

**О. В. УСТИНЕНКО, Н. О. ЛЕВИН, О. В. БОНДАРЕНКО, М. БОШАНСКИ, Р. В. ПРОТАСОВ,
С. В. АНДРИЄНКО, М. В. МАТЮШЕНКО**

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ С ВЫПУКЛО-УВГНУТЫМ КОНТАКТОМ: ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ ТА ЗМІННІ ПРОЕКТИВАННЯ

Зниження маси та габаритів зубчастих передач є актуальною задачею сучасного машинобудування. Одним із перспективних шляхів її розв'язання є застосування зацеплення з опукло-увігнутих контактом зубців. Тому дослідження присвячено розробці методів оптимального проектування циліндричних зубчастих передач з опукло-увігнутих контактом робочих поверхонь. Критерії оптимальності: мінімальні контактні напруження та (або) мінімальні відносні швидкості ковзання з урахуванням конструктивних, геометричних та технологічних обмежень. У якості об'єкта дослідження обрано С–С зацеплення, воно запропоновано словацькими вченими М. Бошанські та М. Верешем. Побудовано цільову функцію для випадку мінімізації контактних напружень. Критерій оптимальності сформульовано так: контактні напруження σ_H у зацепленні повинні приймати мінімально можливі значення при виконанні усіх обмежень. Також побудовано цільову функцію для випадку мінімізації відносних швидкостей ковзання профілів. Критерій оптимальності сформульовано так: відносні швидкості ковзання профілів λ у крайніх точках зацеплення повинні приймати мінімально можливі значення при виконанні усіх обмежень. Визначені змінні проектування: кут зацеплення в полюсі α_c , радіус кривизни верхньої частини лінії зацеплення r_{kh} , радіус кривизни нижньої частини лінії зацеплення r_{kd} . Обрано метод розв'язання задачі оптимального проектування. З усього різноманіття було обрано метод зондування простору параметрів проектування. У якості пробних точок використовуються точки ЛПт-последовності. Метод дає змогу оперувати значною кількістю параметрів – до 51, забезпечує достатню велику кількість рівномірно-розподілених пробних точок – до 2^{20} . У подальших дослідженнях планується сформувати систему обмежень на змінні проектування, розробити методики та алгоритми розв'язання задачі, а також провести тестові та перевіірочні розрахунки з метою підтвердження та оцінки отриманих теоретичних результатів.

Ключові слова: зубчаста передача, опукло-увігнутий контакт, оптимальне проектування, цільова функція, змінні проектування

**A. V. USTYNYENKO, N. A. LEVIN, A. V. BONDARENKO, M. BOŠANSKI, R. V. PROTASOV,
S. V. ANDRIENKO, N. V. MATYUSHENKO**

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ С ВЫПУКЛО-ВОГНУТЫМ КОНТАКТОМ: ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ И ПЕРЕМЕННЫЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Снижение массы и габаритов зубчатых передач является актуальной задачей современного машиностроения. Одним из перспективных путей ее решения является применение зацепления с выпукло-вогнутым контактом зубьев. Поэтому исследование посвящено разработке методов оптимального проектирования цилиндрических зубчатых передач с выпукло-вогнутым контактом рабочих поверхностей. Критерии оптимальности: минимальные контактные напряжения и (или) минимальные относительные скорости скольжения с учетом конструктивных, геометрических и технологических ограничений. В качестве объекта исследования выбрано С–С зацепление, оно предложено словацкими учеными М. Бошански и М. Верешем. Построена целевая функция для случая минимизации контактных напряжений. Критерий оптимальности сформулирован так: контактные напряжения σ_H в зацеплении должны принимать минимально возможное значение при выполнении всех ограничений. Также построена целевая функция для случая минимизации относительных скоростей скольжения профилей. Критерий оптимальности сформулирован так: относительные скорости скольжения профилей λ в крайних точках зацепления должны принимать минимально возможное значение при выполнении всех ограничений. Определены переменные проектирования: угол зацепления в полюсе α_c , радиус кривизны верхней части линии зацепления r_{kh} , радиус кривизны нижней части линии зацепления r_{kd} . Выбран метод решения задачи оптимального проектирования. Из всего разнообразия был выбран метод зондирования пространства параметров проектирования. В качестве пробных точек использованы точки ЛПт-последовательности. Метод позволяет оперировать значительным количеством параметров – до 51, обеспечивает достаточно большое количество равномерно распределенных пробных точек – до 2^{20} . В дальнейших исследованиях планируется сформировать систему ограничений на переменные проектирования, разработать методики и алгоритмы решения задачи, а также провести тестовые и проверочные расчеты для подтверждения и оценки полученных теоретических результатов.

Ключевые слова: зубчатая передача, выпукло-вогнутый контакт, оптимальное проектирование, целевая функция, переменные проектирования

**O. USTYNYENKO, N. LEVIN, O. BONDARENKO, M. BOŠANSKÝ, R. PROTASOV,
S. ANDRIENKO, M. MATUSHENKO**

OPTIMAL DESIGN OF CYLINDRICAL GEARS WITH CONVEX-CONCAVE CONTACT: OBJECTIVE FUNCTION AND DESIGN VARIABLES

Reducing the mass and dimensions of gears is an actual task of modern mechanical engineering. One of the perspective ways to solve it is the use of gearing with a convex-concave contact of the teeth. Therefore, the study is devoted to the development of methods for the optimal design of cylindrical gears with convex-concave contact of the working surfaces. Optimality criteria: minimum contact stresses and (or) minimum relative sliding velocities, taking into account design, geometrical and technological constraints. C-C gearing was chosen as the object of research. It was proposed by the Slovak scientists M. Boshanski and M. Veresh. An objective function is constructed for the case of minimizing contact stresses. The optimality criterion is formulated as follows: contact stresses σ_H in the mesh must take the minimum possible value when all constraints are met. An objective function is also constructed for the case of minimizing the relative sliding velocities of profiles. The optimality criterion is formulated as follows: the relative sliding s velocities of profiles λ at the extreme points of mesh must take the minimum possible value when all the constraints are met. Variables planning are defined. These are pressure angle at the pole α_c , the curvature radius at the upper part of contact path r_{kh} , and the curvature radius at the lower part of contact path r_{kd} . A method for solving the problem of optimal design is chosen. The method of probing the space of design parameters was chosen from all the variety. The points of the LPt-sequence are used as test points. The method allows you to operate with a significant number of parameters – up to 51, provides a sufficiently large number of evenly distributed test points – up to 2^{20} . In further studies, it is planned to form a system of constraints on variables planning, to develop methods and algorithms for solving the problem. Also carry out test and verification calculations to confirm and evaluate the theoretical results.

Keywords: gear, convex-concave contact, optimal design, objective function, variables planning

© O. V. Устиненко, Н. О. Левин, О. В. Бондаренко, М. Бошанські,
Р. В. Протасов, С. В. Андрієнко, М. В. Матюшенко, 2021

Вступ. Актуальність задачі. У сучасному машинобудуванні важливе місце займають циліндричні зубчасті передачі. Вони мають широке застосування в усіх галузях машинобудування, транспорту, у гірському та металургійному виробництві, в будівельній та побутовій техніці тощо. У зв'язку з цим поліпшення якісних показників зубчастих передач, в першу чергу їх навантажувальної здатності та масогабаритних характеристик, є актуальним завданням сучасної української прикладної науки.

Найбільш поширене евольвентне зачеплення, незважаючи на відносно простоту геометрії та виготовлення, має суттєві недоліки, основним з яких є двоопуклий контакт в зачепленні і, як наслідок, обмежена контактна міцність зубців передач. Тому один із шляхів суттєвого підвищення навантажувальної здатності зубчастих передач та одночасного поліпшення масогабаритних характеристик є застосування зачеплення з опукло-увігнутих контактом (ОУК) зубців.

Аналіз існуючих досліджень. В різні часи ряд авторів запропонував такі зачеплення, серед яких слід відзначити англійських інженерів Ф. Бостона, С. Брамлі-Мура (1921), американського інженера Е. Вільдгабера (1923), італійця А. Роано (1947), радянського дослідника М. Л. Новікова (1958), словацьких вчених М. Бошанські та М. Вереша (2000-2020), українських вчених І. Є. Грицяя, О. С. Вітренко, П. Л. Носко, В. П. Шишова та А. І. Павлова. Розглянемо деякі з цих робіт.

Розроблена М. Л. Новіковим нова система зачеплення [1] має опукло-увігнутий контакт, який забезпечує низку переваг. Вона знайшла застосування в ряді унікальних редукторів, до яких ставилися вимоги передачі значного обертового моменту при наднизькій масі та габаритах. В світі передачі з таким зачепленням мають назву «зачеплення Вільдгабера-Новікова» [2]. Однак поряд з перевагами це зачеплення має деякі недоліки, основним з яких є неможливість зробити передачу прямозубцевою.

В роботах В. П. Шишова [3] запропоновано виконувати циліндричні прямозубцеві передачі з конхoidalною лінією зачеплення та опукло-увігнутими профілями зубців. Розроблено метод синтезу передач за показниками навантажувальної здатності, заснований на знаходженні поверхні, що виробляє; це забезпечує створення зубців. Завдання синтезу зводиться до розв'язання диференціальних рівнянь, що описують зубчасте зачеплення через параметри поверхні, що виробляє.

В роботі Ю. В. Анікіна [4] запропоновано новий тип зачеплення, який попередньо був названий ним синусоїдальним. Ці передачі не набули поширення з огляду технологічної складності створення та контролю зносу ріжучого інструмента (фрези або довбача). Втім, у роботах І. Є. Грицяя запропоновано новий підхід щодо обробки таких передач [5].

Українським вченим А. І. Павловим на підставі побудови Бобільє запропоновано нове сімейство зачеплень, яке названо ним евольвентним [6]. У цьому зачепленні профіль початкового контуру визначається по заданій лінії зачеплення, що забезпечує опукло-увігнутий контакт. Особливістю вихідного

рівняння евольвентної інструментальної рейки є можливість завдання двох незалежних один від одного параметрів, що, в свою чергу, розширює можливості синтезу нових профілів та дає можливість створення сімейства евольвентних зачеплень, з яких можна підібрати раціональні за якісними та міцністими показниками.

В роботах М. Бошанські та М. Вереша [7] пропонується створювати опукло-увігнутий профіль зубця шестерні по попередньо заданій лінії зачеплення (рис. 1). При цьому лінія зачеплення складається або з двох симетричних відносно полюса зачеплення дуг (дуги рівного радіусу) або з несиметричних дуг (дуги, які не дорівнюють радіусу). У разі симетричної лінії зачеплення має місце увігнуто-опуклий контакт, а в разі несиметричної – опукло-увігнутий.

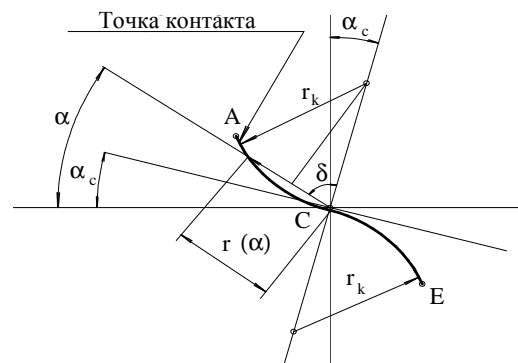


Рисунок 1 – Лінія зачеплення С–С передачі

Постановка задачі. Виконаний на наш час великий обсяг теоретичних та експериментальних досліджень зачеплень з ОУК продемонстрував їхню вагому перевагу перед традиційним евольвентним. Але треба констатувати, що передачі з ОУК так і не набули значного впровадження у світовій промисловості. При широкому розгляді проблем зубчастих передач з ОУК, на думку авторів, є три фактори, вплив яких є вирішальним при їх впровадженні у виробництво: технологія виготовлення та контролю зубчастих коліс, пошук граничних параметрів зачеплення (блокуючий контур) та оптимізація параметрів передач.

На сьогоднішній день можливості технології виготовлення та контролю зубчастих коліс знаходяться на такому рівні, що складність профілю зубця не є підставою для значного подорожчання їх виробництва. У такому разі на перший план виходить питання збільшення навантажувальної здатності передачі з ОУК порівняно з традиційною евольвентною, тобто потрібна наявність інших переваг, окрім собівартості, при виборі типу зачеплення. Відповідно на це має бути глибоке дослідження конкретного зачеплення з ОУК та границь його існування, що дасть змогу оптимізувати зубчасту передачу для заданих умов експлуатації.

Одним з перспективних напрямів таких досліджень є визначення основних геометричних та конструктивних параметрів зачеплення за допомогою методів математичної оптимізації. Варіюючи цими параметрами з урахуванням конструктивних, геоме-

тричних та технологічних обмежень, ми маємо можливість отримати передачу з мінімальними контактними напруженнями у зачепленні (тобто з мінімальними габаритами при заданому навантаженні), або з мінімальними значеннями відносних швидкостей ковзання профілів (максимальна зносостійкість), або знайти компромісний варіант, який буде задовольняти максимальній зносо-контактній витривалості.

Незважаючи на деякі вже відомі недоліки існуючих передач з ОУК, у тому числі непереборні, пов'язані з геометрією робочого профілю зубця та, як наслідок, з дещо гіршими якісними показниками, вони можуть бути успішно впроваджені у хвильових передачах, високонавантажених редукторах тощо. У свою чергу, синтез таких передач за допомогою надбудованої над теорією зачеплення методики оптимального проектування дозволив би виділити області існування зачеплень з високоєфективними показниками та однозначно обґрунтувати перевагу передач з ОУК над евольвентними.

Слід зазначити, що на сьогоднішній день для більшості зубчастих передач з ОУК бракує досліджень як в області границь їх існування, так і в оптимізації. Як вважають автори, розв'язання цих задач вже відстає за часом від потреб та можливостей сучасного машинобудування. Таким чином, запропонована робота є актуальною для сучасного машинобудування.

Отже, метою дослідження є розробка методів оптимального проектування циліндричних зубчастих передач з опукло-увігнутих контактом робочих поверхонь за критерієм мінімальних контактних напружень та (або) мінімальних відносних швидкостей ковзання з урахуванням конструктивних, геометричних та технологічних обмежень.

Для досягнення зазначеної мети поставлені наступні задачі:

1. Розробити математичну модель проектування зубчастих передач з ОУК з оптимальними параметрами, а саме:

а) побудувати цільові функції за критеріями мінімальних контактних напружень та мінімальних відносних швидкостей ковзання;

б) обрати змінні проектування;

в) сформулювати систему обмежень на змінні проектування.

2. Обрати методи розв'язання задачі оптимального проектування зубчастих передач з ОУК.

3. Розробити методики та алгоритми розв'язання задачі.

4. Провести тестові та перевіірочні розрахунки з метою підтвердження та оцінки отриманих теоретичних результатів.

Очікуються наступні результати:

– наукові: математична модель та методи оптимального проектування зубчастих передач з ОУК за критеріями мінімальних контактних напружень та відносних швидкостей ковзання;

– практичні: прикладні методи та методики оптимізації, основні геометричні та конструктивні параметри зачеплень, що оптимізовані.

З усього різноманіття існуючих передач з ОУК нами для подальших досліджень було обране С–С

зачеплення, що запропоноване М. Бошанські та М. Верешем [7]. Це пов'язано з тим, що:

– воно може бути як прямо-, так і косозубцевим;

– визначені геометричні та якісні показники зачеплення, а саме: кривизна робочого профілю зубця, коефіцієнт перекриття та швидкість ковзання в зачепленні, а також отримані обмеження при синтезі профіля пов'язані з можливою інтерференцією в зачепленні;

– проведені натурні випробування деяких С–С передач, результати яких підтвердили показники, отримані аналітично;

– проведено оцінку впливу вихідних параметрів при синтезі зубчастих коліс на якісні показники передачі (коефіцієнт перекриття та швидкість ковзання).

Таким чином, запропоноване в якості об'єкту дослідження С–С зачеплення достатньо добре вивчене з точки зору теорії, підтверджене експериментами та може служити основою для багатокритеріальної оптимізації зубчастих передач, а також для пошуку або розширення меж існування параметрів зачеплення.

Також відзначимо, що більшість наших подальших досліджень (за виключенням деяких математичних викладок) можливо з мінімальними витратами часу адаптувати для оптимального проектування деяких інших зачеплень з ОУК.

Таким чином, метою цієї статті буде початкова постановка оптимізаційної задачі, а саме:

– побудова цільових функцій за критеріями мінімальних контактних напружень у зачепленні та мінімальних відносних швидкостей ковзання профілів;

– визначення змінних проектування;

– обрання методу розв'язання задачі оптимального проектування.

Побудова цільової функції у випадку мінімізації контактних напружень. Критерій оптимальності у цьому випадку сформулюємо досить просто: контактні напруження у зачепленні повинні приймати мінімально можливе значення при виконанні усіх обмежень. Тоді запишемо цільову функцію у наступному вигляді:

$$F_{\sigma} = \sigma_H \rightarrow \min. \quad (1)$$

Для розрахунку контактних напружень σ_H , МПа, скористаємось загальновідомою формулою Г. Герца [8] для випадку початкового дотику пружних тіл по лінії,

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{F_n E_H}{b_w \rho_H}}, \quad (2)$$

де $\rho_H = (\rho_1 \cdot \rho_2) / (\rho_2 \pm \rho_1)$ – приведений радіус кривизни в контактні двох поверхонь, він є основним геометричним фактором, який впливає на величину контактних напружень (знак "+" при двоопуклому контактні, а "-" при опукло-увігнутому);

$E_H = 2(E_1 \cdot E_2) / (E_1 + E_2)$ – приведений модуль пружності матеріалу;

b_w – робоча ширина зубця;

F_n – нормальне зусилля у зачепленні.

Радіуси кривизни будемо визначати за допомогою відомої формули з диференціальної геометрії для випадку параметричного завдання кривої,

$$\frac{1}{\rho_{1,2}} = \frac{y''_{1,2}(\alpha) \cdot x'_{1,2}(\alpha) - x''_{1,2}(\alpha) \cdot y'_{1,2}(\alpha)}{(x'^2_{1,2}(\alpha) + y'^2_{1,2}(\alpha))^{3/2}}. \quad (3)$$

Тут у якості змінного параметра виступає поточний кут профіля зубця α , який змінюється у межах

$$\alpha_p \leq \alpha_C \leq \alpha_a,$$

де α_C – кут зачеплення в полюсі;

α_a та α_p – кути профілю на вершині зубця та у нижній точці активного профіля.

Параметричні рівняння, за якими визначаються координати точок профілів зубців шестерні 1 та колеса 2, мають наступний вигляд [7]:

$$\begin{aligned} x_{1,2;h,d} &= \mp 2r_{kh,d} \sin(\alpha - \alpha_C) \cos(\alpha + \varphi_r(\alpha)) + r_{1,2} \sin \varphi_r(\alpha); \\ y_{1,2;h,d} &= \pm 2r_{kh,d} \sin(\alpha - \alpha_C) \sin(\alpha + \varphi_r(\alpha)) + r_{1,2} \cos \varphi_r(\alpha); \\ \varphi_r &= \pm \frac{2r_{kh,d}}{r_{1,2}} \left[(\alpha - \alpha_C) \cos \alpha_C + \sin \alpha_C \operatorname{lg} \frac{\cos \alpha_C}{\cos \alpha} \right], \end{aligned} \quad (4)$$

де r_{kh} та r_{kd} – радіуси кривизни відповідно верхньої та нижньої частин лінії зачеплення, які задаються проектувальником;

$r_{1,2} = 0,5m \cdot z_{1,2}$ – ділильні радіуси шестерні та колеса.

Таким чином, рівняння (1)...(4) є математичною моделлю оптимізації С–С зачеплення за критерієм мінімальних контактних напружень.

Побудова цільової функції у випадку мінімізації відносних швидкостей ковзання профілів. Критерій оптимальності у цьому випадку сформулюємо так: відносні швидкості ковзання профілів u у крайніх точках зачеплення повинні приймати мінімально можливе значення при виконанні усіх обмежень. Тоді запишемо цільову функцію у наступному вигляді:

$$F_\lambda = \lambda \rightarrow \min. \quad (5)$$

Максимальне значення відносної швидкості ковзання визначається за залежністю [9]

$$\lambda = \max \left\{ \frac{V_{ya}}{V_{Fy1a}}, \frac{V_{yp}}{V_{Fy1p}}, \frac{V_{ya}}{V_{Fy1a} \cdot u}, \frac{V_{yp}}{V_{Fy1p} \cdot u} \right\}, \quad (6)$$

У залежності (6):

V_{ya} та V_{yp} – абсолютні швидкості ковзання на вершині зубця та у нижній точці активного профіля [10],

$$\begin{aligned} V_{ya} &= \sqrt{(x_{1c}^2 - x_{1a}^2) + (y_{1c}^2 - y_{1a}^2)} \left(u + \frac{1}{u} \right); \\ V_{yp} &= \sqrt{(x_{1c}^2 - x_{1p}^2) + (y_{1c}^2 - y_{1p}^2)} \left(u + \frac{1}{u} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

де x_a та y_a – координати профілю на вершині зубця;

x_p та y_p – координати нижньої точки активного

профілю;

V_{Fy1a} та V_{Fy1p} – дотичні складові швидкості ковзання на вершині зубця та у нижній точці активного профіля

$$V_{Fy1a} = \omega_1 r_a \sin \alpha_a; \quad V_{Fy1p} = \omega_1 r_p \sin \alpha_p, \quad (8)$$

де r_a та r_p – радіуси на вершині зубця у нижній точці активного профіля;

$u = z_2 / z_1$ – передатне число.

Таким чином, рівняння (5)...(8) є математичною моделлю оптимізації С–С зачеплення за критерієм мінімальних відносних швидкостей ковзання профілів.

Визначення змінних проектування. На форму профілю бічної поверхні зубця С–С зачеплення, його основні кінематичні та геометричні характеристики можуть впливати на наступні вихідні параметри [7]:

- кут зачеплення в полюсі α_C ;
- радіуси кривизни верхньої та нижньої частин лінії зачеплення r_{kh} та r_{kd} ;
- коефіцієнти висоти головки та ніжки зубця вихідного контуру h_a^* та h_f^* ;
- модуль зачеплення m ;
- числа зубців шестерні та колеса z_1 та z_2 (рис. 2).

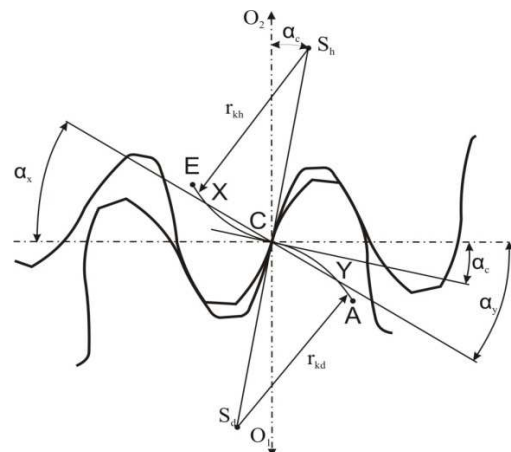


Рисунок 2 – Схема С–С зачеплення

Параметри h_a^* та h_f^* , m , z_1 та z_2 зазвичай призначаються проектувальником, виходячи із потрібного передатного числа та згинальної міцності зубців. Вони не мають безпосереднього впливу на контактні напруження та відносні швидкості ковзання профілів. Інші параметри безпосередньо впливають на радіуси кривизни профілів та, відповідно, на контактні напруження [7, 8]. Аналогічно від них суттєво залежать швидкості ковзання профілів у зачепленні. Виходячи з цього, обираємо у якості змінних проектування для обох цільових функцій наступні параметри:

1. Кут зачеплення в полюсі α_C .
2. Радіус кривизни верхньої частини лінії зачеплення r_{kh} .
3. Радіус кривизни нижньої частини лінії зачеплення r_{kd} .

За необхідності можливо додати ще дві змінних проектування (це може бути доцільним у випадку мінімізації відносних швидкостей ковзання):

- 4, 5. Коефіцієнти висоти головки та ніжки зубця

вихідного контуру h_a^* та h_f^* .

Обрання методу розв'язання задачі оптимального проектування. На сьогоднішній день існує велика кількість шляхів розв'язання оптимізаційних задач [11]. З усього різноманіття було обрано метод, який добре себе зарекомендував під час оптимізації тривальних коробок передач, трансмісій та редукторів [12, 13], а саме, зондування простору параметрів, де у якості пробних точок в одиничному багатомірному кубі використовуються точки ЛПт-последовності [14]. Метод дає змогу оперувати значною кількістю параметрів (до 51), а також забезпечує достатньо велику кількість рівномірно-розподілених пробних точок (до 2^{20}).

Використання цього методу у нашому випадку обумовлено тим, що одночасно можливо оцінити максимуми та мінімуми декількох цільових функцій, що задані в одиничному багатомірному кубі; бо це можливо зробити за одними й тими ж точками. Таким чином, ми зможемо одночасно знаходити два набори параметрів для зачеплення, які відповідають мінімальним контактним напруженням та мінімальним відносним швидкостям ковзання.

Також досить вагомим аргументом є те, що ЛПт-последовності – це найкращі серед відомих у сучасний час рівномірно розподілені последовності [14].

Наведемо основні розрахункові залежності [14], що стосуються рівномірно розподілених последовностей.

Якщо точки Q_i з декартовими координатами $(q_{i,1}, \dots, q_{i,n})$ є рівномірно розподіленою последовністю в K^n (одиничний n -вимірний куб), то точки A_i з декартовими координатами $(\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n})$, де при $j = 1, 2, \dots, n$ (n – кількість змінних проектування),

$$\alpha_{i,j} = a_j + (b_j - a_j) \cdot q_{i,j} \quad (9)$$

є рівномірно розподіленою последовністю в паралелепіпеді Π (n -вимірний паралелепіпед), що складається з точок $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, координати яких задовольняють нерівностям $a_j \leq \alpha_j \leq b_j$.

Декартові координати $q_{i,j}$ для ЛПт-последовності обчислюються за арифметичним алгоритмом. Цей алгоритм базується безпосередньо на розрахунках за таблицею чисельників $r_j^{(l)}$. За заданим номером точки i спочатку обчислюємо допоміжну величину m , а потім для кожного j -го параметру (номер змінної проектування) обчислюємо координату $q_{i,j}$,

$$m = 1 + \left\lceil \frac{\ln i}{\ln 2} \right\rceil;$$

$$q_{i,j} = \sum_{k=1}^m 2^{-k+1} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{l=k}^m \left[2^{\{i^{-l}\}} \right] \cdot \left[2^{\{r_j^{(l)} 2^{k-l-1}\}} \right] \right\}, \quad (10)$$

де $\{z\}$ – ціла частина, а $\{z\}$ – дробова частина числа Z .

Таким чином, розв'язання задачі оптимального проектування методом ЛПт-пошуку складається з наступних етапів.

1. Завдання вхідних даних, у тому числі обмежень на змінні проектування.

2. Генерування декартових координат $q_{i,j}$ за залежністю (10).

3. Генерування значень змінних проектування $\alpha_{i,j}$ згідно залежності (9). Тут $i = 1, 2, \dots, 2^{20}$ – номер пробної точки; $j = 1, 2, 3, (4, 5)$ – порядковий номер змінної проектування; a_j, b_j – відповідно нижні та верхні обмеження на значення змінних проектування.

4. Перевірка обмежень на змінні проектування.

5. Складання масиву можливих варіантів.

6. Пошук мінімального значення шляхом сортування масиву.

Таким чином, математичний апарат ЛПт-пошуку дає змогу швидко та якісно знаходити оптимальні геометричні та конструктивні параметри С–С зачеплень.

Висновки:

1. Розв'язання задачі оптимізації циліндричних зубчастих передач з опукло-увігнутим контактом робочих поверхонь є перспективним напрямком досліджень, тому що дає змогу суттєво поліпшити навантажувальну здатність та масогабаритні показники механічних приводів.

2. Побудовано цільові функції оптимізації за критеріями мінімальних контактних напружень у зачепленні та мінімальних відносних швидкостей ковзання профілів. Рівняння С–С профілю та формули розрахунку його якісних показників успішно інтегровано до математичної моделі оптимізації.

3. Визначені змінні проектування, у якості яких обрані параметри, що безпосередньо впливають на контактні напруження та швидкості ковзання профілів у зачепленні. Це кут зачеплення в полюсі α_c ; радіус кривизни верхньої частини лінії зачеплення r_{kh} та радіус кривизни нижньої частини лінії зачеплення r_{kd} . За необхідності додаються ще дві: коефіцієнти висоти головки та ніжки зубця вихідного контуру h_a^* та h_f^* .

4. Обрано метод розв'язання задачі оптимального проектування, а саме зондування простору параметрів за допомогою ЛПт-последовності.

5. Запропоновано орієнтовну последовність розв'язання задачі оптимального проектування методом ЛПт-пошуку. Вона буде використана як підґрунтя для розробки докладного алгоритму оптимального проектування С–С зачеплень.

6. У подальших дослідженнях планується сформулювати систему обмежень на змінні проектування, розробити прикладні методики та алгоритми розв'язання задачі, провести тестові та перевірочні розрахунки з метою підтвердження і оцінки отриманих теоретичних результатів, а також запропонувати варіанти С–С зачеплень із підвищеною навантажувальною здатністю.

Список літератури

1. Korotkin V., Onishkov N., Kharitonov Yu. *Novikov gearing: achievements and development*. Nova Science Publishers, Inc., 2011. 272 p.
2. Radzevich P. Stephen. *High-Conformal gearing. Kinematics and Geometry*. CRC Pres, 2016. 349 p.
3. Шишов В. П., Носко П. Л., Филь П. В. *Теоретические основы синтеза передач зацеплением*. Луганськ, Видавництво СНУ ім. В. Даля, 2006. 408с.
4. Аникин Ю. В. *Синусоидальное зацепление: Основы геометро-кинематической теории*. Воронеж, Издательство Воронеж-

- ского университета, 1975. 61 с.
- Грицай І. Є., Литвиняк Я. М. Синусоїдальні зубчасті передачі як альтернатива традиційним передачам та новий метод їх виготовлення. *Вісник НТУ "ХПІ". Тематичний випуск "Проблеми механічного приводу"*. Харків, НТУ "ХПІ", 2009, №19. С. 43–53.
 - Павлов А. И. *Современная теория зубчатых зацеплений*. Харьков, ХНАДУ, 2005. 100 с.
 - Vereš, M., Božanský, M., Gaduš J. *Theory of Convex-Concave and plane cylindrical gearing*. STU, Bratislava, Slovakia, 2006. 180 p.
 - Protasov Roman, Andrienko Sergey, Ustinenko Alexander, Bondarenko Alexey, Matushenko Nicholay. Geometry Modeling of Gear and Chain Drive with Evolute Profile and Research of Its Contact Stress. *Fiabilitate și durabilitate (Fiability & Durability)*. "Constantin Brâncuși" University of Târgu Jiu. Târgu Jiu, May, 2017, Issue: 1(19)/2017, pp.287–293.
 - Stephen P. Radzevich. *Theory of Gearing Kinematics, Geometry, and Synthesis. Second Edition: Revised and Expanded*. Boca Raton, Taylor & Francis, CRC Press, 2018. 898 p.
 - Goldfarb Veniamin, Trubachev Evgenii, Barmina Natalya. *Advanced Gear Engineering*. Springer, Mechanisms and Machine Science. 2018. Volume 51. 499 p.
 - Rekleytys H., A. Reyvyndran, K. Rjehsdel. *Engineering Optimization*. New York, A Wiley-Interscience Publ., 1983.
 - Бондаренко О. В., Устиненко О. В., Скриков В. І. Приклад раціонального проектування зубчастого циліндричного двоступінчастого редуктору методом псевдовипадкового пошуку при багатьох критеріях. *Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Машинознавство та САПР*. Харків, НТУ "ХПІ", 2018, № 25 (1301). С. 31–35.
 - Ustinenko O., O. Bondarenko, I. Klochkov, V. Serykov. Multi-criteria optimization of tracked vehicle transmissions. *Proc. of 6th International BAPT Conference Power Transmissions*. 19–22.06.2019, Varna, 1 (2019), pp. 196–199.
 - Соболь И. М., Статников Р. Б. *Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями*. Москва, Дрофа, 2006. 175 с.
 - kinematicheskoj teorii [Sinusoidal gearing: Foundations of geometrical-kinematic theory]. Voronezh, Voronezhskij universitet Publ., 1975. 61 p.
 - Grycaj I. Je., Lytvynjak Ja. M. Synusoid'al'ni zubchasti peredachi jak al'ternatyva tradycijnym peredacham ta novyj metod i'h vygotovlennja [Sinusoidal gears as an alternative to traditional gears and a new method of their manufacture]. *Visnyk NTU "KhPI". Tematychnyj vypusk "Problemy mehanichnogo pryvodu"* [Bulletin of the NTU "KhPI". Thematic issue Problem of mechanical drive]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2009, no. 19, pp. 43–53.
 - Pavlov A. I. *Sovremennaya teoriya zubchatikh zaceplenij* [The modern theory of gearing]. Kharkov, KhNADUPubl., 2005, 100 p.
 - Vereš, M., Božanský, M., Gaduš, J. *Theory of Convex-Concave and plane cylindrical gearing*. STU, Bratislava, Slovakia, 2006. 180 p.
 - Protasov Roman, Andrienko Sergey, Ustinenko Alexander, Bondarenko Alexey, Matushenko Nicholay. Geometry Modeling of Gear and Chain Drive with Evolute Profile and Research of Its Contact Stress. *Fiabilitate și durabilitate (Fiability & Durability)*. "Constantin Brâncuși" University of Târgu Jiu. Târgu Jiu, May, 2017, Issue: 1(19)/2017, pp.287–293.
 - Stephen P. Radzevich. *Theory of Gearing Kinematics, Geometry, and Synthesis. Second Edition: Revised and Expanded*. Boca Raton, Taylor & Francis, CRC Press, 2018. 898 p.
 - Goldfarb Veniamin, Trubachev Evgenij, Barmina Natalya. *Advanced Gear Engineering*. Springer, Mechanisms and Machine Science. 2018, volume 51, 499 p.
 - H. Rekleytys, A. Reyvyndran, K. Rjehsdel. *Engineering Optimization*. New York, A Wiley-Interscience Publ., 1983.
 - Bondarenko O. V., Ustynenko O. V., Serykov V. I. Pryklad racional'nogo proektuvannja zubchastogo cylindrychnogo dvostupinchastogo reduktoru metodom psevdovypadkovogo poshuku pry bagat'oh kryterijah [Example of rational design of toothed cylindrical gears using pseudo-random method search with multiple criteria]. *Visnyk NTU "KhPI". Serija: "Mashynoznavstvo ta SAPR"* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Engineering and CAD]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2018, no. 25 (1301), pp. 31–35.
 - O. Ustinenko, O. Bondarenko, I. Klochkov, V. Serykov. Multi-criteria optimization of tracked vehicle transmissions. *Proc. of 6th International BAPT Conference Power Transmissions*. 19–22.06.2019, Varna, 1 (2019), pp. 196–199.
 - Sobol' I. M., Statnikov R. B. *Vybor optimal'nyh parametrov v zadachah so mnogimi kriterijami* [The choice of optimal parameters in problems with many criteria]. Moscow, Drofa Publ., 2006. 175 p.

References (transliterated)

- Korotkin Viktor, Onishkov Nikolay, Kharitonov Yuri. *Novikov gearing: achievements and development*. Nova Science Publishers, Inc., 2011. 272 p.
- Radzevich P. Stephen. *High-Conformal gearing. Kinematics and Geometry*. CRC Pres, 2016. 349 p.
- Shishov V. P., Nosko P. L., Fil' P. V. *Teoreticheskie osnovy sinteza peredach zacepleniem* [Theoretical foundations of the synthesis of transmissions by gearing]. Lugans'k, SNU im. V. Dalja Publ., 2006. 408 p.
- Anikin Ju. V. *Sinusoidal'noe zaceplenie: Osnovy geometro-*

Надійшла (received) 30.10.2021

Відомості про авторів /Сведения об авторах /About the Authors

Устиненко Олександр Віталійович (Устиненко Александр Витальевич, Ustynenko Oleksandr) – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), доцент, старший науковий співробітник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-64-78; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6714-6122>; e-mail: ustin1964@tmm-saprg.org

Левін Нікіта Олександрович (Левин Никита Александрович, Levin Nickita) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-69-01; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4155-6553>; e-mail: nlevin97@gmail.com

Бондаренко Олексій Вікторович (Бондаренко Алексей Викторович, Bondarenko Oleksiy) – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; м. Харків, Україна; тел.: (067) 189-97-00; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2693-5301>; e-mail: avbondko@gmail.com

Мірошлав Бошанскі (Мірошлав Бошански, Miroslav Božanský) – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), професор, Словацький технічний університет в Братиславі, професор кафедри транспортної техніки та конструювання; м. Братислава, Словаччина; тел.: +421-257-296-426; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0505-2689>; e-mail: miroslav.bosansky@stuba.sk

Протасов Роман Васильович (Протасов Роман Васильевич, Protasov Roman) – Словацький технічний університет в Братиславі, старший викладач кафедри транспортної техніки та конструювання; м. Братислава, Словаччина; тел.: +421-949-352-655; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1611-0610>; e-mail: roman.protasov@stuba.sk

Андрієнко Сергій Володимирович (Андриенко Сергей Владимирович, Andrienko Sergij) – Харківський національний автомобільно-дорожній університет, викладач кафедри інженерної та комп'ютерної графіки; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-37-24; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4310-3128>; e-mail: andrisergejjsv@gmail.com

Матюшенко Микола Васильович (Матюшенко Николай Васильевич, Matushenko Mykola) – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри геометричного моделювання та комп'ютерної графіки; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-64-31; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4727-8993>; e-mail: matushenkonikolay@ukr.net