованому записі гранично- та скінченно-елементних формулювань у вигляді послідовності задач квадратичного програмування. Відмінність від традиційних постановок полягає у змінюваних компонентах, які формують дискретизований функціонал та обмеження. Ця особливість відображає залежність розв'язку від поточного напружено-деформованого стану та історії навантаження.

Розроблені підходи, моделі та методи досліджень можуть бути застосовані до аналізу напружено-деформованого стану контактуючих елементів машин військового та цивільного призначення із урахуванням пружно-пластичного деформування їхніх матеріалів.

Список літератури

1. Аврунин Г. А., Кабаненко И. В., Хавиль В. В., Истратов А. В., Богачев С. В., Лизунов К. М. Объемная гидропередача с шариковыми поршнями ГОП-900: характеристики и технический уровень. *Механіка та машинобудування*. Харків: НТУ «ХПІ». 2004. № 3. С. 14–21.
2. Ткачук М. М. Теоретичні основи забезпечення високих технічних характеристик машин військового та цивільного призначення на основі дослідження міцності складнопрофільних деталей. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Серія: *Машинознавство та САПР*. Зб. наук. праць. Харків, НТУ «ХПІ». 2017. № 12(1234). С. 86–95.
3. Zhao J., E. Vollebregt, C. Oosterlee Extending the BEM for elastic contact problems beyond the half-space approach. *Mathematical Modelling and Analysis*. 2016, vol. 21 (1), pp. 119–141.
4. Cinat P., Paggi M., Gneco G. Identification of Roughness with Optimal Contact Response with respect to Real Contact Area and Normal Stiffness. *Mathematical Problems in Engineering*. 2019, vol. 2019, pp. 1–11. <https://doi.org/10.1155/2019/7051512>.
5. Li Q., Popov V. L. Adhesive contact between a rigid body of arbitrary shape and a thin elastic coating. *Acta Mechanica*. 2019, vol. 230, iss. 7, pp. 2447–2453.
6. Stephan E. P., Tran T. *FEM–BEM Coupling // Schwarz Methods and Multilevel Preconditioners for Boundary Element Methods*. Springer, Cham, 2021, pp. 331–366.
7. Nagaraj M. H. et al. Nonlinear analysis of compact and thin-walled metallic structures including localized plasticity under contact conditions. *Engineering Structures*. 2020. Vol. 203, pp. 109819.
8. Savinkin V. V. et al. Investigation of the Strength Parameters of Drilling Pumps during the Formation of Contact Stresses in Gears. *Applied Sciences*. 2021, vol. 11, iss. 15, pp. 7076.
9. Kyznetsova V.N.; Savinkin V.V.; Ratushnaya T.Y.; Sandu A.V.; Vizureanu P. Study of the spatial distribution of forces and stresses on wear surfaces at optimization of the excavating part of an earthmoving machine transverse profile. *Coatings*. 2021, vol. 182, pp. 1–16.
10. Галанин М.П., Родин А.С. Применение метода декомпозиции области для решения задачи контактного взаимодействия осесимметричных тел. *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2020. № 41. 30 с. <http://doi.org/10.20948/prepr-2020-41>.
11. Kozachok O. P., B. S. Slobodyan, R. M. Martynyak. Interaction of two elastic bodies in the presence of periodically located gaps filled with a real gas. *J. Math. Sci*. 2017, vol. 222, iss. 2, pp. 131–142.
12. Zienkiewicz O. C., R. L. Taylor, J. Z. Zhu. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. 7th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann. 2013. 756 p.

13. Tkachuk M. M., Grabovskiy A., Tkachuk M. A., Hrechka I., Ishchenko O., Domina N. Investigation of multiple contact interaction of elements of dividing stamps. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019, no. 4/7(100), pp. 6–15
14. Tkachuk M. M., A. Grabovskiy, M. A. Tkachuk, M. Saverska, Hrechka I. A semi-analytical method for analysis of contact interaction between structural elements along aligned surfaces. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020, vol. 1/7 (103), pp. 16–25.
15. Atroshenko O, Bondarenko O, Ustinenko O, Tkachuk M, Diomina N. A numerical analysis of non-linear contact tasks for the system of plates with a bolted connection and a clearance in the fixture. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2016, vol. 1/7(79), pp. 24–29.
16. Deng B. et al. Sub-surface stress analysis of slewing bearing ball based on plastic deformation. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. – IOP Publishing, 2020, vol. 768, iss. 4, pp. 042027.
17. Segal V. Review: Modes and Processes of Severe Plastic Deformation (SPD). *Materials*. 2018, vol. 11, iss. 7, pp. 1175.
18. Obiko J. O., Mwema F. M., Bodunrin M. O. Finite element simulation of X20CrMoV121 steel billet forging process using the Deform 3D software. *SN Applied Sciences*. 2019, vol.1, iss. 9, pp. 1–10.
19. Palkov I. A., Shulzhenko M. H. Stress-Strain State of Steam Turbine Lock Joint under Plastic Deformation. *Проблеми машиностроения*. 2020. Т. 23. №. 4. С. 28–37.
20. Лавинский Д. В., Морачковский О. К. Упругопластическое деформирование контактно-взаимодействующих тел при воздействии импульсного электромагнитного поля. *Проблеми прочності*. 2016. Т. 6. Р. 36–45.
21. Grabovskiy A., Tkachuk M., Hrechka I., Sierykov V. Contact interaction of a ball piston and a running track in a hydrovolumetric transmission. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. 2021, pp. 195–203 ISSN 2195-4356.
22. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В., Ткачук А.В., Крюков С.Д., Богач А.С. Оценка влияния шероховатости на контактные давления в сопряжении сложнопрофильных тел. *Механіка та машинобудування*. 2014. № 1. С. 29–35.
23. Ткачук М. М. *Мікромеханічні моделі та методи осереднення властивостей матеріалів мережевої структури та проміжних шарів контактуючих тіл*. Автореф. дисертації на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук. Спеціальність 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України. Харків, 2019. 43 с.
24. Васидзу К. *Вариационные методы в теории упругости и пластичности*. Москва: Мир, 1987. 542 с.
25. Kinderlehrer D., Stampacchia G. An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications. *Classics in Applied Mathematics (Tom 31)*. SIAM, 2000. 333 p.
26. Прокопишин І. І., Дияк І. І., Прокопишин І. А. Алгоритми декомпозиції області для осесиметричної задачі про контакт пружних тіл. *Прикл. проблеми мех. і мат.* 2019. Вип. 17. С. 68–81.
27. Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A., Prokopyshyn I. I. Contact of elastic bodies with nonlinear Winkler surface layers. *Journal of Mathematical Sciences*, 2015/3, vol. 205, iss. 4, pp. 535–53.
28. Trémolières R., Lions J.-L., Glowinski R. Numerical Analysis of Variational Inequalities. Amsterdam: Elsevier, 2011. 775 p.
29. Kanno, Y. *Nonsmooth Mechanics and Convex Optimization*. CRC Press, 2011. 445 p.
30. Boyd, S., Boyd, S. P., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge university press. 727 p.
3. Zhao J., E. Vollebregt, C. Oosterlee Extending the BEM for elastic contact problems beyond the half-space approach. *Mathematical Modelling and Analysis*. 2016, vol. 21 (1), pp. 119–141.
4. Cinat P., Paggi M., Gnecco G. Identification of Roughness with Optimal Contact Response with respect to Real Contact Area and Normal Stiffness. *Mathematical Problems in Engineering*. 2019, vol. 2019, pp. 1–11. <https://doi.org/10.1155/2019/7051512>.
5. Li Q., Popov V. L. Adhesive contact between a rigid body of arbitrary shape and a thin elastic coating. *Acta Mechanica*. 2019, vol. 230, iss. 7, pp. 2447–2453.
6. Stephan E. P., Tran T. *FEM–BEM Coupling // Schwarz Methods and Multilevel Preconditioners for Boundary Element Methods*. Springer, Cham, 2021, pp. 331–366.
7. Nagaraj M. H. et al. Nonlinear analysis of compact and thin-walled metallic structures including localized plasticity under contact conditions. *Engineering Structures*. 2020, vol. 203, pp. 109819.
8. Savinkin V. V. et al. Investigation of the Strength Parameters of Drilling Pumps during the Formation of Contact Stresses in Gears. *Applied Sciences*. 2021, vol. 11, iss. 15, pp. 7076.
9. Kyznetsova V.N.; Savinkin V.V.; Ratushnaya T.Y.; Sandu A.V.; Vizureanu P. Study of the spatial distribution of forces and stresses on wear surfaces at optimization of the excavating part of an earthmoving machine transverse profile. *Coatings*. 2021, vol. 182, pp.1–16.
10. Halanyn M.P., Rodyn A.S. Prymeneny metoda dekompozitsyy oblasti dlia resheniya zadachy kontaktnoho vzaymodeistviya osesymetrychnykh tel. Preprynty YPM ym. M.V.Keldysha. 2020, vol. 41. 30 p. <http://doi.org/10.20948/prepr-2020-41>.
11. Kozachok O. P., B. S. Slobodyan, R. M. Martynyak. Interaction of two elastic bodies in the presence of periodically located gaps filled with a real gas. *J. Math. Sci*. 2017, vol. 222, iss. 2, pp. 131–142.
12. Zienkiewicz O. C., R. L. Taylor, J. Z. Zhu. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. 7th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann. 2013. 756 p.
13. Tkachuk M. M., Grabovskiy A., Tkachuk M. A., Hrechka I., Ishchenko O., Domina N. Investigation of multiple contact interaction of elements of dividing stamps. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019, vol. 4/7(100), pp. 6–15
14. Tkachuk M. M., A. Grabovskiy, M. A. Tkachuk, M. Saverska, Hrechka I. A semi-analytical method for analysis of contact interaction between structural elements along aligned surfaces. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020, vol. 1/7 (103), pp. 16–25.
15. Atroshenko O, Bondarenko O, Ustinenko O, Tkachuk M, Diomina N. A numerical analysis of non-linear contact tasks for the system of plates with a bolted connection and a clearance in the fixture. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2016, vol. 1/7(79), pp. 24–29.
16. Deng B. et al. Sub-surface stress analysis of slewing bearing ball based on plastic deformation. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. – IOP Publishing, 2020, vol. 768, iss. 4, pp. 042027.
17. Segal V. Review: Modes and Processes of Severe Plastic Deformation (SPD). *Materials*. 2018, vol. 11, iss. 7, pp. 1175.
18. Obiko J. O., Mwema F. M., Bodunrin M. O. Finite element simulation of X20CrMoV121 steel billet forging process using the Deform 3D software. *SN Applied Sciences*. 2019, vol. 1, iss. 9, pp. 1–10.
19. Palkov I. A., Shulzhenko M. H. Stress-Strain State of Steam Turbine Lock Joint under Plastic Deformation. *Problemy mashynostroeniya*. 2020, vol. 23, iss. 4, pp. 28–37.
20. Lavynskiy D. V., Morachkovskiy O. K. Upruhoplastycheskoe deformatsionnoye kontaktno-vzaymodeistviushchykh tel pry vozdeystviy ympulsnoho elektromagnitnoho polia. *Problemy prochnosti*. 2016, vol. 6, pp. 36–45.

References (transliterated)

1. Avrunin G. A., Kabanenko I. V., Khavil' V. V., Istratov A. V., Bogachev S. V., Lizunov K. M. Ob'emnaya gidroperedacha s sharikovymi porshnyami GOP-900: kharakteristiki i tekhnicheskij uroven'. *Mekhanika ta mashinobuduvannya*. Kharkiv: NTU «KhPI». 2004, no. 3, pp. 14–21.
2. Tkachuk M. M. Teoretychni osnovy zabezpechennia vysokyykh tekhnichnykh kharakterystyk mashyn viiskovoho ta tsyvilnoho pryznachennia na osnovi doslidzhennia mitsnosti skladnoprofilnykh detalie. *Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «Kharkivskiy politekhnichnyi instytut». Seriya: Mashynoznavstvo ta SAPR. Zb. nauk. prats.* Kharkiv, NTU «KhPI». 2017, vol. 12(1234), pp. 86–95.
21. Grabovskiy A., Tkachuk M., Hrechka I., Sierykov V. Contact interaction of a ball piston and a running track in a hydrovolumetric transmission. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. 2021, pp. 195–203. ISSN 2195-4356.
22. Tkachuk N.N., Skrypchenko N.B., Lytvynenko A.V., Tkachuk A.V., Kriukov S.D., Bohach A.S. Otsenka vliyaniya sherokhovatyosti na kontaktnye davleniya v sopriazhenyy slozhnoprofilnykh tel. *Mekhanika ta mashynobuduvannya*. 2014, no. 1, pp. 29–35.
23. Tkachuk M. M. *Mikromekhanichni modeli ta metody oserednennia vlastyvostei materialiv merezhevoi struktury ta promizhnykh sharyv kontaktuiuchykh til*. Avtoref. dysertatsii na zdobuttia naukovoho stupenia doktora tekhnichnykh nauk. Spetsialnist 01.02.04 –

- mekhanika deformivnogo tverdogo tila. Instytut problem mashynobuduvannia im. A.M. Pidhornoho NAN Ukrainy. Kharkiv, 2019. 43 p.
24. Vasidzu K. *Variatsionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti*. Moskva: Mir, 1987. 542 p.
 25. Kinderlehrer D., Stampacchia G. An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications. *Classics in Applied Mathematics (Tom 31)*. SIAM, 2000. 333 p.
 26. Prokopyshyn I. I., Dyiak I. I., Prokopyshyn I. A. Alhorytmy dekompozitsii oblasti dlia osesymetrychnoi zadachi pro kontakt pruzhnykh til. *Prykl. problemy mekh. i mat.* 2019, vol. 17, pp. 68–81.
 27. Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A., Prokopyshyn I. I. Contact of elastic bodies with nonlinear Winkler surface layers. *Journal of Mathematical Sciences*, 2015/3, vol. 205, iss. 4, pp. 535–53.
 28. Trémolières R., Lions J.-L., Glowinski R. Numerical Analysis of Variational Inequalities. *Amsterdam: Elsevier*, 2011. 775 p.
 29. Kanno, Y. *Nonsmooth Mechanics and Convex Optimization*. CRC Press, 2011. 445 p.
 30. Boyd, S., Boyd, S. P., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge university press. 727 p.

Надійшла (received) 05.02.2022

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ткачук Микола Миколайович (Ткачук Николай Николаевич, Tkachuk Mykola M.) – доктор технічних наук, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», старший науковий співробітник кафедри інформаційних технологій та систем колісних і гусеничних машин імені О.О. Морозова; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4753-4267>; e-mail: m.tkachuk@tmm-sapr.org.

Саверська Марія Сергіївна (Саверская Мария Сергеевна, Saverska Mariia) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9271-9586>; e-mail: m.saverska@tmm-sapr.org.

Куценко Сергій Володимирович (Куценко Сергей Владимирович, Kutsenko Serhii) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин»; м. Харків, Україна, e-mail: skutsenko@tmm-sapr.org.

Зінченко Олена Іванівна (Зинченко Елена Ивановна, Zinchenko Olena) – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2961-5861>; e-mail: zinchenko.zinchenko@gmail.com.

Клочков Ілля Євгенович (Клочков Илья Евгеньевич, Klochkov Illia) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», молодший науковий співробітник кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-69-01; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4923-2833>; e-mail: s008@tmm-sapr.org.

Ткачук Микола Анатолійович (Ткачук Николай Анатольевич, Tkachuk Mykola A.) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідувач кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4174-8213>; тел.: (057) 707-69-02; e-mail: tma@tmm-sapr.org.

Волошина Ірина Олександрівна (Волошина Ирина Александровна, Voloshyna Iryna) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», студентка гр. МІТ-218м, м. Харків, Україна; e-mail: s1802@tmm-sapr.org