

**А. В. ГРАБОВСЬКИЙ, М. А. ТКАЧУК, Н. А. ДЬОМІНА, Г. В. ТКАЧУК, О. А. ІЩЕНКО,  
І. О. ВОЛОШИНА, В. В. ТРЕТЯК**

### **РОЗРАХУНКОВО-ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТІЛ ІЗ ПОВЕРХНЯМИ БЛИЗЬКОЇ ФОРМИ**

У багатьох конструкціях їхні елементи контактують за номінально співпадаючими (конгруєнтними) поверхнями. Разом із тим у реальності цей контакт збурюється за рахунок відхилень форми цих поверхонь від номінальної. Для дослідження впливу цього збурення на розподіл контактної тиску здійснено аналіз напружено-деформованого стану системи тіл "пуансон - лист, що штампується - матриця". Середній елемент цієї системи відхиляється від номінально плоскої форми. Це спричиняє зміну розподілу контактної тиску. Також втрачається пропорційність між притисковою силою та рівнем контактної тиску. Експериментально підтверджена достовірність і точність отриманих при чисельному розрахунку результатів.

**Ключові слова:** напружено-деформований стан; контактний тиск; контактна взаємодія; метод варіаційних нерівностей; варіаційний принцип Кальєра; метод скінченних елементів

**А. В. ГРАБОВСКИЙ, Н. А. ТКАЧУК, Н. А. ДЕМИНА, А. В. ТКАЧУК, О. А. ИЩЕНКО,  
И. О. ВОЛОШИНА, В. В. ТРЕТЬЯК**

### **РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕЛ С ПОВЕРХНОСТЯМИ БЛИЗКОЙ ФОРМЫ**

Во многих конструкциях их элементы контактируют по номинально совпадающим (конгруэнтным) поверхностям. Вместе с тем в реальности этот контакт возмущается за счет отклонений формы этих поверхностей от номинальной. Для исследования влияния этого возмущения на распределение контактного давления осуществлен анализ напряженно-деформированного состояния системы тел «пуансон - штампуемый лист – матрица». Средний элемент этой системы отклоняется от номинально плоской формы. Это влечет за собой изменение распределения контактного давления. Также теряется пропорциональность между силой прижатия и уровнем контактного давления. Экспериментально подтверждена достоверность и точность результатов, полученных при численном расчете.

**Ключевые слова:** напряженно-деформированное состояние; контактное давление; контактное взаимодействие; метод вариационных неравенств; вариационный принцип Кальєра; метод конечных элементов

**A. GRABOVSKIY, M. A. TKACHUK, N. DOMINA, G. TKACHUK, O. ISHCENKO, I. VOLOSHINA,  
V. TRETZYAK**

### **COMPUTATIONAL AND EXPERIMENTAL STUDY OF CONTACT INTERACTION OF BODIES WITH NEARLY FORM SURFACES**

In many constructions, their elements are in contact with nominally matching (congruent) surfaces. In reality, this contact is disturbed due to deviations in the shape of these surfaces from the nominal. To study the effect of this perturbation on the distribution of contact pressure, the analysis of the stress-strain state of the body system of punched sheet-die is carried out. The middle element of this system deviates from the nominally flat shape. This causes a change in the contact pressure distribution. The proportionality between the clamping force and the level of contact pressure is also lost. The reliability and accuracy of the results obtained by numerical calculation have been experimentally confirmed.

**Keywords:** stress-strain state; contact pressure; contact interaction; method of variational inequalities; Kalker variational principle; finite element method

**Вступ.** У сучасних машинобудівних конструкціях широко розповсюджені з'єднання деталей із конгруєнтними або майже співпадаючими поверхнями. Це – елементи штампів, прес-форм, двигунів, зубчастих передач тощо. Така особливість зумовлена, з одного боку, функціональними вимогами, а, з іншого, – намаганням знизити рівень контактної тиску, а отже, – і напружень. Проте, як правило, розподіл контактної тиску, який при цьому досягається, далекий від рівномірного. Крім того, характер розподілу контактної тиску сильно залежить від незначного збурення геометричної форми поверхонь контактуючих тіл, а також від властивостей матеріалів проміжних шарів. Тому актуальною задачею є обґрунтування адекватних розрахункових моделей напружено-деформованого стану (НДС) контактуючих тіл із майже співпадаючими або конгруєнтними поверхнями. На це на розвиток статті [1] спрямована ця робота.

**Аналіз методів дослідження контактної взаємодії елементів конструкцій.** Визначальна роль контактної взаємодії у формуванні напружено-деформованого стану деталей конструкцій зумовила

інтерес до розвитку моделей та методів її дослідження [2]. На розвиток аналітичних моделей Герца та інших [2] значний розвиток отримали також варіаційні формулювання [3, 4]. Крім, так би мовити, підходів на макрорівні, значна увага приділяється і мікрорівневим моделям. Це, зокрема, питання впливу на контактну взаємодію форми контактуючих поверхонь [5], адгезії [6-8], текстури та властивостей поверхневого шару [9-11] та інших чинників. Разом із тим повного вирішення проблема обґрунтування адекватних моделей напружено-деформованого стану із урахуванням контактної взаємодії за близькими або майже співпадаючими (конгруєнтними) поверхнями не отримала.

**Мета роботи** – аналіз контактної взаємодії елементів конструкцій із близькими або майже співпадаючими поверхнями.

**Загальний підхід, моделі та методи досліджень.** Дослідження здійснені із

© А. В. Грабовський, М. А. Ткачук, Н. А. Дьоміна,  
Г. В. Ткачук, О. А. Іщенко, І. О. Волошина,  
В. В. Третяк, 2021

використанням підходів, моделей та методів, описаних у роботі [1], на прикладі елементів штампного оснащення (ЕШО).

Зокрема, для дослідження напружено-деформованого стану та контактної взаємодії системи тіл застосовано модифіковані методи варіаційних нерівностей та варіаційний принцип Кальєра [3, 4]. Вони отримали чисельну реалізацію за допомогою методу скінченних елементів.

Експериментальні дослідження здійснені із залученням чутливих до тиску плівок, які розміщуються між поверхнями тіл. Рівень контактної тиску відображається інтенсивністю кольорового відтиску у відповідних зонах області контакту.

Дані, отримані чисельним та експериментальним шляхами, порівнюються поточною або інтегрально у вузлах дискретних мереж або на їх множині. Це слугує підґрунтям для коригування розроблених моделей або прийняття рішення про їх подальше використання як верифікованих.

#### Розрахункові моделі досліджуваних об'єктів.

Розглядаються елементи штампного оснащення у складі технологічних систем холоднолистового штампування на прикладі штамів для розділових операцій. Слідуючи [1, 12, 13], у процесі формування розрахункових моделей елементів штампного оснащення керувалися системним підходом із урахуванням усієї системи зв'язків, обмежень, сполучень, силових потоків у технологічній системі холоднолистового штампування.

Технологічну систему тонколистового штампування можна ієрархізувати (рис. 1, прийняті позначення: 1-й рівень – прес 1 і штамп 2; 2-й рівень – верхня і нижня плити штампа 1 і 2, колонки 3, пакет 4 і підштамповуюча плита 5; 3-й рівень – пуансон 1, матриця 2 і штампований матеріал 3). Структура 1-го рівня – «прес – штамп», 2-го рівня – «блок – пакет», 3-го рівня – «ріжучі елементи – матеріал, що штампується». Задля повного дослідження властивостей цієї технологічної системи вимагається досить повний опис усіх її рівнів.

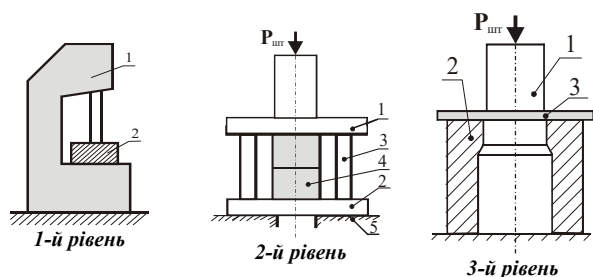


Рисунок 1 – Структура технологічної системи тонколистового штампування [15]

З наданої класифікаційної ознаки (рівнів ієрархізації) можна виділити наступні типи завдань:

- I. дослідження системи «прес – штамп»;
- II. дослідження міцності і характеристик

жорсткості системи «базові плити – стіл преса»;

III. дослідження взаємодії у системі «ріжучі елементи – заготовка».

Згідно [1, 12–15] сила штампування  $P_{шт}$  визначаємо за формулою

$$P_{шт} = k \sigma_{ср} \pi d_1 t, \quad (1)$$

де  $\sigma_{ср}$  – напруження зрізу, прийняті рівними  $0,8 \sigma_B$  ( $\sigma_B$  – межа міцності матеріалу, що штампується);

$d_1$  – діаметр ріжучої кромки;

$t$  – товщина матеріалу, що штампується;

$k$  – коефіцієнт затуплення ріжучих крайок (кромок) і нерівномірності зазору, прийнятий рівним 1,0.

Сила штампування  $P_{шт}$  є варійованою величиною, яка визначається матеріалом, формою та розмірами деталей, що штамуються.

Відповідно, для прикладу визначені найбільш навантажені елементи штамів. Це – пуансон та матриця у контактній взаємодії із заготовкою (матеріал, що штампується)

Геометричні форми пуансона, матриці і заготовки (тіла обертання) були спрощені так, щоб це слабо вплинуло на характер контактної взаємодії (рис. 2). Із урахуванням осової симетрії конструкції, навантажень і граничних умов дослідження напружено-деформованого стану (НДС) здійснюється в осесиметричній постановці. Діаметр пуансона – 30 мм, товщина листа, що штампується – 1 мм, технологічний зазор між пуансоном і матрицею – від 0 до 10%. Сила штампування – від 0 до 40 кН.

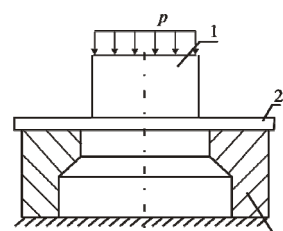


Рисунок 2 – Схема прикладання навантажень та граничні умови:  
1 – пуансон; 2 – заготовка; 3 – матриця

З огляду на ці особливості, сітка стужена в області кромки (рис. 3).

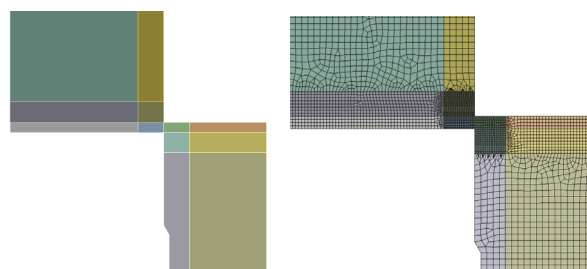


Рисунок 3 – Геометрична та скінченно-елементна моделі досліджуваної системи «пуансон – матеріал, що штампується – матриця»

**Результати чисельних досліджень напружено-деформованого стану пуансонів та матриць штампів у взаємодії із матеріалом, що штампується.** У ході досліджень здійснені розрахунки напружено-деформованого стану елементів системи «матриця – матеріал, що штампується – пуансон».

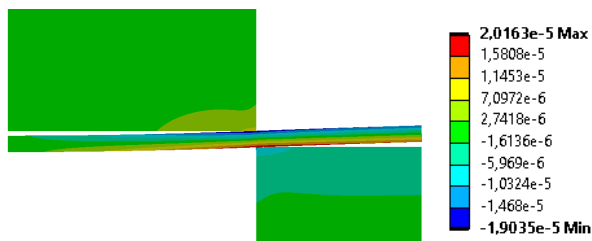


Рисунок 4 – Розподіл радіальних переміщень, мм, у досліджуваній системі

При багатоваріантних розрахунках контролюється низка скалярних параметрів і розподілів. Ці величини визначаються за допомогою спеціального макросу на мові APDL ANSYS. Контролюються розподіли контактного тиску і

напружень по товщині заготовки між ріжучими крайками. За отриманими даними будуються відповідні розподіли та інтегральні залежності (табл. 1, 2 та рис. 4–6). Зокрема, на рис. 5 наведено розподіл контактного тиску між матеріалом, що штампується, та матрицею.

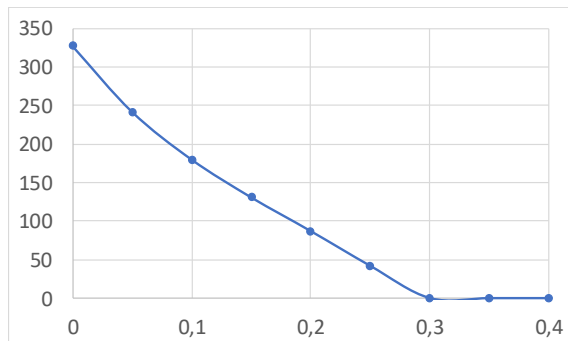

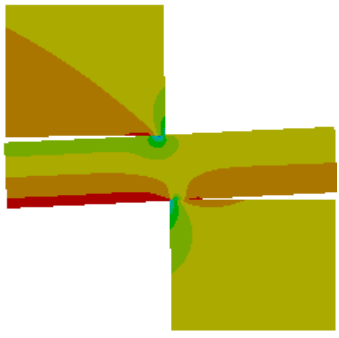


Рисунок 5 – Характерний розподіл контактного тиску (МПа) уздовж радіальної координати (мм), тобто віддалення від ріжучої кромки (крайки)

Таблиця 1 – Розподіл напружень у досліджуваній системі із співпадаючими поверхнями, МПа

Напруження	при беззazorному штампуванні		при штампуванні із 10%-м зазором	
	Значення	Картина розподілу напружень	Значення	Картина розподілу напружень
<i>радіальні</i>	<p>1224,5 Max</p> <p>837,03</p> <p>449,51</p> <p>61,986</p> <p>-325,53</p> <p>-713,05</p> <p>-1100,6</p> <p>-1488,1</p> <p>-1875,6</p> <p>-2263,1 Min</p>		<p>1496,9 Max</p> <p>1021,1</p> <p>545,34</p> <p>69,533</p> <p>-406,27</p> <p>-882,08</p> <p>-1357,9</p> <p>-1833,7</p> <p>-2309,5</p> <p>-2785,3 Min</p>	
<i>дотичні</i>	<p>922,88 Max</p> <p>783,34</p> <p>643,79</p> <p>504,24</p> <p>364,7</p> <p>225,15</p> <p>85,601</p> <p>-53,945</p> <p>-193,49</p> <p>-333,04 Min</p>		<p>1072,4 Max</p> <p>905,71</p> <p>739,05</p> <p>572,38</p> <p>405,72</p> <p>239,05</p> <p>72,388</p> <p>-94,277</p> <p>-260,94</p> <p>-427,61 Min</p>	
<i>осьові</i>	<p>333,37 Max</p> <p>-99,56</p> <p>-532,49</p> <p>-965,43</p> <p>-1398,4</p> <p>-1831,3</p> <p>-2264,2</p> <p>-2697,2</p> <p>-3130,1</p> <p>-3563 Min</p>		<p>402,36 Max</p> <p>-124,24</p> <p>-650,85</p> <p>-1177,5</p> <p>-1704,1</p> <p>-2230,7</p> <p>-2757,3</p> <p>-3283,9</p> <p>-3810,5</p> <p>-4337,1 Min</p>	

Напруження	при беззазорному штампуванні		при штампуванні із 10%-м зазором	
	Значення	Картина розподілу напружень	Значення	Картина розподілу напружень
кривої	<p>542,2 Max</p> <p>286,74</p> <p>31,275</p> <p>-224,19</p> <p>-479,65</p> <p>-735,12</p> <p>-990,58</p> <p>-1246</p> <p>-1501,5</p> <p>-1757 Min</p>		<p>656,49 Max</p> <p>345,28</p> <p>34,067</p> <p>-277,14</p> <p>-588,35</p> <p>-899,56</p> <p>-1210,8</p> <p>-1522</p> <p>-1833,2</p> <p>-2144,4 Min</p>	

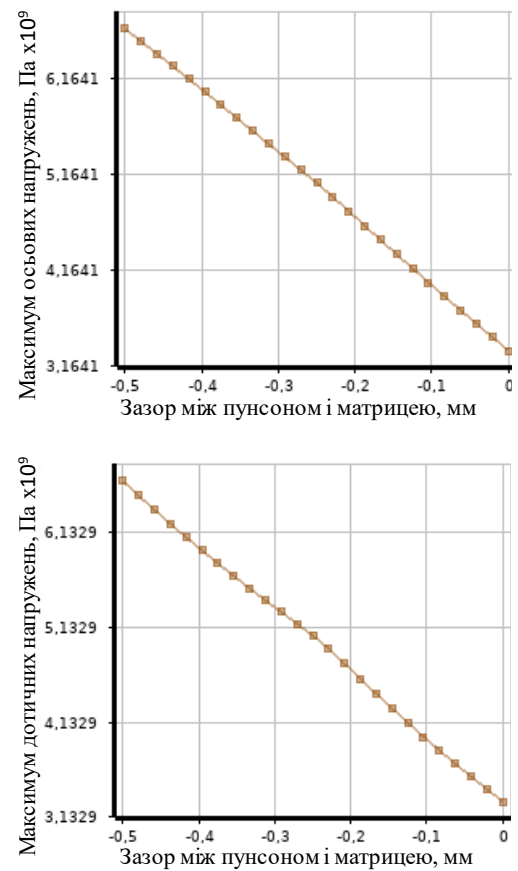
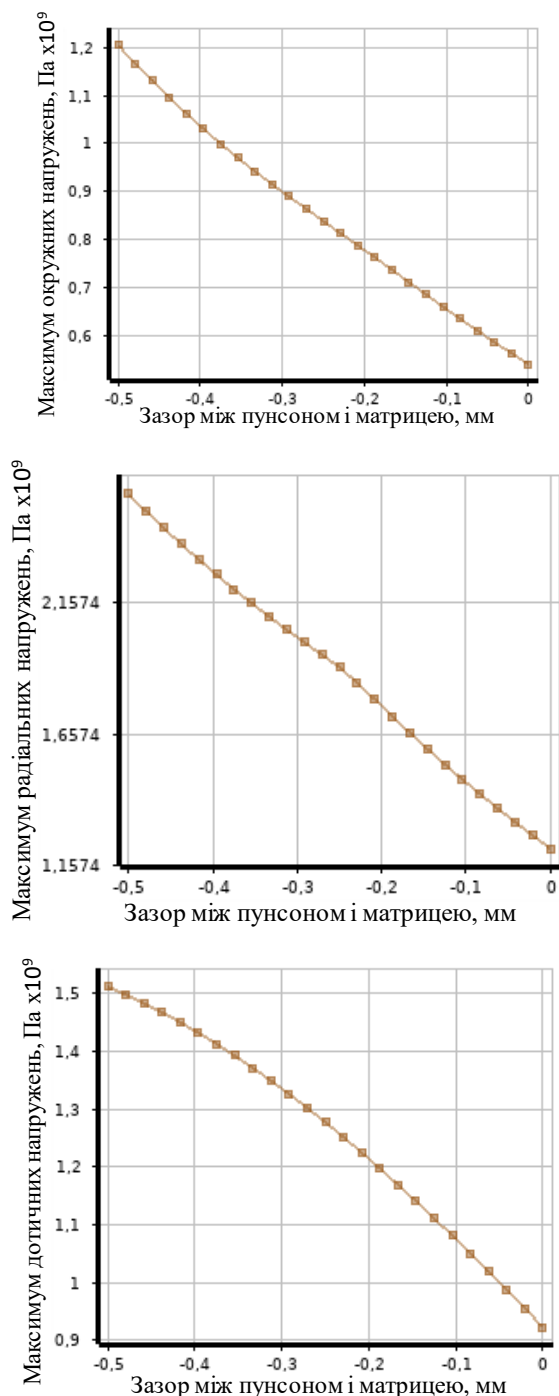


Рисунок 6 – Залежність рівня напружень від зазору між пуансоном та матрицею

Таблиця 2 – Розподіл контактної тиску у досліджуваній системі, МПа

Значення	Картина розподілу контактної тиску при беззазорному штампуванні	Значення	Картина розподілу контактної тиску при штампуванні із 10%-м зазором
<ul style="list-style-type: none"> <li>0</li> <li>36.6544</li> <li>73.3087</li> <li>109.963</li> <li>146.617</li> <li>183.272</li> <li>219.926</li> <li>256.581</li> <li>293.235</li> <li>329.889</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>0</li> <li>44.3014</li> <li>88.6027</li> <li>132.904</li> <li>177.205</li> <li>221.507</li> <li>265.808</li> <li>310.11</li> <li>354.411</li> <li>398.712</li> </ul>	

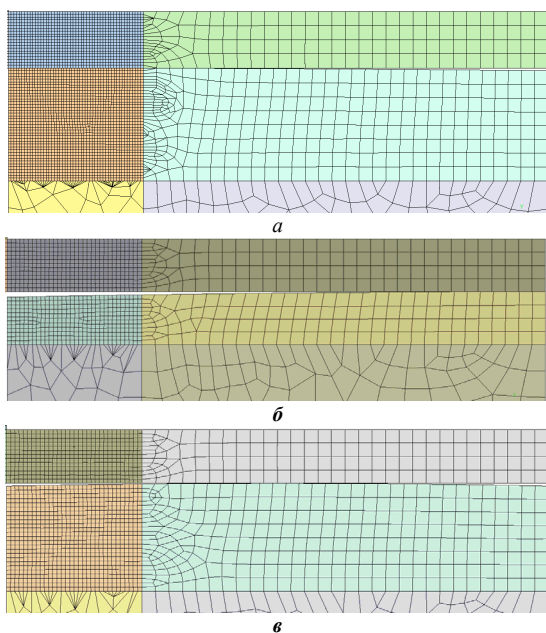


Рисунок 7 – Варіант осевого перерізу контакту листового матеріалу та матриці: а – I, б – II, в – III

Максимум тиску спостерігається на ріжучій кромці, а далі знижується. Ширина області контакту –  $0,1 \div 0,5t$  товщини листа, що штампується. Усі компоненти напружено-деформованого стану (див. табл. 1) мають підвищений рівень у зоні ріжучих кромки пуансона та матриці, а також у області між

цими кромками у листі матеріалу, що штампується.

Рівень напружень практично лінійно залежить від технологічного зазору між матрицею і пуансоном (див. рис. 6).

Становить інтерес вплив збурення геометричної форми поверхні матриці на напружено-деформований стан у досліджуваній системі. Для цього здійснено розрахунок НДС в цій системі із поверхнею матриці, яка має у осевому перерізі форму дуги кола. Перший (I) варіант – дуга торкається внутрішньої частини листа, що штампується (рис. 7, а), другий (II) варіант – дуга торкається зовнішньої частини листа, що штампується. (рис. 7, б) та третій (III) варіант – дотик у центрі листа, що штампується (рис. 7, в). Зазор між матеріалом, що штампується, та матрицею становить 0,1 мм.

У табл. 3 наведені розподіли компонент НДС для варіантів форми поверхні матриці I-III при максимальному значенні сили штампування, а на рис. 8–10 – картини еволюції розподілів еквівалентних напружень за Мізесом із зростанням сили штампування від нульового рівня до максимального для різних варіантів форми поверхні матриці I, II та III. Видно, що варіанти I та номінальний дають якісно схожі картини розподілу контактної взаємодії: контакт із самого початку локалізується у зоні ріжучої кромки.

Таблиця 3 – Картина розподілу напружень, МПа, для різних варіантів поверхонь матриць

Напруження	Значення	Картина розподілу напружень	Напруження	Значення	Картина розподілу напружень
<i>варіант поверхні матриці I (див. рис. 7, а)</i>					
радіальні	<ul style="list-style-type: none"> <li>1250,6 Max</li> <li>880,9</li> <li>511,19</li> <li>141,47</li> <li>-228,24</li> <li>-597,95</li> <li>-967,67</li> <li>-1337,4</li> <li>-1707,1</li> <li>-2076,8 Min</li> </ul>		осеві	<ul style="list-style-type: none"> <li>342,92 Max</li> <li>-117,64</li> <li>-578,2</li> <li>-1038,8</li> <li>-1499,3</li> <li>-1959,9</li> <li>-2420,4</li> <li>-2881</li> <li>-3341,6</li> <li>-3802,1 Min</li> </ul>	

Напруження	Значення	Картина розподілу напружень	Напруження	Значення	Картина розподілу напружень
<b>варіант поверхні матриці I (див. рис. 7, а)</b>					
дотичні	858,27 Max 718,29 578,31 438,33 298,35 158,37 18,385 -121,59 -261,57 -401,55 Min		окружні	553,63 Max 308,58 63,534 -181,51 -426,56 -671,61 -916,66 -1161,7 -1406,8 -1651,8 Min	
<b>варіант поверхні матриці II (див. рис. 7, б)</b>					
радіальні	1179,8 Max 836,46 493,08 149,7 -193,68 -537,06 -880,44 -1223,8 -1567,2 -1910,6 Min		осьові	317,4 Max -106,18 -529,75 -953,32 -1376,9 -1800,5 -2224 -2647,6 -3071,2 -3494,8 Min	
дотичні	805,28 Max 677,81 550,34 422,88 295,41 167,95 40,482 -86,983 -214,45 -341,91 Min		окружні	540,8 Max 311,23 81,657 -147,91 -377,48 -607,05 -836,62 -1066,2 -1295,8 -1525,3 Min	
<b>варіант поверхні матриці III (див. рис. 7, в)</b>					
радіальні	1249 Max 879,96 510,88 141,8 -227,29 -596,37 -965,45 -1334,5 -1703,6 -2072,7 Min		осьові	342,35 Max -117,39 -577,13 -1036,9 -1496,6 -1956,4 -2416,1 -2875,8 -3335,6 -3795,3 Min	
дотичні	857,23 Max 717,54 577,86 438,17 298,49 158,8 19,116 -120,57 -260,25 -399,94 Min		окружні	551,24 Max 306,78 62,327 -182,13 -426,58 -671,04 -915,5 -1160 -1404,4 -1648,9 Min	

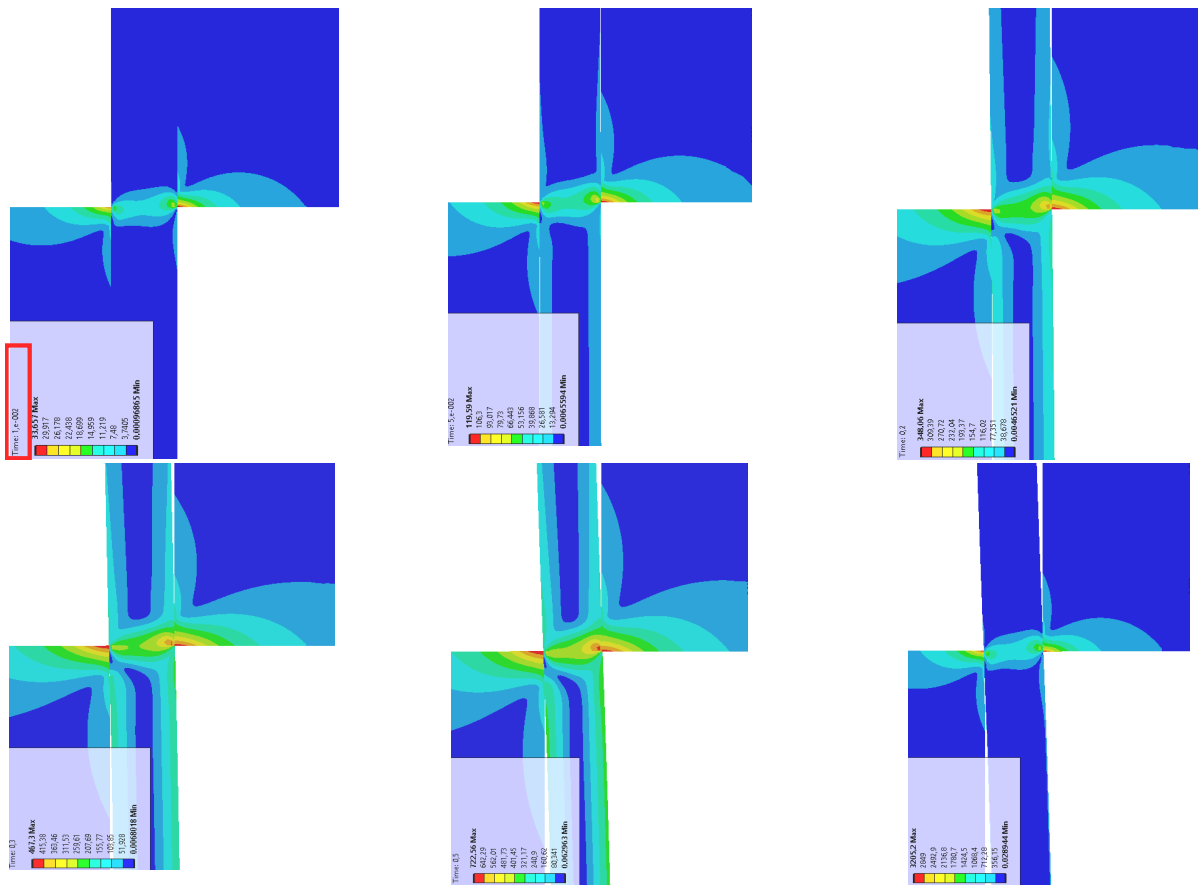


Рисунок 8 – Еволюція розподілів еквівалентних напружень за Мізесом зі зростанням сили штампування від нульового рівня до номінального при варіанті форми поверхні матриці I (див. рис. 7, а)

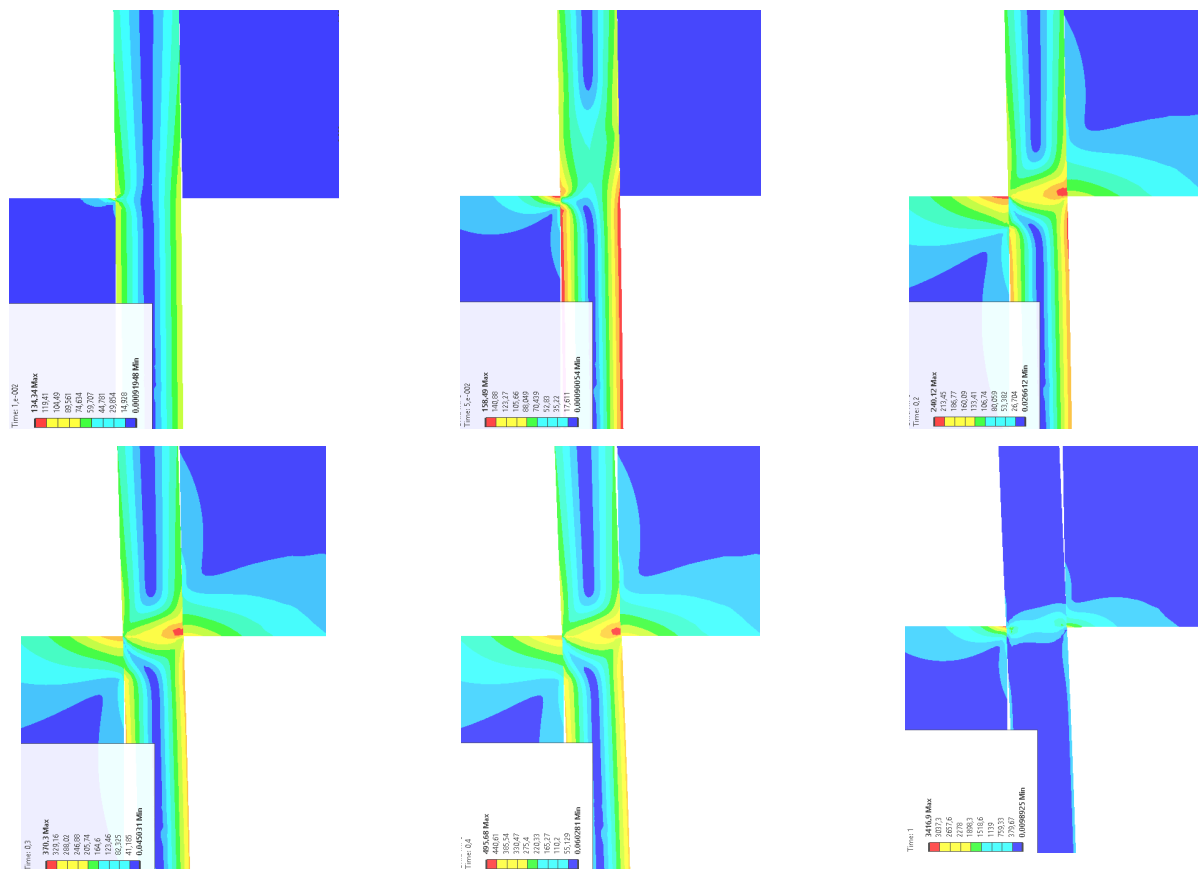


Рисунок 9 – Еволюція розподілів еквівалентних напружень за Мізесом зі зростанням сили штампування від нульового рівня до номінального при варіанті форми поверхні матриці II (див. рис. 7, б)

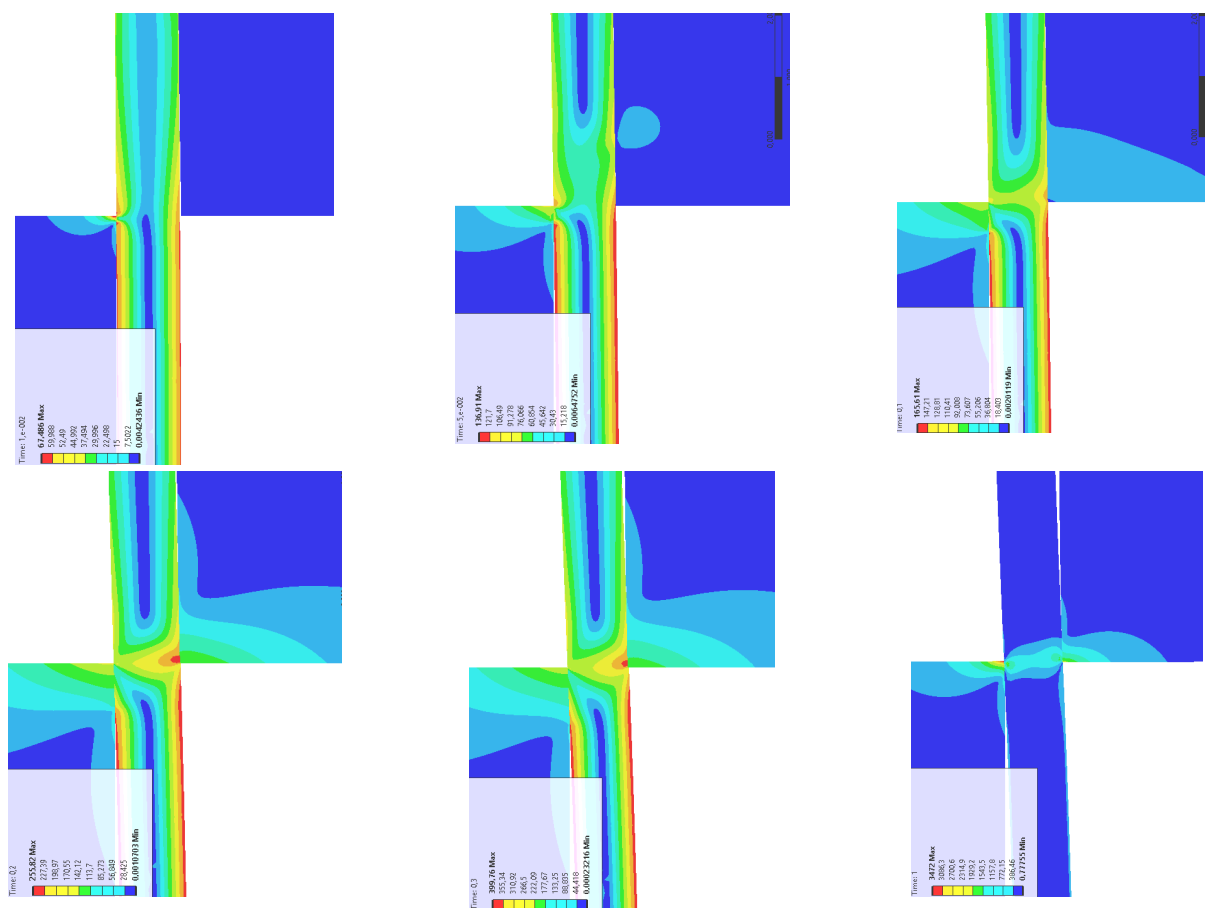


Рисунок 10 – Еволюція розподілів еквівалентних напружень за Мізесом зі зростанням сили штампування від нульового рівня до номінального при варіанті форми поверхні матриці III (див. рис. 7, в)

На відміну від варіанту I, для варіантів II та III за назначених сил штампування зона контактування відрізняється від локалізованої біля ріжучої кромки. Ця зона тяжіє до початкового геометричного контакту. Проте зі зростанням сили штампування, деформований стан, зона контактування та контактний тиск, а також розподіли компонент напружено-деформованого стану стають подібними до тих, що реалізуються для варіанту номінально співпадаючих поверхонь контакту.

Таким чином, збурення геометричної форми, що призводить до зміни зазору між контактуючими тілами, чинить у випадку, що досліджується, суттєвий вплив на розподіл контактного тиску тільки для певних рівнів навантаження, за яких переміщення точок контактуючих поверхонь такі, що зазор у актуальному поточному стані зберігає початковий варіант його розподілу. Потім, зі зростанням сили штампування, розподіл зазору стає подібним до розподілу за номінально співпадаючих поверхонь (або варіанту I).

**Аналіз результатів розрахунково-експериментальних досліджень.** Для експериментального дослідження розподілу контактного тиску був здійснений експеримент за схемою, наведеною на рис. 11 [12].

Порівняльний аналіз результатів чисельних та напружено-деформованого стану елементів штампного оснащення можна здійснити за

картинами розподілів контактного тиску.

Були використані чутливі до тиску контактні плівки фірми fujitsu [www.fujitsumicro.com]. Схема установки контактних плівок наведена на рис. 11.

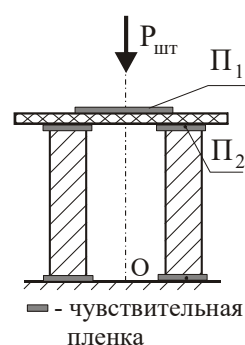


Рисунок 11 – Схема установки контактних плівок

Система «пуансон – матриця – матеріал, що штампується» встановлювалася на пристосуванні для навантаження (рис. 12).

Зусилля у пристосуванні створювалося за допомогою гвинтової пари та вимірювалося за допомогою месдози з наклеєними тензодатчиками, яка протарована від 0 кН до 10 кН. Розшифровка контактного тиску здійснювалася шляхом порівняння картини отриманих відбитків з тарувальними таблицями, що пов'язують його із інтенсивністю контактного відбитка.



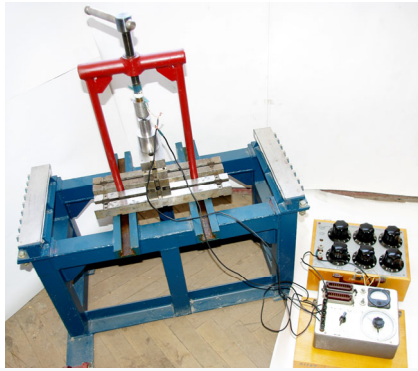


Рисунок 12 – Експериментальна установка (приспосована для навантаження та пристрій для вимірювання притискової сили)

Деякі відбитки наведені для контакту за усією поверхнею, деякі – для секторальних вирізів (рис. 13–16). На рис. 17 наведені порівняльні картини розподілів, які, з одного боку, отримані чисельно, а, з іншого, – розшифровані після експериментів. Видно повну якісну та задовільну кількісну відповідність за контактними майданчиками (зонами) і контактним тиском (похибка – не вище 10 ÷ 15 %).

Таким чином, можна зробити висновок, що експериментально підтверджена достовірність і точність отриманих при чисельному розрахунку результатів. Також продемонстровано нерівномірність розподілу контактної тиску у коловому напрямку.

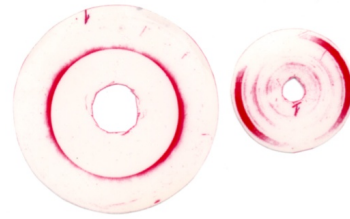


Рисунок 13 – Пробний відбиток у сполученні «матриця - заготовка – пуансон» (нульовий технологічний зазор між пуансоном та матрицею)

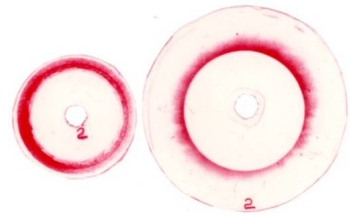


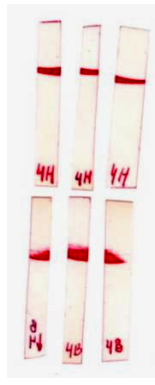
Рисунок 14 – Контактні відбитки, отримані у ході експериментальних вимірів (заготовка товщиною 5 мм, технологічний зазор між пуансоном та матрицею 0,1 мм, сила штампування – 9 кН)



Рисунок 15 – Контактні відбитки, отримані у ході експериментальних вимірів (заготовка товщиною 5 мм, технологічний зазор між пуансоном та матрицею 0,5 мм, сила штампування – 10 кН)



а



б



в



г

Рисунок 16 – Контактні відбитки, отримані у ході експериментальних вимірів для сили штампування  $P_{шт} = 1,5$  кН при різних значеннях технологічного зазору між матрицею і пуансоном (заготовка товщиною 1 мм): а – нульовий зазор; б – 0,1 мм; в – 0,2 мм; г – 0,5 мм

**Висновки.** За матеріалами розрахунково-експериментальних досліджень можна зробити наступні висновки.

1. Експериментально підтверджено чисельно визначений ефект, що контакт ріжучих елементів розділових штампів зі штампованим матеріалом здійснюється по локальних майданчиках шириною  $0,1 \div 0,5$  від товщини матеріалу, що штампується.

2. Установлено, що контактний тиск у сполученні матриць та пуансонів із матеріалом, що штампується, розподіляється нерівномірно, при цьому максимум досягається в зоні ріжучої кромки. Отримала підтвердження концентрація всіх компонент тензора напружень в зоні на різальних кромках пуансонів та матриць, а також між ними – у матеріалі, що штампується.

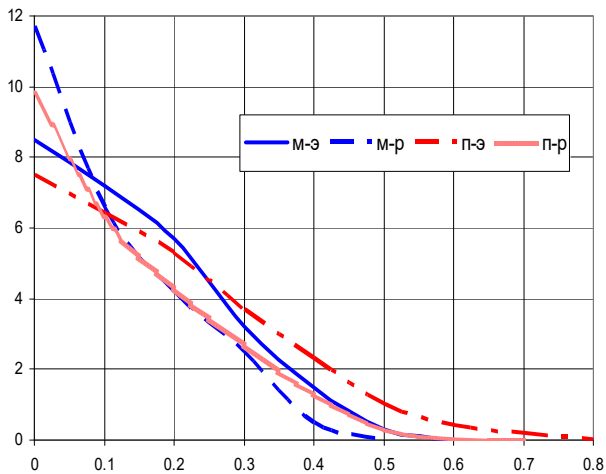


Рисунок 17 – Розподіл контактної тиску, МПа, за шириною поясу контакту, мм:

- «п-э» – пуансон, експеримент;
- «п-р» – пуансон, розрахунок;
- «м-э» – матриця, експеримент;
- «м-р» – матриця, розрахунок [12]

3. Визначено вплив збурення форми поверхні «пуансон – лист, що штампується – матриця» на контактну взаємодію. Установлено, що значні відмінності у розподілі контактної тиску спостерігаються при незначному рівні навантажень для різних збурень форми поверхні матриці. Надалі, зі зростанням навантаження, усі картини напружено-деформованого стану стають подібними до варіанту плоскої поверхні матриці.

4. Установлено, що похибка отриманих чисельним шляхом результатів не перевищує 10–15%. Це дає можливість використовувати створені моделі у ході подальших досліджень.

#### Список літератури

1. Ткачук М. А., Грабовський А. В., Ткачук М. М. [и др.]. Розрахунково-експериментальний аналіз контактної взаємодії елементів технологічних систем *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: *Машинознавство та САПР*. Харків: НТУ «ХПІ». 2020. № 2. С. 100–115
2. Johnson K. L. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press. 1985. 462 p. doi:10.1017/cbo9781139171731.
3. Kalker J.J. Variational principles of contact elastostatics. *J. Inst. Math. and Appl.* 1977. Vol. 20. P. 199–221.
4. Мартиняк Р.М. Контакт пружних тіл за наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2013. Т. 56. № 3. С. 43–56.
5. Popov V. L., R. Pohrt, Q. Li Strength of adhesive contacts: Influence of contact geometry and material gradients. *Friction*. 2017. Vol. 5(3). P. 308–325.
6. Ciavarella M. Adhesive rough contacts near complete contact. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2015. Vol. 104. P. 104–111
7. Ciavarella M., A. Papangelo A modified form of Pastewka–Robbins criterion for adhesion. *The Journal of Adhesion*. 2018. Vol. 94(2). P. 155–165.
8. Li Q., Popov V.L. Adhesive force of flat indenters with brush structure. *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*. 2018. Vol. 16 (1). P. 1–8.
9. Slobodyan B.S., Lyashenko B. A., Malanchuk N. I., Marchuk V. E., Martynyak R.M. Modeling of Contact Interaction of Periodically Textured Bodies with Regard for Frictional Slip. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 215 (1). P. 110–112.
10. Martynyak, R.M., Prokopyshyn, I.A. & Prokopyshyn, I.I. Contact of Elastic Bodies with Nonlinear Winkler Surface Layers. *Journal of*

*Mathematical Sciences*. 205, 535–553 (2015).

11. Pohrt R., Popov V. L. Contact stiffness of randomly rough surfaces. *Scientific reports*. 2013. Vol. 3. 3293 p. doi: 10.1038/srep03293.
12. Дьоміна Н.А. *Удосконалення методів розрахунку елементів штампового оснащення на основі аналізу їх напружено-деформованого стану*: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.03.05 «процеси та машини обробки тиском» / Н. А. Дьоміна. Харків, 2011. 20 с.
13. Tkachuk M. M., Grabovskiy A., Tkachuk M. A., Hrechka I., Ishchenko O., Domina N. Investigation of multiple contact interaction of elements of dividing stamps. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. No 4/7(100). P. 6–15.
14. Заяренко Е.И., Ткачук Н.А., Ткачук А.В. Расчеты на прочность вырубных матриц и пуансон-матриц для листовой штамповки. *Кузнечно-штамповочное производство*. 1990. № 12. С. 18–21.
15. Ткачук М. А., О. А. Іщенко, Н. А. Дьоміна, М. М. Ткачук, А. В. Грабовський, В. В. Шеманська, Васильченко Д. Р. Контактна взаємодія елементів штампового оснащення. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: *Інноваційні технології та обладнання обробки матеріалів у машинобудуванні та металургії*. Харків: НТУ «ХПІ», 2018. № 41 (1317). С. 67–76.

#### References (transliterated)

1. Tkachuk M. A., Grabovskiy A. V., Tkachuk M. M. [y dr.]. Rozrahunkovo-eksperymental'nyj analiz kontaknoi' vzajemodii' elementiv tehnologichnyh system. *Visnyk Nacional'nogo tehnicnogo universytetu «KhPI»*. Serija: *Mashynoznavstvo ta SAPR*. Kharkiv: NTU «KhPI», 2020, no. 2, pp. 100–115
2. Johnson K. L. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press. 1985. 462 p. doi:10.1017/cbo9781139171731.
3. Kalker J.J. Variational principles of contact elastostatics. *J. Inst. Math. and Appl.* 1977, vol. 20, pp. 199–221.
4. Martynyak R.M. Kontakt pruzhnyh til za najavnosti nelinejnyh vinkleriv'skyh poverhnevnyh shariv. *Matematychni metody ta fizyko-mehanichni polja*. 2013. T. 56, no. 3, pp. 43–56.
5. Popov V. L., R. Pohrt, Q. Li Strength of adhesive contacts: Influence of contact geometry and material gradients. *Friction*. 2017, vol. 5(3), pp. 308–325.
6. Ciavarella M. Adhesive rough contacts near complete contact. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2015, vol. 104, pp. 104–111
7. Ciavarella M., A. Papangelo A modified form of Pastewka–Robbins criterion for adhesion. *The Journal of Adhesion*. 2018, vol. 94(2), pp. 155–165.
8. Li Q., Popov V.L. Adhesive force of flat indenters with brush structure. *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*. 2018, vol. 16 (1), pp. 1–8.
9. Slobodyan B.S., Lyashenko B. A., Malanchuk N. I., Marchuk V. E., Martynyak R.M. Modeling of Contact Interaction of Periodically Textured Bodies with Regard for Frictional Slip. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016, vol. 215 (1), pp. 110–112.
10. Martynyak, R.M., Prokopyshyn, I.A. & Prokopyshyn, I.I. Contact of Elastic Bodies with Nonlinear Winkler Surface Layers. *Journal of Mathematical Sciences*. 205, 535–553 (2015).
11. Pohrt R., Popov V. L. Contact stiffness of randomly rough surfaces. *Scientific reports*. 2013, vol. 3. 3293 p. doi: 10.1038/srep03293.
12. D'omina N.A. *Udoskonalennja metodiv rozrahunku elementiv shtampovogo osnashhennja na osnovi analizu i'h napruzhenno-deformovanogo stanu*: avtoref. dys. na zdobuttja nauk. stupenja kand. tehn. nauk: spec. 05.03.05 «procese ta mashyny obrobky tyskom» / N. A. D'omina. Kharkiv, 2011. 20 p.
13. Tkachuk M. M., Grabovskiy A., Tkachuk M. A., Hrechka I., Ishchenko O., Domina N. Investigation of multiple contact interaction of elements of dividing stamps. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. No 4/7(100). P. 6–15.
14. Zajamenko E.Y., Tkachuk N.A., Tkachuk A.V. Raschety na prochnost' vyrubnyh matric y puanson-matric dlja lystovoj shtampovky. *Kuznechno-shtampovochnoe proyzvodstvo*. 1990, no. 12, pp.18–21.
15. Tkachuk M. A., O. A. Ishhenko, N. A. D'omina, M. M. Tkachuk, A. V. Grabov'skyj, V. V. Shemans'ka, Vasy'l'chenko D. R. Kontaktna vzajemodija elementiv shtampovogo osnashhennja. *Visnyk Nacional'nogo tehnicnogo universytetu «KhPI»*. Serija: *Innovacijni tehnologii' ta obladnannja obrobky materialiv u mashynobuduvanni ta metalurgii'*. Kharkiv: NTU «KhPI», 2018, no. 41 (1317), pp.67–76.

Надійшла (received) 20.05.2021

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Грабовський Андрій Володимирович (Грабовский Андрей Владимирович, Grabovskiy Andrey)** – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», старший науковий співробітник кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6116-0572>; e-mail: [andrej8383@gmail.com](mailto:andrej8383@gmail.com).

**Ткачук Микола Анатолійович (Ткачук Николай Анатольевич, Tkachuk Mykola A.)** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідувач кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4174-8213>; тел.: (057) 707-69-02; e-mail: [tma@tmm-sapr.org](mailto:tma@tmm-sapr.org).

**Дьоміна Наталія Анатоліївна (Демина Наталья Анатольевна, Domina Natalia)** – кандидат технічних наук, доцент, Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного, доцент кафедри «Вища математика і фізика», м. Мелітополь, Запорізька обл., Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1118-1834>; e-mail: [natalia.domina@tsatu.edu.ua](mailto:natalia.domina@tsatu.edu.ua).

**Ткачук Ганна Володимирівна (Ткачук Анна Владимировна, Tkachuk Ganna)** – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», старший науковий співробітник кафедри «Інформаційні технології та системи колісних і гусеничних машин ім. О. О. Морозова», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0435-1847>. e-mail: [TkachuckAV@tmm-sapr.org](mailto:TkachuckAV@tmm-sapr.org)

**Ищенко Ольга Анатоліївна (Ищенко Ольга Анатольевна, Ishchenko Olha)** – кандидат технічних наук, Таврійський державний агротехнологічний університет, старший викладач кафедри вищої математики та фізики; м. Мелітополь, Запорізька обл., Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5274-2618>; e-mail: [olha.ishchenko@tsatu.edu.ua](mailto:olha.ishchenko@tsatu.edu.ua).

**Волошина Ірина Олександрівна (Волошина Ирина Александровна, Voloshina Iryna)** – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», студентка гр. МІТ-218м, м. Харків, Україна; e-mail: [s1802@tmm-sapr.org](mailto:s1802@tmm-sapr.org)

**Третьяк Владислав Володимирович (Третьяк Владислав Владимирович, Tretyak Vladeslav)** – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», студент гр. МІТ-219м, м. Харків, Україна; e-mail: [vladeslav2205@gmail.com](mailto:vladeslav2205@gmail.com)