

*М.М. ТКАЧУК, А.В. ГРАБОВСЬКИЙ, М.А. ТКАЧУК, В.І. СЕРИКОВ, Г.В. ТКАЧУК,  
П.М. КАЛІНІН, І. О. ВОЛОШИНА, А. В. АНДРУСЕНКО, О.С. ГОЛТВЯНИЦЯ*

### **КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ СКЛАДНОПРОФІЛЬНИХ ТІЛ ІЗ УРАХУВАННЯМ НЕЛІНІЙНИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРІАЛУ ПРОМІЖНИХ ШАРІВ**

У роботі описані результати досліджень напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл, які контактують на поверхнях близької форми. При цьому проміжний шар, що розміщується між цими тілами, має нелінійні властивості, залежні від історії навантаження. Ці властивості можуть бути зумовлені мікроструктурою поверхневих шарів матеріалів контактуючих тіл. Також вони можуть визначатися властивостями матеріалів мережевої структури, полімерів, гумоподібних матеріалів, напилені, прокладок тощо. На прикладі поршнів гідрооб'ємних передач проілюстровано вплив цих властивостей на розподіл контактної тиску. Установлено, що зі зміною властивостей проміжних шарів змінюється характер розподілу контактної тиску, також змінюються зони розташування мінімумів та максимумів напружень. Крім того, сама область контакту змінює розміри і форму. Також визначені особливості напружено-деформованого стану у контактуючих тілах. Установлені можливості управління розподілами контактної тиску і напружено-деформованим станом контактуючих тіл за рахунок цілеспрямованої зміни властивостей проміжних шарів.

**Ключові слова:** контактна взаємодія; напружено-деформований стан; проміжний шар; гідрооб'ємна передача; контактний тиск; область контакту

*Н. Н. ТКАЧУК, А. В. ГРАБОВСКИЙ, Н. А. ТКАЧУК, В. И. СЕРИКОВ, А. В. ТКАЧУК,  
П. Н. КАЛИНИН, И. А. ВОЛОШИНА, А. В. АНДРУСЕНКО, А. С. ГОЛТВЯНИЦЯ*

### **КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СЛОЖНОПРОФИЛЬНЫХ ТЕЛ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛА ПРОМЕЖУТОЧНЫХ СЛОЕВ**

В работе описаны результаты исследований напряженно-деформированного состояния сложнопрофильных тел, которые контактируют по поверхностям близкой формы. При этом промежуточный слой, размещенный между этими телами, имеет нелинейные свойства, зависящие от истории нагружения. Эти свойства могут быть обусловлены микроструктурой поверхностных слоев материалов контактирующих тел. Также они могут определяться свойствами материалов сетевой структуры, полимеров, резиноподобных материалов, напылений, прокладок и тому подобное. На примере поршней гидрообъемных передач проиллюстрировано влияние этих свойств на распределение контактного давления. Установлено, что с изменением свойств промежуточных слоев изменяется характер распределения контактного давления, также меняются зоны расположения минимумов и максимумов напряжений. Кроме того, сама область контакта изменяет размеры и форму. Также определены особенности напряженно-деформированного состояния в контактирующих телах. Установлены возможности управления распределением контактного давления и напряженно-деформированным состоянием контактирующих тел за счет целенаправленного изменения свойств промежуточных слоев.

**Ключевые слова:** контактное взаимодействие; напряженно-деформированное состояние; промежуточный слой; гидрообъемная передача; контактное давление; область контакта

*М. М. ТКАЧУК, А. ГРАБОВСКИЙ, М. А. ТКАЧУК, В. СИЕРЫКОВ, Г. ТКАЧУК,  
Р. КАЛИНИН, И. ВОЛОШЫНА, А. АНДРУСЕНКО, О. ГОЛТВЯНИЦЯ*

### **CONTACT INTERACTION OF COMPLEX-SHAPED BODIES WITH ACCOUNT FOR NONLINEAR CHARACTERISTICS OF THE INTERMEDIATE LAYER MATERIAL**

The paper describes the analysis of stress-strain state of complex-shaped bodies that come into contact over surfaces of conforming shape. The intermediate layer placed between these bodies has nonlinear properties depending on the load history. These properties may be associated with the microstructure of the surface layers of the materials of the contacting bodies. They can also be determined by the properties of network structure materials, polymers, rubber-like materials, sprays, gaskets, etc. The effect of these properties on the contact pressure distribution is illustrated by the example of hydraulic pistons. It is established that with the change of properties of intermediate layers the character of contact pressure distribution changes together with the locations of minima and maxima of contact pressure. Moreover, the contact area itself changes size and shape. Peculiarities of the stress-strain state of the contacting bodies are also determined. Possibilities of control of contact pressure distributions and stress-strain state of contacting bodies by special choice of intermediate layer properties are established.

**Keywords:** contact interaction; stress-strain state; intermediate layer; hydrovolumetric drive; contact pressure; contact area

**Вступ.** На теперішній час у складі машинобудівних конструкцій часто зустрічаються вузли, у яких робочий процес здійснюється шляхом контактної взаємодії деталей складної форми. Зокрема, це зубчасті колеса та тіла кочення підшипників із модифікованими робочими поверхнями, поршні двигунів внутрішнього згоряння із профільованими бічними поверхнями тощо. Відповідно, реалізується контакт складнопрофільних тіл. Зазор між поверхнями цих тіл достатньо малий, що примушує враховувати у переміщеннях точок цих поверхонь складові, якими в інших випадках нехтують. Серед таких складових – ті, що викликані деформуванням поверхневих шарів шорсткості, які неминуче присутні на деталях, що виготовлені на тому чи іншому обладнанні із застосуванням певних інструментів. Фізико-механічні

властивості таких шарів залежать від типу основного матеріалу деталі, технологічних режимів оброблення, термохімічного впливу та зміцнення тощо. Крім того, слід зазначити, що на властивості шару чинить вплив мікроструктура та мікропрофіль шорсткості.

Отже, контактуючі шорсткі поверхні взаємодіють уздовж поверхонь складного мікропрофілю із складними розподілами властивостей за товщиною. У загальному випадку такі властивості не тільки нелінійні, але й залежать від історії навантаження. Тому традиційні підходи, моделі та методи досліджень не завжди адекватно відтворюють реальну контактну

© М.М. Ткачук, А.В. Грабовський, М.А. Ткачук,  
В.І. Сериков, Г.В. Ткачук, П.М. Калінін, І. О. Волошина,  
А. В. Андрусенко, О.С. Голтвяниця, 2020

взаємодію. Відповідно, потрібні дослідження, які урахують залежність властивостей проміжних та поверхневих шарів контактуючих складнопрофільних тіл від історії навантаження. Це спрямувало напрямки досліджень, які описані у цій статті на прикладі контактної взаємодії кулькового поршня гідрооб'ємної передачі із біговою доріжкою статорного кільця на розвиток роботи [1].

#### Аналіз існуючих моделей та методів аналізу контактної взаємодії елементів конструкцій.

Як зазначається у роботі [1], контактна взаємодія у багатьох випадках визначає розподіл сил, які передаються від одного тіла (деталі) до іншого. У свою чергу, це вимагає аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл із урахуванням низки важливих чинників. Відповідно, для чисельного та аналітичного визначення контактної взаємодії застосовують різні моделі та методи. Зокрема, це модель Герца [2 – 4], методи граничних інтегральних рівнянь (МГІР) та граничних елементів (МГЕ) [5–9], теорія варіаційних нерівностей [10–15], варіаційний принцип Калькера [16–18] тощо. У той же час повного та ефективного вирішення задач, які виникають при моделюванні контактної взаємодії складнопрофільних тіл, перелічені методи та моделі не забезпечують.

У низці робіт [19–26] запропоновані різні моделі для урахування проміжних та поверхневих шарів контактуючих тіл.

Разом із тим необхідно інтегрувати у єдине ціле так звані «макромоделі» контакту тіл та «мікромоделі» властивостей поверхневих та проміжних шарів. А це у багатьох випадках відсутнє.

Таким чином, на передній план виступає розроблення комплексних моделей, які не тільки поєднують «мікро-» та «макро-» рівні, але ще і дають можливість відображати залежність властивостей проміжних чи поверхневих шарів контактуючих тіл від історії навантаження. У цьому напрямку значні просування досягнені та описані у багатьох роботах, зокрема у [1, 9, 14]. Тому ці розробки були використані як база досліджень, які описані у цій роботі.

*Мета роботи* – дослідження напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл, що контактують за наявності проміжних або поверхневих шорстких шарів, властивості яких залежать від історії навантаження.

Дослідження здійснюються на прикладі контакту кулькового поршня гідрооб'ємної передачі ГОП-900 для перспективної танкової трансмісії із біговою доріжкою статорного кільця [1, 5, 6, 27].

**Моделі та методи досліджень.** Методичною основою та відповідною базою досліджень є розробки та результати, описані у роботі [1]. Зокрема, для аналізу напружено-деформованого стану (НДС) контактуючих тіл пропонується застосувати або принцип мінімуму повної енергії системи на множині переміщень  $K$ , які задовольняють умовам непроникнення на поверхнях можливого контакту, або варіаційний принцип Калькера, що полягає у мінімізації функціоналу додаткової роботи на невід'ємних розподілах контактної тиску  $p$ . І перший, і другий підхід формується у прирощеннях. Чисельна

дискретизація задач здійснюється відповідно на основі методів скінченних (МСЕ) та граничних елементів (МГЕ).

Опис розроблених варіаційних постановок, побудованих моделей реалізованих методів наведено у роботі [1].

У цій роботі, як і у попередній [1], використані такі ж математичні моделі та чисельні методи. Проте для відображення поведінки проміжного поверхневого шару під навантаженням розглянуто більш широку множину моделей залежностей «контактний тиск – обтискання» для такого шару. Зокрема, на рис. 1 наведено діаграму деформування в координатах «абсолютна величина напруження (тиск)  $\sigma$  ( $p$ ) – абсолютна величина деформацій  $\varepsilon$ », яка відображає властивості матеріалу проміжного шару умовною товщиною 0,1 мм.

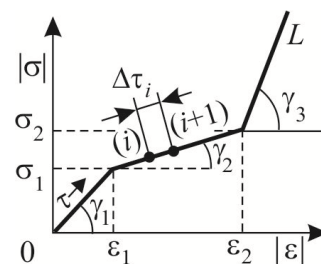


Рисунок 1 – Діаграма деформування матеріалу проміжного шару між контактуючими тілами

Для опису властивостей матеріалу проміжного шару можна ввести такі безрозмірні характеристики:

$$\alpha_1 = E_1/E = \operatorname{tg}\gamma_1/E, \quad (1)$$

$$\alpha_2 = E_2/E_1 = \operatorname{tg}\gamma_2/\operatorname{tg}\gamma_1, \quad (2)$$

$$\alpha_3 = E_3/E_1 = \operatorname{tg}\gamma_3/\operatorname{tg}\gamma_1, \quad (3)$$

$$\beta_1 = \sigma_1/\sigma_T, \quad (4)$$

$$\beta_2 = (\sigma_2 - \sigma_1)/\sigma_T, \quad (5)$$

де  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па – модуль пружності матеріала основних контактуючих деталей (у цьому випадку – сталь);

$\sigma_T = 500$  МПа – умовно обрана границя текучості основного матеріалу.

Таким чином, для аналізу НДС контактуючих тіл із проміжним шаром із залежністю властивостей від історії навантаження, у цьому конкретному випадку необхідно ввести деякий внутрішній параметр  $\tau$ . Цей параметр описує еволюцію процесів, що досліджуються. У кожній точці тіла здійснюється перехід від початкової точки  $O$  до кінцевої  $L$ . Оскільки усі розв'язувальні співвідношення – інкрементального типу [1], то при чисельній реалізації відбувається розбиття усього інтервалу на скінченні етапи  $i = 1, 2, \dots, N$ . На кожному із етапів прирощенню  $\Delta\tau_i$  (див. рис. 1) відповідає певна зміна властивостей проміжного шару. Відповідно, визначаються прирощення компонент полів скалярів контактної тиску  $\Delta_i p(r)$ , векторів переміщень  $\Delta_i u(r)$ , деформацій  $\Delta_i \varepsilon(r)$  та напружень  $\Delta_i \sigma(r)$ .

Тут  $r, \rho$  – радіус-вектори поточних точок областей – об'ємів  $\Omega$ , які займають відповідні тіла, та

поверхонь  $S_c$  можливого контакту цих тіл, відповідно. Відповідно, на  $i$ -му кроці

$$p_i = \sum_{j=1}^{(i-1)} \Delta_j p; \quad \mathbf{u} = \sum_{j=1}^{(i-1)} \Delta_j \mathbf{u};$$

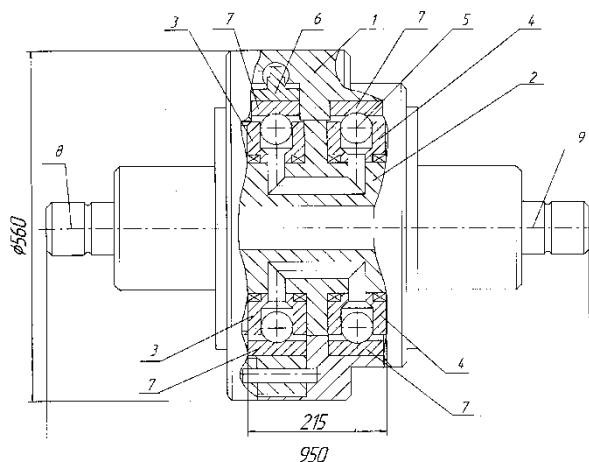
$$\varepsilon = \sum_{j=1}^{(i-1)} \Delta_j \varepsilon; \quad \sigma = \sum_{j=1}^{(i-1)} \Delta_j \sigma.$$

Тут  $\mathbf{u}, \varepsilon, \sigma$  – вектор переміщень та тензори деформацій і напружень.

Подібний підхід задекларовано у роботі [1], причому для окремих задач він реалізований із застосуванням методу граничних елементів та методу скінченних елементів.

У цій роботі нижчі описані результати досліджень із застосуванням МСЕ.

**Задачі досліджень напружено-деформованого стану контактуючих тіл із проміжним шаром.** Як і у роботі [1], як тестову конструкцію залучено гідропередачу ГОП-900 для оснащення перспективних танкових трансмісій, яка розроблена Державним підприємством «Харківське конструкторське бюро з машинобудування ім. О.О. Морозова» [27]. Зокрема, у цій конструкції (рис. 2) проблемним є з'єднання «кульковий поршень 5 – обомна (бігова доріжка) 7 статора насоса б».



1 – корпус; 2 – блок цапфових розподільчавів; 3 – блок циліндрів насоса (ротор); 4 – блок циліндрів гідромотора (ротор); 5 – кульковий поршень; 6 – статор насоса; 7 – обомни (бігові доріжки) насоса та гідромотора; 8 і 9 – вхідний і вихідний вали гідропередачі

Рисунок 2 – Гідропередача ГОП-900 із кульковими поршнями [27]

Оскільки у цьому випадку властивості шарів шорсткості на контактуючих деталях (поршень 5 та бігова доріжка 7) чинять значний вплив на контактну взаємодію цих тіл, то у наступних дослідженнях було здійснено початковий аналіз із пробними значеннями варійованих параметрів  $\alpha_1 \div \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ . Вони за номінальні мають одиничні значення  $\alpha_k = 1; \beta_k = 1; s = 1 \div 3; k = 1, 2$ . При цьому притисна сила  $P$  поршня до бігової доріжки варіюється від 50 кН до 200 кН (із проміжним, умовно

«номінальним» значенням  $P = 100$  кН).

У ході конкретної реалізації для моделювання т.з. «білінійної» нелінійної моделі поведінки проміжного шару (тобто  $\alpha_3 \equiv \alpha_2$ ) між кульковим поршнем та біговою доріжкою ГОП-900 розміщено два шари (рис. 3).

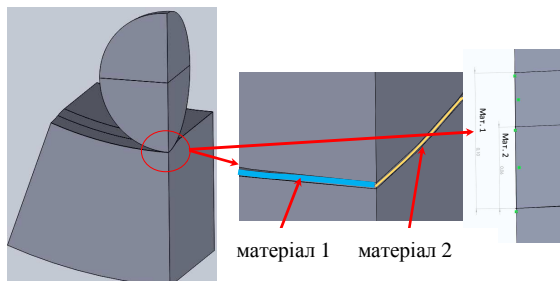


Рисунок 3 – Геометрична форма контактування тіл (кульковий поршень, два проміжних шарів та бігова доріжка)

Перший має висоту  $10^{-4}$  м, модуль пружності  $E_1$ , другий – висоту  $6 \cdot 10^{-5}$  м, модуль пружності  $E_2 = 10^{10}$  Па, відповідно ( $E_3 \equiv E_2$ ).

Основною задачею було визначити характерну поведінку розподілів контактного тиску при варіюванні властивостей проміжного шару між контактуючими тілами. На рис. 4, 5 наведені скінченно-елементні моделі, крайові умови та умови навантаження.

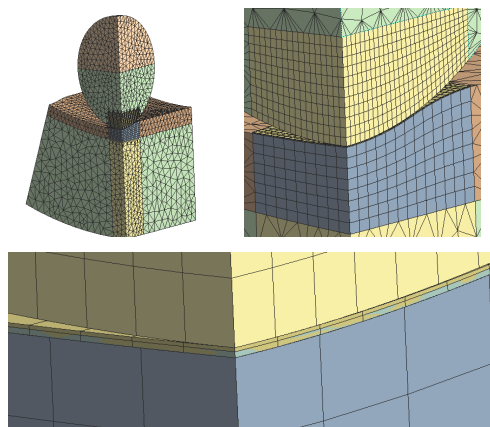


Рисунок 4 – Скінченно-елементна сітка (1/4 моделі)

У ході досліджень параметри  $\alpha$  варіюються відповідно до даних, зведених у табл. 1.

Таблиця 1 – Розрахункові варіанти досліджень напружено-деформованого стану контактуючих деталей поршня та бігової доріжки ГОП-900

№	$\alpha_1$	№	$\alpha_1$
1	$2,5 \cdot 10^{-3}$	5	$1,5 \cdot 10^{-2}$
2	$5 \cdot 10^{-3}$	6	$1,6 \cdot 10^{-2}$
3	$7,5 \cdot 10^{-3}$	7	$1,65 \cdot 10^{-2}$
4	$10^{-2}$	8	$1,7 \cdot 10^{-2}$

В табл. 2–6 та на рис. 6–15 наведені розподіли контактного тиску  $p$ , повних переміщень  $|u|$  та еквівалентних напружень за Мізесом  $\sigma_{\text{екв}}$ , залежно від параметра  $\tau = \{0,5; 1,0; 2,0\}$  с, що відповідає зміні притисної сили  $P$  від 0 кН до 200 кН (для

вірiанту 8 у випадку вiдсутностi контакту розподiл тиску не наведено).

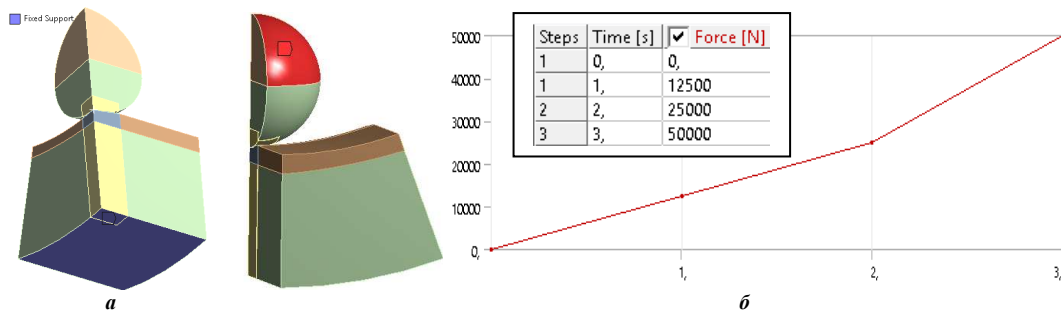


Рисунок 5 – Крайовi умови (а) та навантаження (б) (1/4 моделi) в умовних «с»

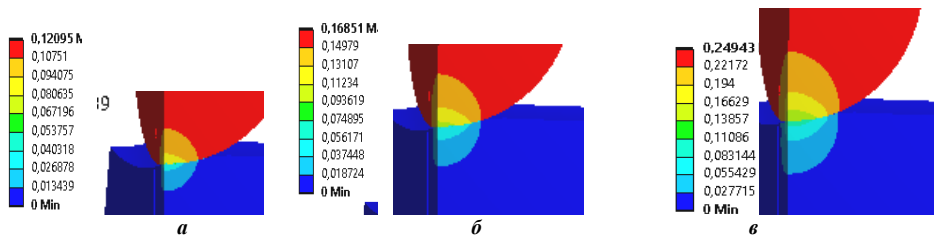


Рисунок 6 – Повнi перемiщення у конструкцiї при навантаженнi: а – 50 кН, б – 100 кН, в – 200 кН

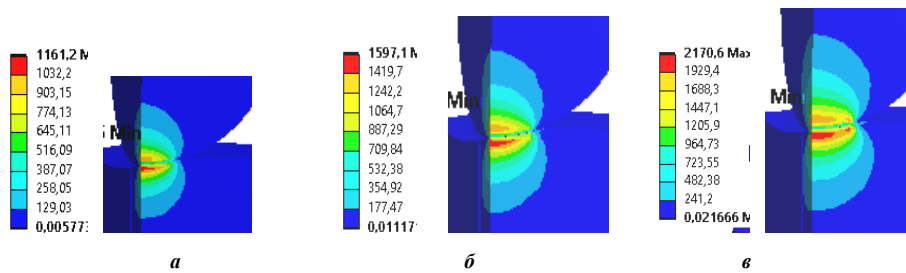
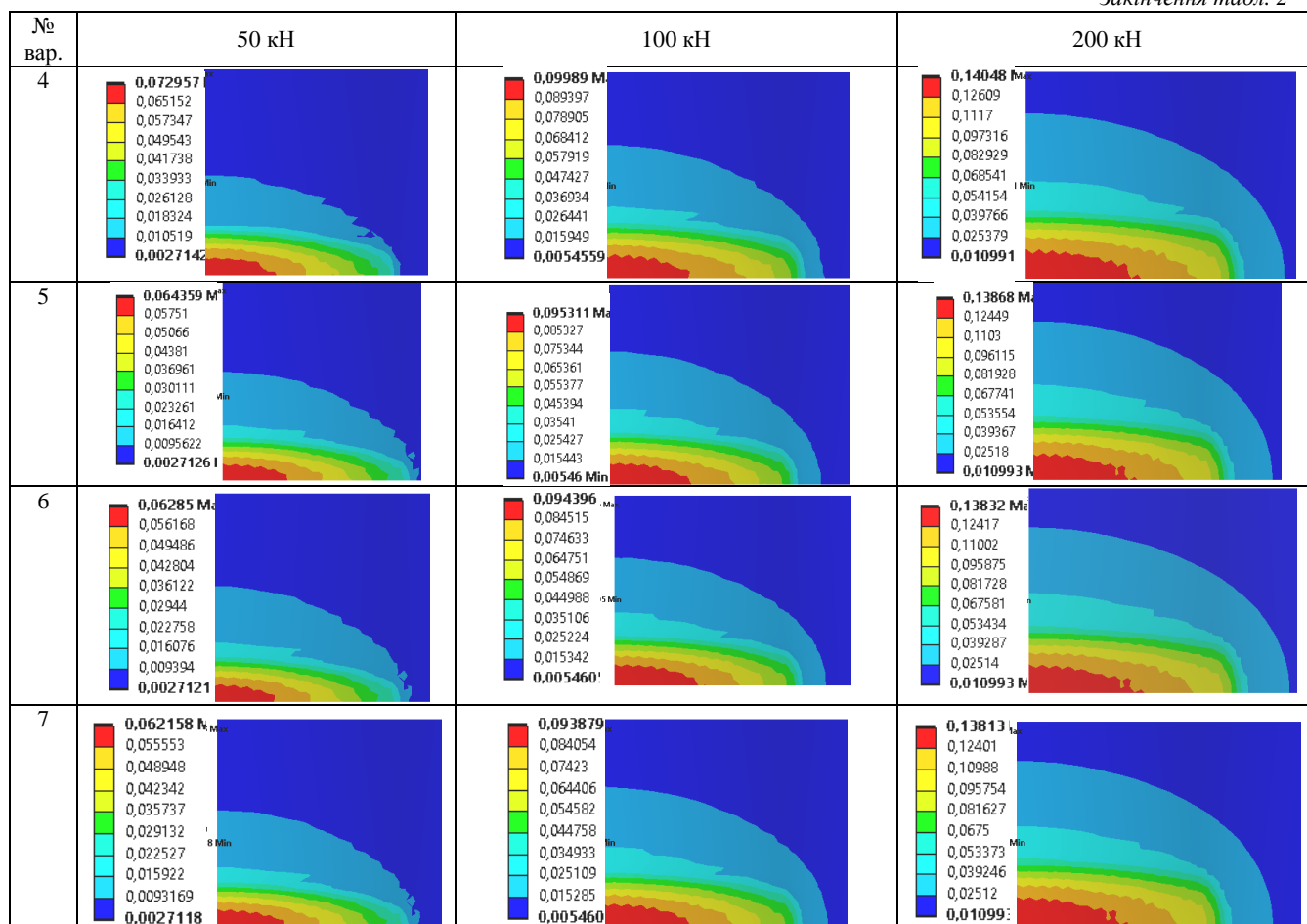


Рисунок 7 – Еквiвалентнi напруження за Мiзесом у конструкцiї при навантаженнi: а – 50 кН, б – 100 кН, в – 200 кН

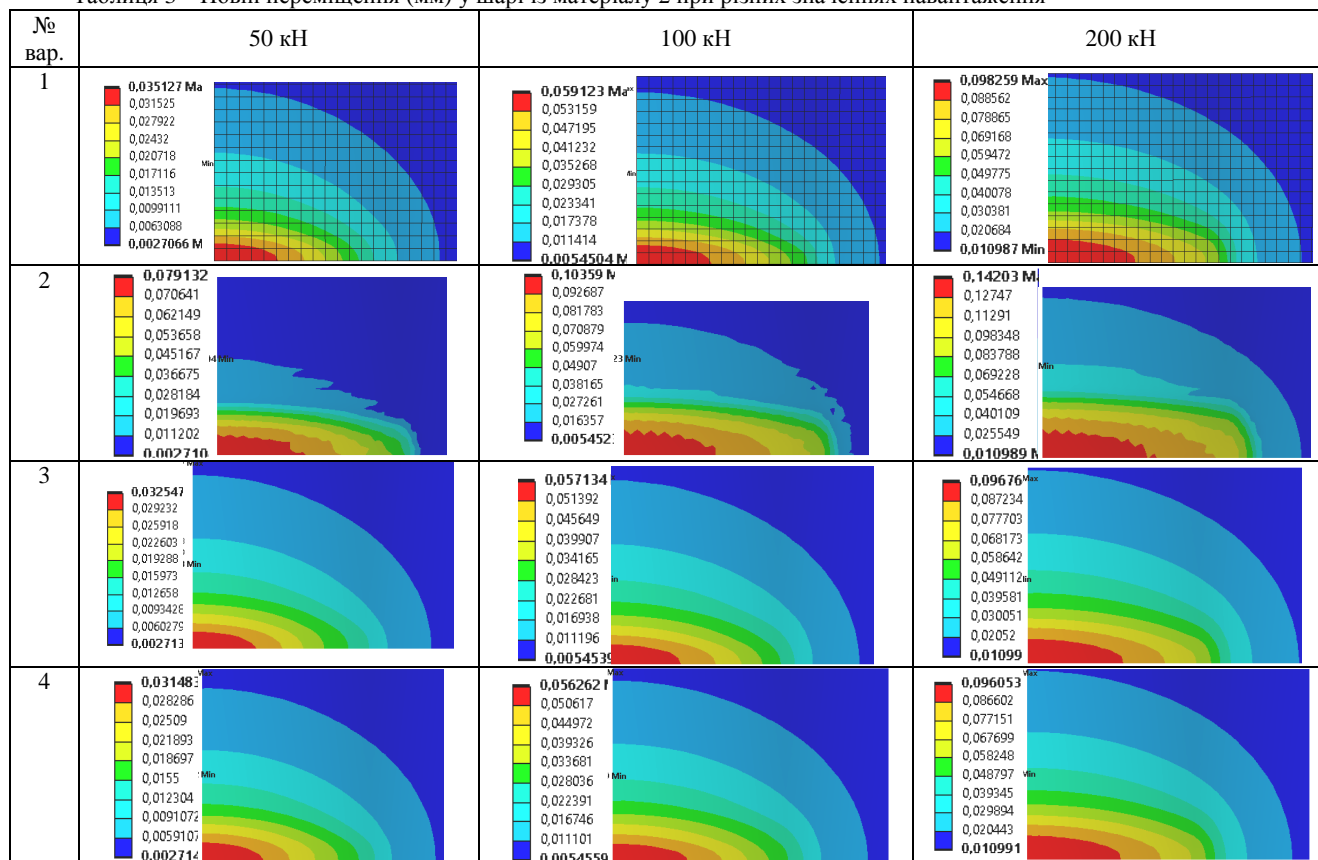
Таблиця 2 – Повнi перемiщення (мм) у шарi з матерiалу 1 при рiзних значеннях навантаження

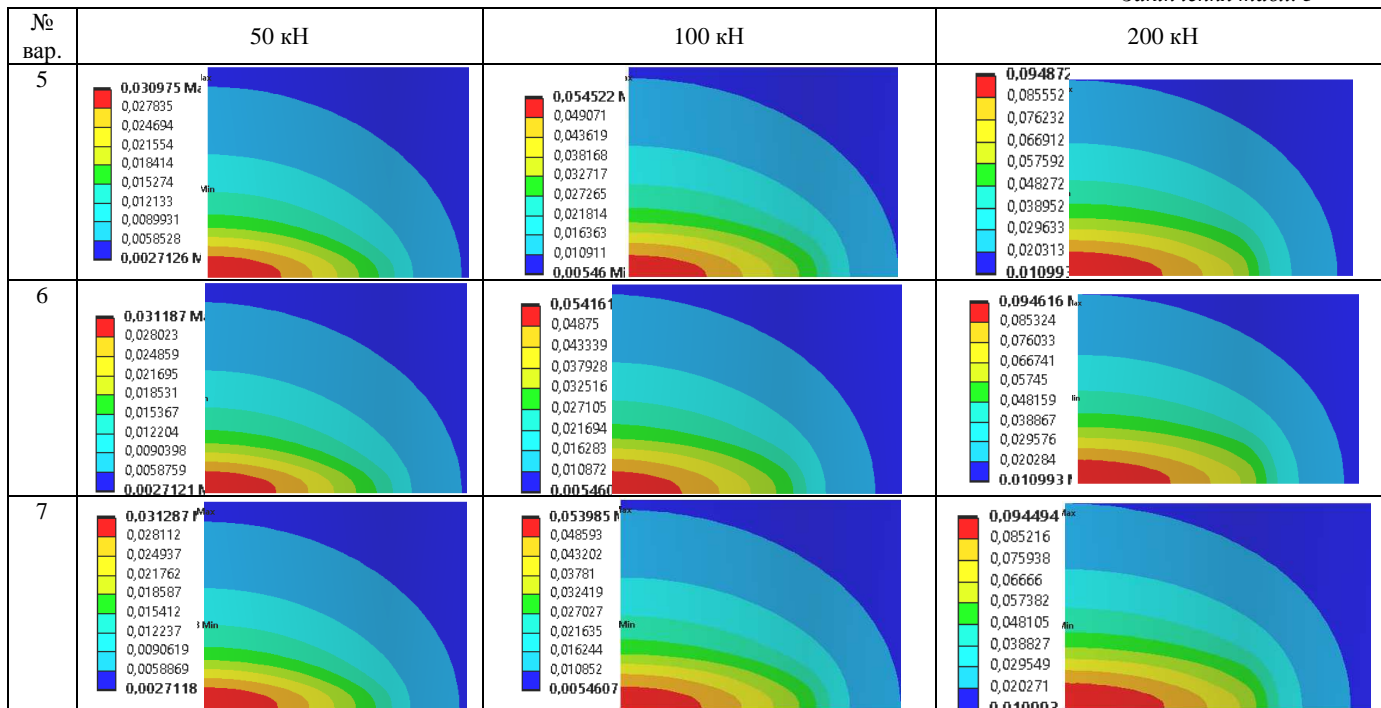
№ вар.	50 кН	100 кН	200 кН
1	<p>0,081259 М 0,072531 0,063803 0,055075 0,046347 0,037619 0,028891 0,020163 0,011435 0,0027066 Н</p>	<p>0,10508 М 0,090464 0,079837 0,069211 0,058584 0,047957 0,037331 0,026704 0,016077 0,0054504 Н</p>	<p>0,1428 М 0,090464 0,080529 0,070595 0,060666 0,050726 0,040791 0,030857 0,020922</p>
2	<p>0,033676 0,030235 0,026795 0,023354 0,019913 0,016473 0,013032 0,0095916 0,006151 0,002710</p>	<p>0,058122 0,052272 0,046419 0,040567 0,034715 0,028862 0,02301 0,017157 0,011305 0,005452</p>	<p>0,09747 0,087868 0,078258 0,068648 0,059038 0,049428 0,039818 0,030208 0,020598 0,010988</p>
3	<p>0,076247 0,068077 0,059906 0,051736 0,043565 0,035395 0,027224 0,019054 0,010883 0,002713</p>	<p>0,10183 0,091119 0,080411 0,069703 0,058994 0,048286 0,037578 0,02687 0,016162 0,00545</p>	<p>0,14119 Н 0,12672 0,11225 0,097788 0,083322 0,068855 0,054389 0,039923 0,025456 0,01099 Н</p>

Закінчення табл. 2

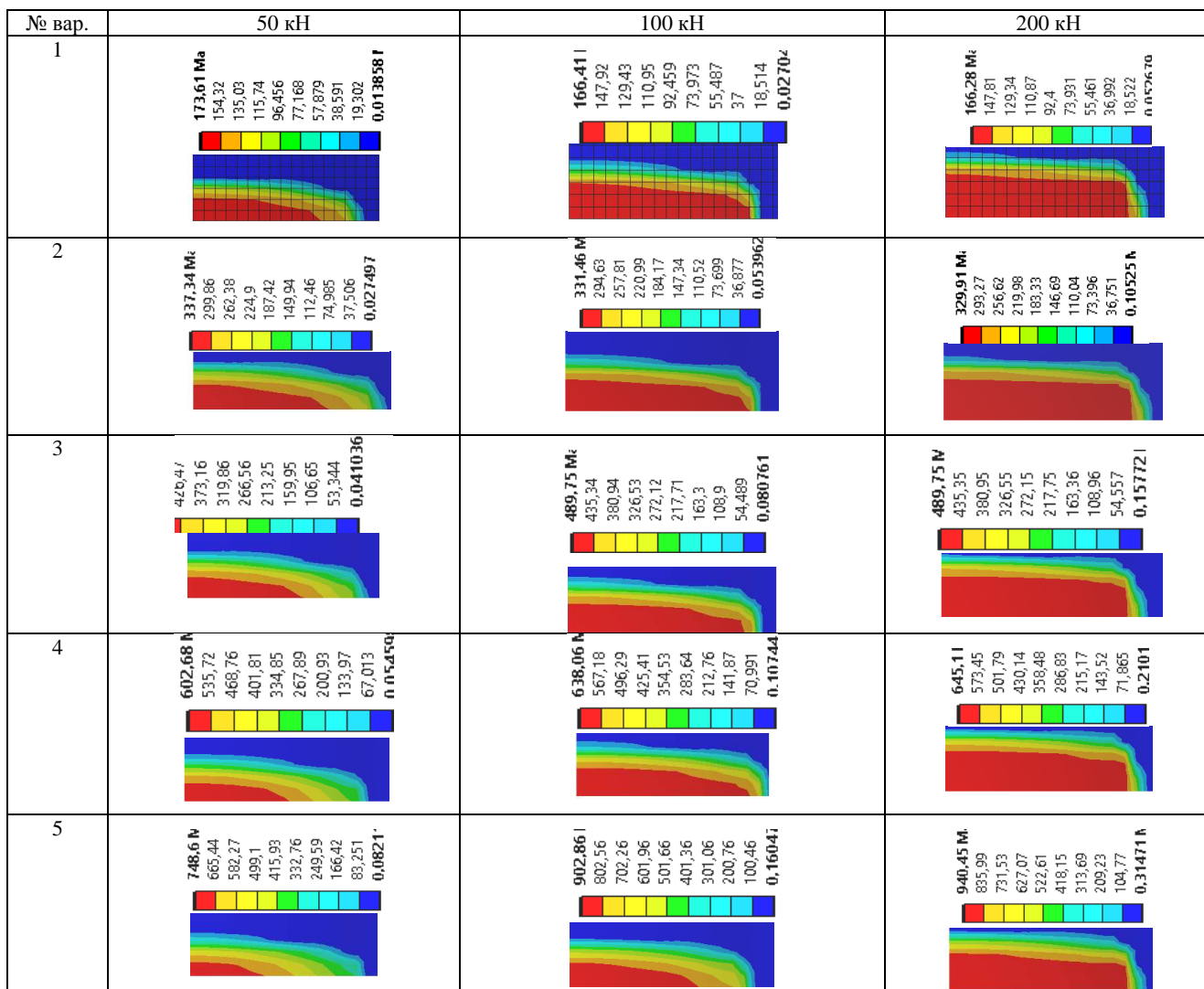


Таблиця 3 – Повні переміщення (мм) у шарі із матеріалу 2 при різних значеннях навантаження





Таблиця 4 – Еквівалентні напруження за Мізесом (МПа) у шарі із матеріалу 1 при різних значеннях навантаження

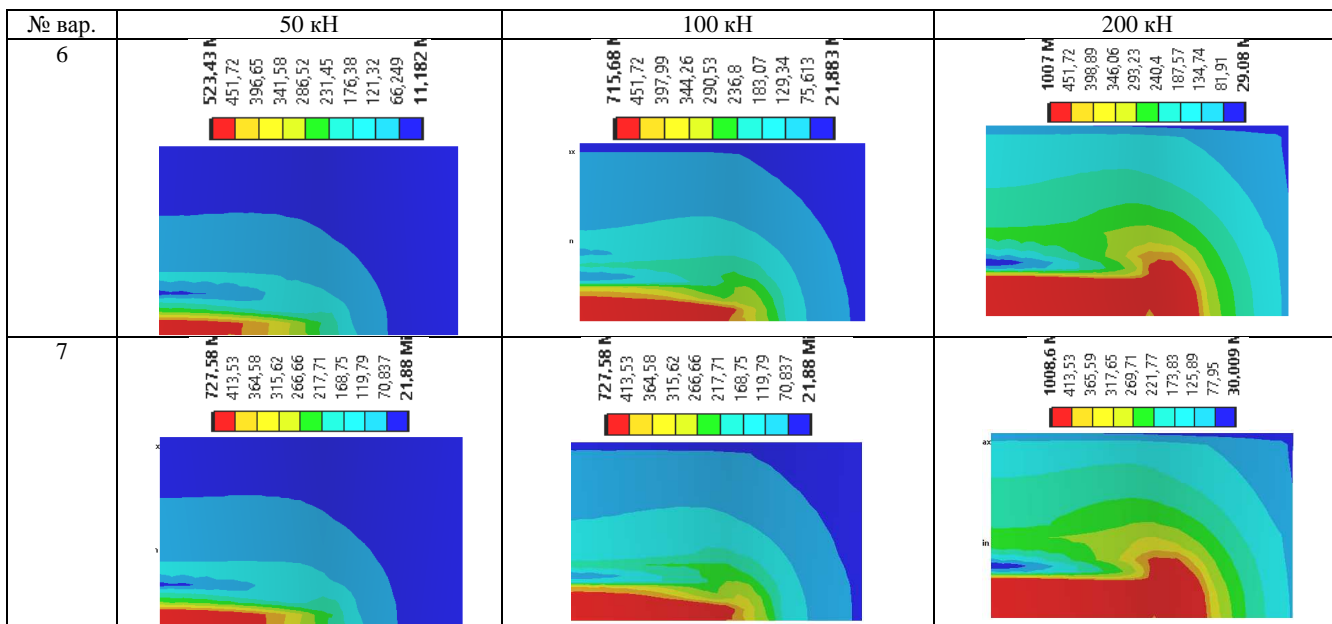


Закінчення табл. 4

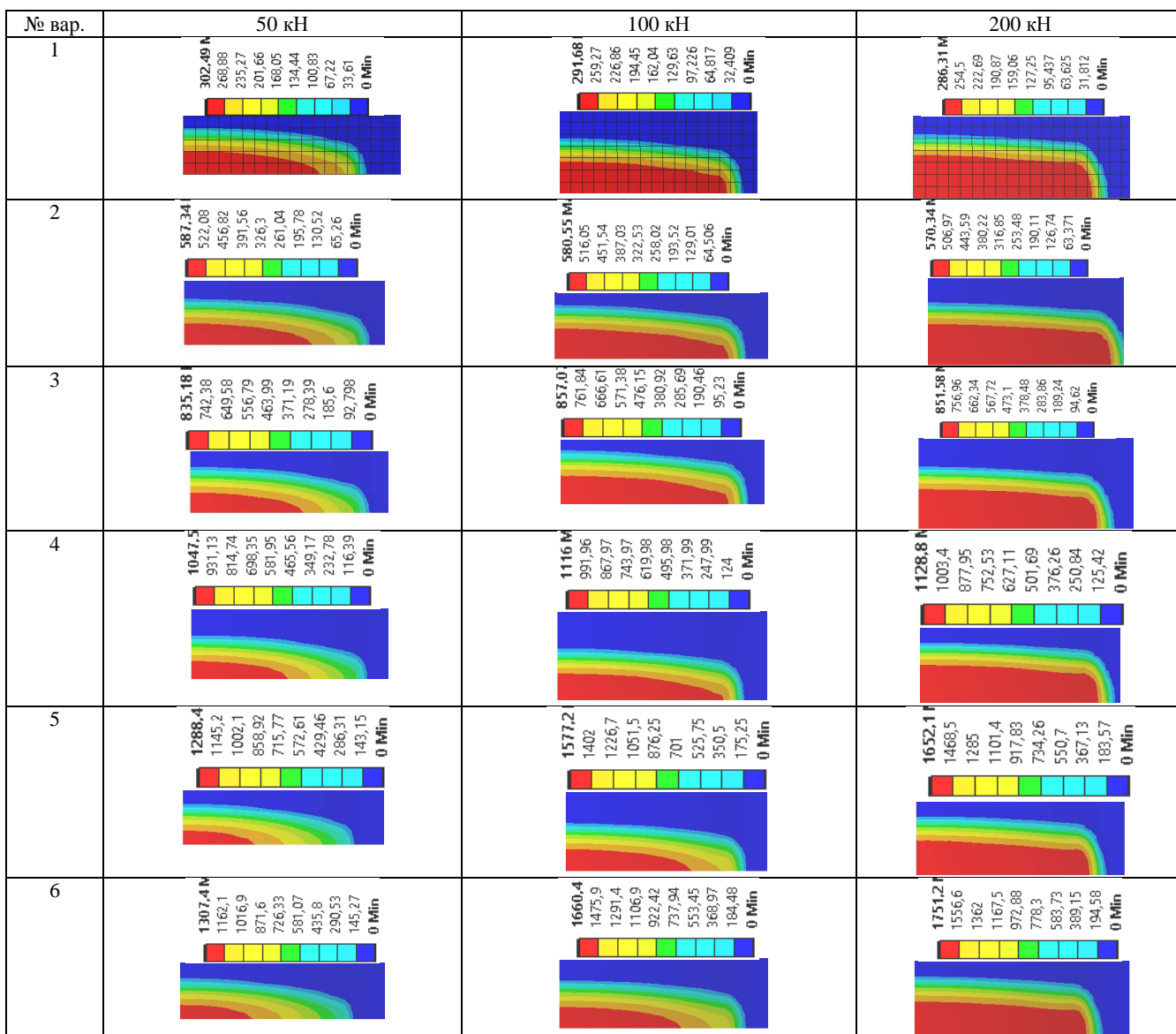
№ вар.	50 кН	100 кН	200 кН
6			
7			

Таблиця 5 – Еквівалентні напруження за Мізесом (МПа) у шарі із матеріалу 2 при різних значеннях навантаження

№ вар.	50 кН	100 кН	200 кН
1			
2			
3			
4			
5			



Таблиця 6 – Контактний тиск у шарі (МПа) із матеріалу І при різних значеннях навантаженні





№ вар.	50 кН	100 кН	200 кН
7			

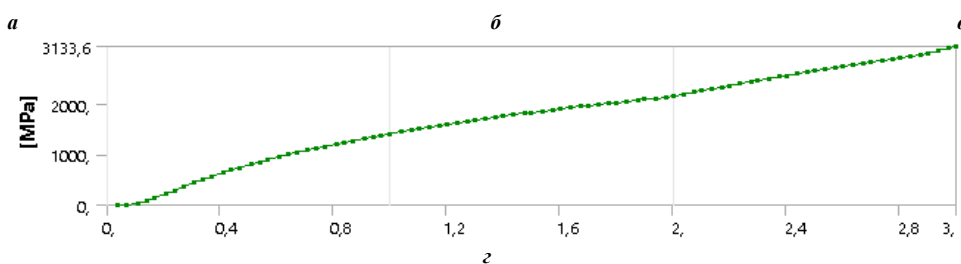
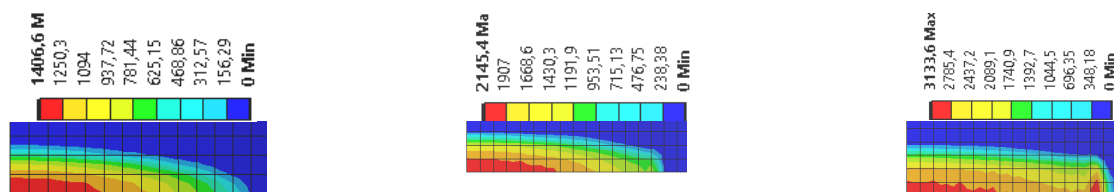


Рисунок 8 – Контактний тиск (МПа) у шарі із матеріалу 2 при навантаженні (варіант № 1 у табл. 1):  
 а – 50 кН, б – 100 кН, в – 200 кН, z – рівень контактного тиску залежно від історії навантаження

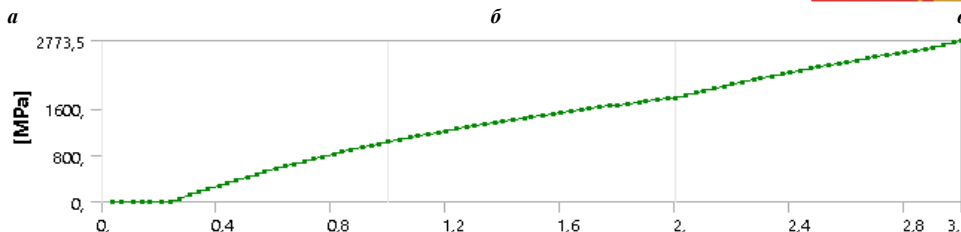
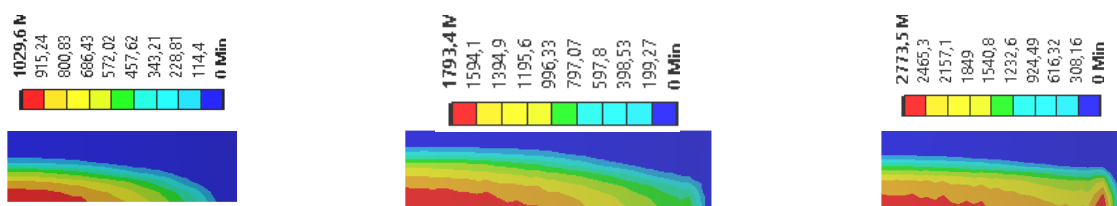


Рисунок 9 – Контактний тиск (МПа) у шарі із матеріалу 2 при навантаженні (варіант № 2 у табл. 1):  
 а – 50 кН, б – 100 кН, в – 200 кН, z – рівень контактного тиску залежно від історії навантаження

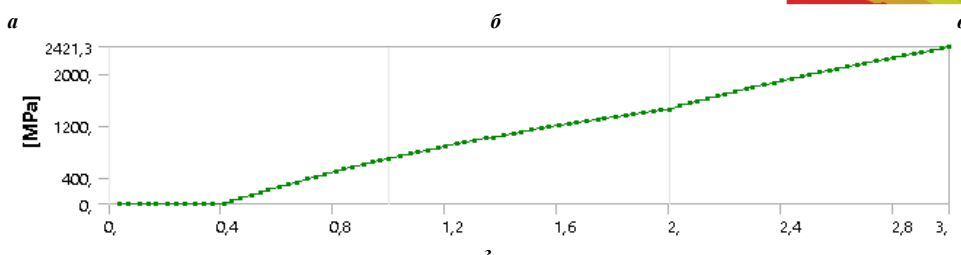
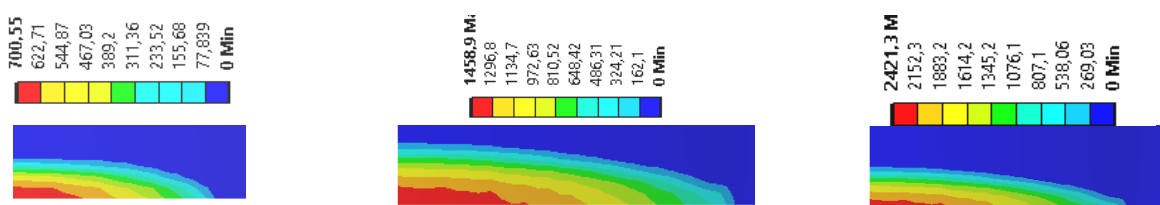


Рисунок 10 – Контактний тиск (МПа) у шарі із матеріалу 2 при навантаженні (варіант № 3 у табл. 1):  
 а – 50 кН, б – 100 кН, в – 200 кН, z – рівень контактного тиску залежно від історії навантаження

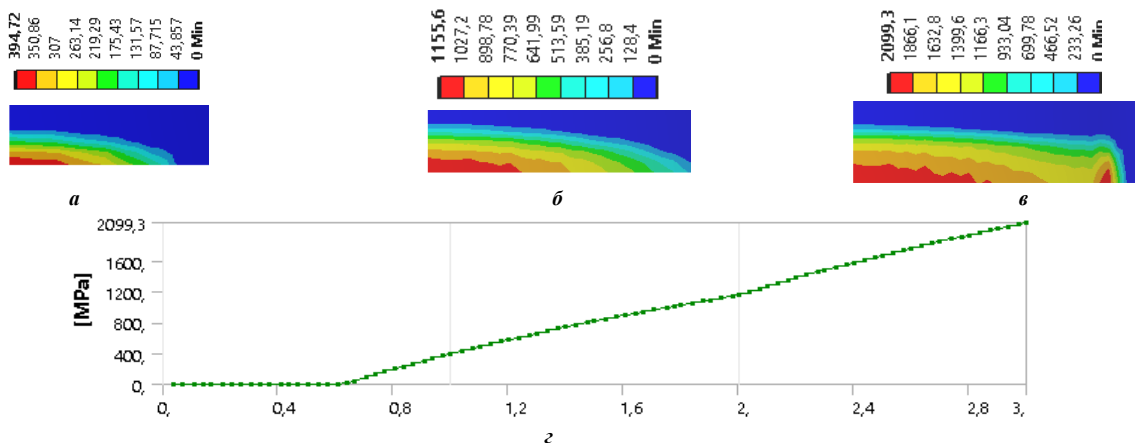


Рисунок 11 – Контактний тиск (МПа) у шарі із матеріалу 2 при навантаженні (варіант № 4 у табл. 1): а – 50 кН, б – 100 кН, в – 200 кН, z – рівень контактного тиску залежно від історії навантаження

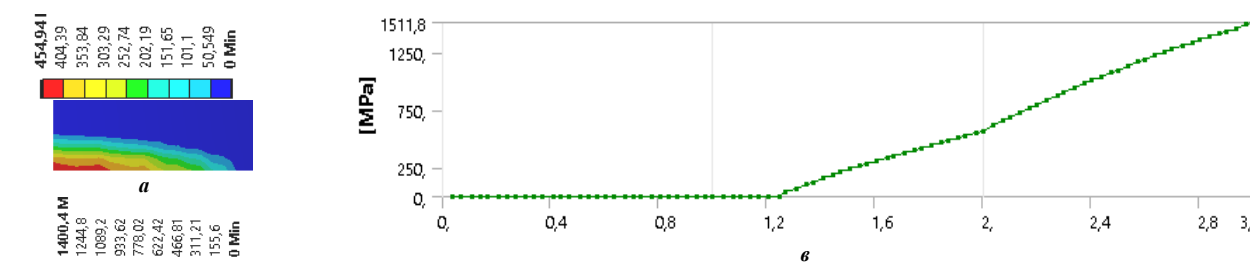


Рисунок 12 – Контактний тиск (МПа) у шарі із матеріалу 2 при навантаженні (варіант № 5 у табл. 1): а – 100 кН, б – 200 кН, в – рівень контактного тиску залежно від історії навантаження (для навантаження 50 кН контактний тиск відсутній)

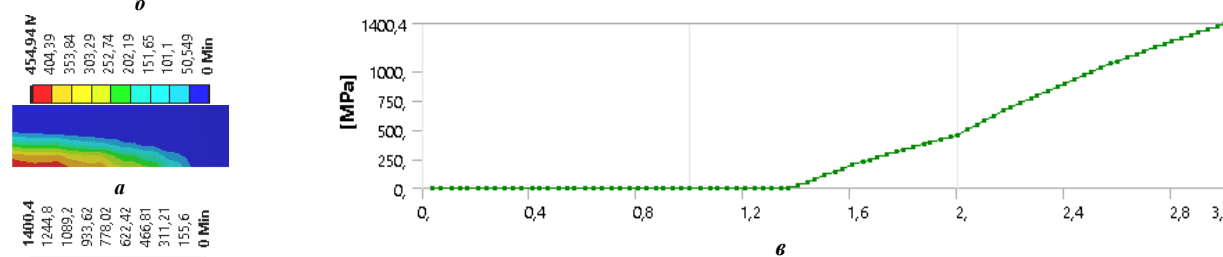


Рисунок 13 – Контактний тиск (МПа) у шарі із матеріалу 2 при навантаженні (варіант № 6 у табл. 1): а – 100 кН, б – 200 кН, в – рівень контактного тиску залежно від історії навантаження (для навантаження 50 кН – контактний тиск відсутній)

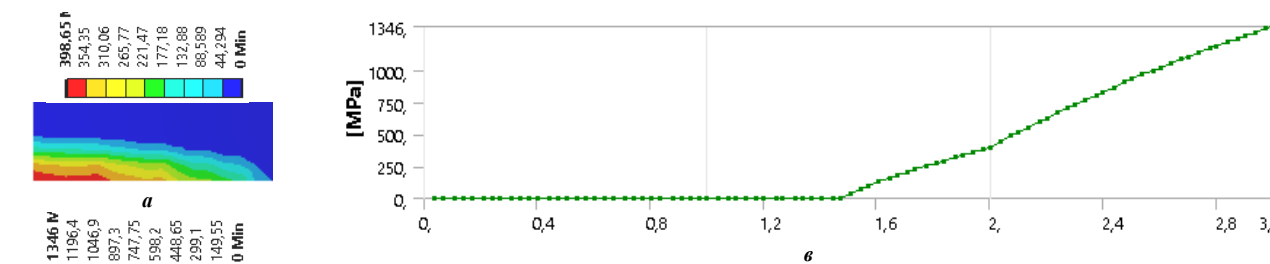


Рисунок 14 – Контактний тиск (МПа) у шарі із матеріалу 2 при навантаженні (варіант № 7 у табл. 1): а – 100 кН, б – 200 кН, в – рівень контактного тиску залежно від історії навантаження (для навантаження 50 кН - контактний тиск відсутній)

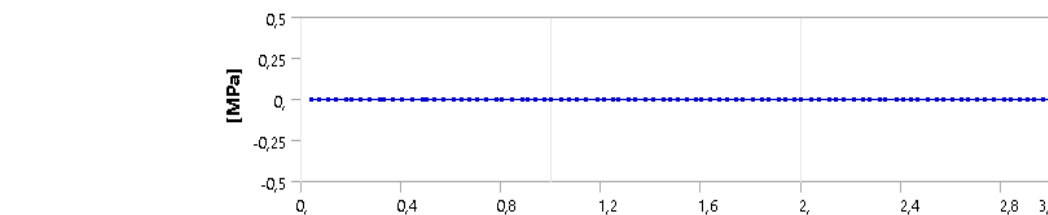


Рисунок 15 – Контактний тиск у шарі із матеріалу 2 при навантаженні (варіант № 8 у табл. 1)

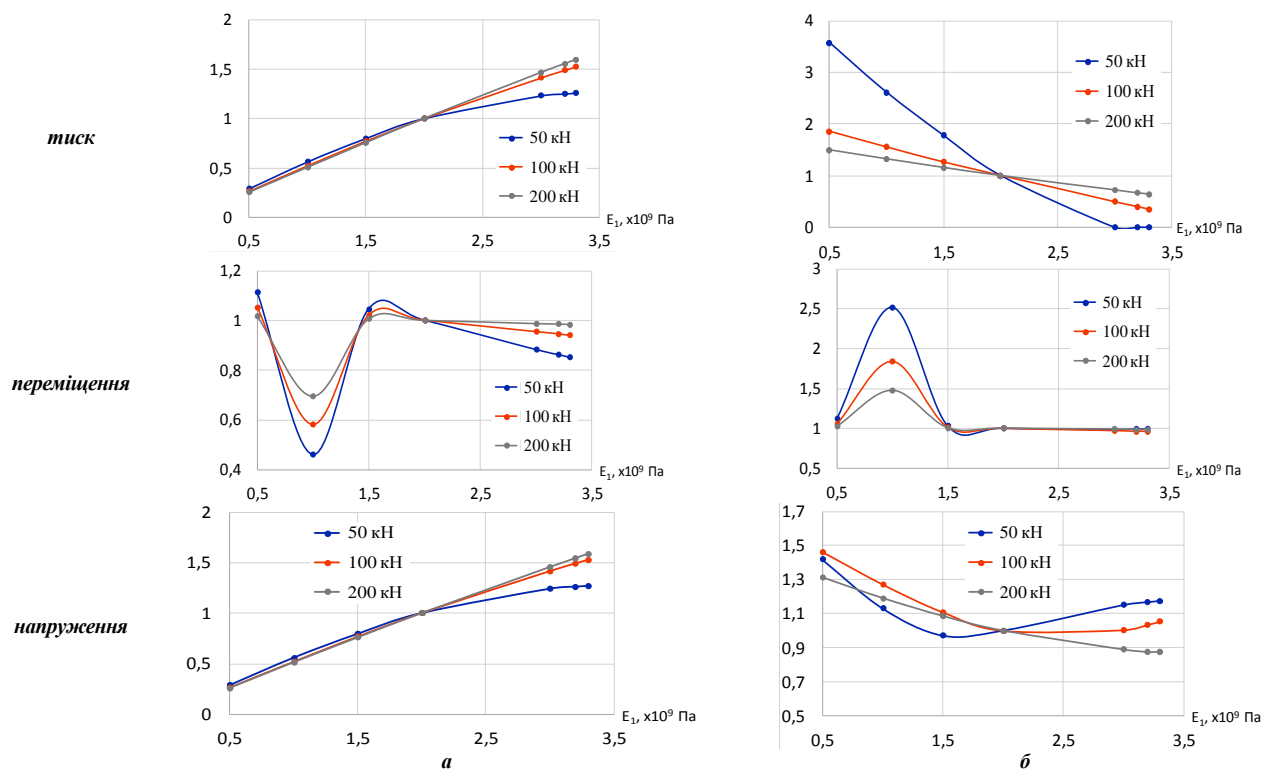


Рисунок 16 – Відносні рівні характеристик напружено-деформованого стану в контакті матеріалу 1 (а) та матеріалу 2 (б) (відносились до тиску при  $E=2 \cdot 10^9$  Па)

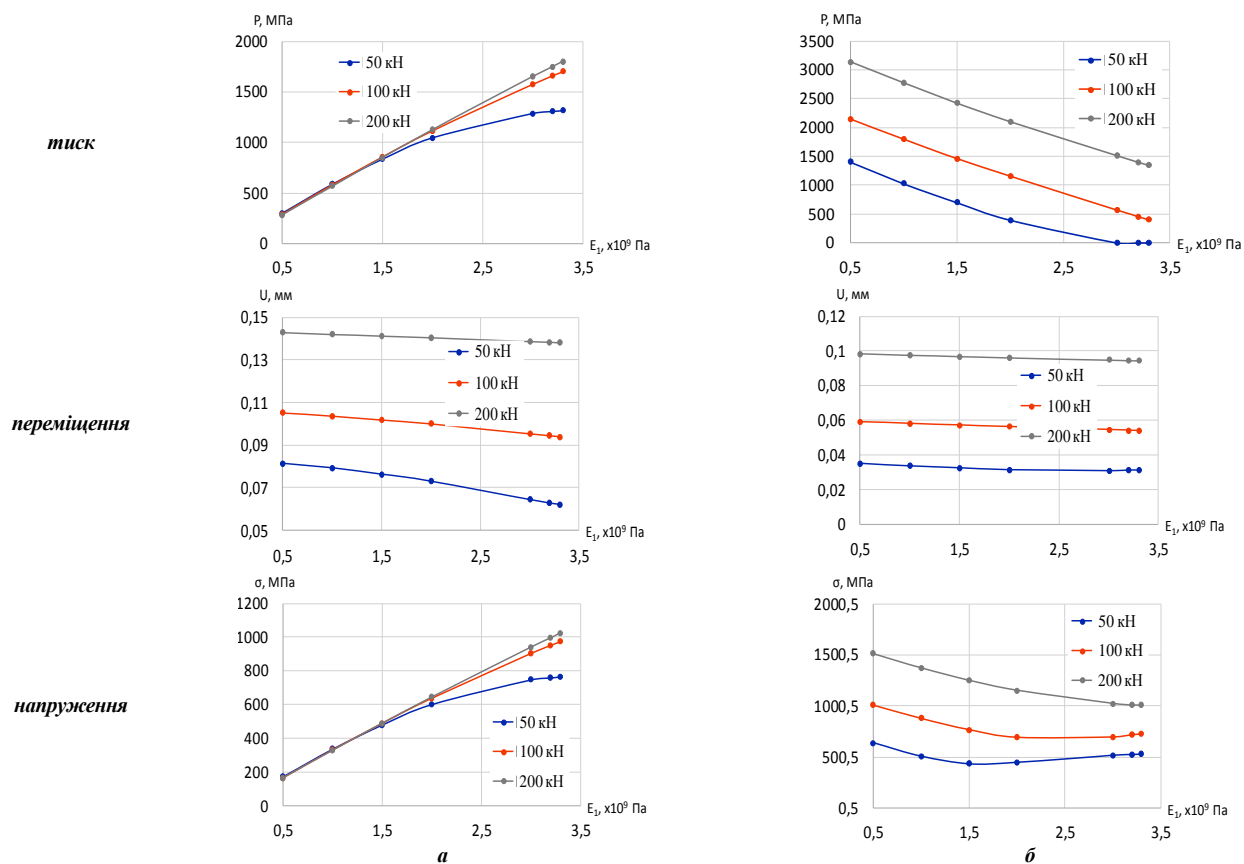


Рисунок 17 – Рівні характеристик напружено-деформованого стану в контакті матеріалу 1 (а) та матеріалу 2 (б)

На рис. 16, 17 наведені рівні (відносних та абсолютних) тиску, переміщень та напружень відповідно:  $\delta_p = \frac{P_{\max}^M}{P_{\max}^I}$ ;  $\delta_u = \frac{u_{\max}^M}{u_{\max}^I}$ ;  $\delta_\sigma = \frac{\sigma_{\text{екк max}}^M}{\sigma_{\text{екк max}}^I}$ ,

де індекс  $M$  відповідає номеру варіанту в табл. 1.

**Аналіз отриманих результатів досліджень напружено-деформованого стану кулькового поршня гідропередачі ГОП-900.** Як видно із наведених розподілів контактного тиску, повних

перемішень та еквівалентних напружень за Мізесом (див. рис. 2–15 та табл. 2–6), їхній характер має свої особливості. З одного боку, за малого рівня навантажень реалізуються розподіли, характерні для традиційних моделей: контактна область має форму овала, максимальний контактний тиск – у центральній точці цієї області. Однак зі зростанням навантажень форма контактної області трансформується у криволінійний чотирикутник із округленими кутами. Надалі за зростання навантажень до контактування долучається другий, більш жорсткий шар. Область контакту набуває гантелевидної форми. Контактний тиск досягає максимумів у центрі та на периферії (у центрі краплевидного розширення).

Що стосується загальних характеристик напружено-деформованого стану контактуючих тіл (див. рис. 16, 17), то вони відображають особливості дослідженої системи. Спостерігається не тільки їх нелінійний характер, але й ділянки переломів, які властиві переходам від одного етапу навантаження до іншого.

**Висновки.** Із застосуванням розробленої нової моделі контактної взаємодії установлені особливості напружено-деформованого стану елементів «кульковий поршень – бігова доріжка» гідропередачі ГОП-900.

1. Зростання притискної сили призводить до зміни області контакту від початково овальної до гантелевидної.

2. Контактний тиск змінює характер розподілу на області контакту. Зі зростанням притискної сили з'являється локальний максимум на периферійній частині, а не тільки у центрі.

3. Наявність другого контактного шару, який вступає у взаємодію після вибирання початкового зазору, суттєво впливає на розподіл контактної тиску.

У цілому розроблена модель демонструє і певні можливості, і деякі обмеження у дослідженні контактної взаємодії тіл близької форми. Надалі планується розвиток цієї моделі та дослідження контактної взаємодії системи тіл у більш широкому діапазоні варіюваних параметрів.

#### Список літератури

1. Ткачук М.М., А.В. Грабовський, М.А. Ткачук, В.І. Сериков, І. О. Волошина, Андрусенко А. В. Методи, моделі та результати досліджень контактної взаємодії складнопрофільних тіл із урахуванням залежності характеристик матеріалу проміжних шарів від історії навантаження. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: *Машинознавство та САПР*. 2020. № 1. С. 167–142.
2. Johnson, K. L. *Contact Mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1987. 464 p.
3. Механика контактных взаимодействий. Под редакцией Воровича И.И., Александрова В.М. М.: Физматлит, 2001. 671 с.
4. Аргатов И.И. Асимптотические модели упругого контакта. С–П.: Наука, 2005. 448 с.
5. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А., Грабовский А.В. *Контактное взаимодействие сложнопрофильных деталей машиностроительных конструкций с учетом локальной податливости поверхностного слоя*. Харьков: ФОП Панов А.Н., 2017. 148 с.
6. Ткачук Н. Н. *Контактное взаимодействие сложнопрофильных элементов машиностроительных конструкций с кинематически сопряженными поверхностями*. Харьков: ФОП Панов А.Н., 2017. 188 с.
7. Tkachuk M. M., A. Grabovskiy, M. A. Tkachuk, M. Saverska, Hrechka I. A semi-analytical method for analysis of contact interaction between structural elements along aligned surfaces. *Eastern-European Journal of Enterprise*

8. Zhao J., E. Vollebregt, C. Oosterlee Extending the BEM for elastic contact problems beyond the half-space approach. *Mathematical Modelling and Analysis*. 2016, 21(1), pp. 119-141
9. Ткачук М.М., А.В. Грабовський, А.І. Ліпейко, ..., Сериков В. І. Обґрунтування технічних рішень гідропередач перспективних танкових трансмісій на основі моделювання контактної взаємодії кулькового поршня із біговою доріжкою. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. 2019. № 2. С. 68-77
10. Кравчук А.С. Метод вариационных неравенств в контактных задачах. *Механика контактных взаимодействий*. 2001. С. 93–115.
11. Hlavacek I., J. Haslinger, J. Necas [and oth.]. *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*. Berlin, New York: Springer–Verlag, 1988. 327 p.
12. Slobodyan B.S., [...], Martynuk R.M. Modeling of Contact Interaction of Periodically Textured Bodies with Regard for Frictional Slip. *J. of Mathematical Sciences*, 2016. Vol. 215(1), 110-112.
13. Slobodyan B.S., [...], Martynuk R.M. Моделирование контактной взаимодействия периодически текстурированных тел с учетом трения при проковзвании. *Мат. мет. та фіз.-мех. поля*. 2014, 57(2).
14. Tkachuk M. A Numerical Method for Axisymmetric Adhesive Contact Based on Kalker's Variational Principle. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. No 3/7(93). P. 34–41.
15. Tkachuk M.M., Skripchenko N., Tkachuk M.A., Grabovskiy A. Numerical Methods for Contact Analysis of Complex-Shaped Bodies with Account for Non-Linear Interface Layers. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. No 5/7(95). P. 22–31.
16. Tkachuk M. M., Grabovskiy A., Tkachuk M. A., Hrechka I., Ishchenko O., Domina N. investigation of multiple contact interaction of elements of dividing stamps. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. No 4/7(100). P. 6–15
17. Vollebregt E., G. Segal. Solving conformal wheel-rail rolling contact problems. *Vehicle System Dynamics*, vol 52, pp. 455-468, 2014
18. Kalker J.J. Variational principles of contact elastostatics. *J. Inst. Math. and Appl.* 1977. Vol. 20. P. 199–221.
19. Огар П. М., Д.Б. Горохов, Елсуков В. К. Упругий контакт жесткой шероховатой поверхности с низкомолекулярным полупространством. *Системы. Методы. Технологии*. 2017. № 2 (34). С. 7–12.
20. Persson B.N.J. Relation between interfacial separation and load: a general theory of contact mechanics. *Physical review letters*. 2007. Vol. 99(12). P. 125502.
21. Pohrt R., Popov V. L. Contact stiffness of randomly rough surfaces. *Scientific reports*, 2013. Vol. 3.
22. Yang C., Persson B.N.J. Contact mechanics: contact area and interfacial separation from small contact to full contact. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2008. Vol. 20(21). P. 215–214.
23. Papangelo A., N. Hoffmann, Ciavarella M. Load-separation curves for the contact of self-affine rough surfaces. *Scientific reports*. 2017, 7 (1), 6900.
24. Li Q., VL Popov. Adhesive force of flat indenters with brush structure. *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*. 2018, vol. 16 (1), pp. 1-8.
25. Popov, V. L., Pohrt, R., & Li, Q. (2017). Strength of adhesive contacts: Influence of contact geometry and material gradients. *Friction*, 5(3), 308-325. DOI: 10.1007/s40544-017-0177-3.
26. Pohrt R., Popov V. L. Contact mechanics of rough spheres: Crossover from fractal to hertzian behavior. *Advances in Tribology*, 2013.
27. Аврунин Г.А., Кабаненко И.В., Хавиль В.В., Истратов А.В. и др. Объемная гидроредация с шариковыми поршнями ГОП-900: характеристики и технический уровень. *Механика та машинобудування*. 2004. №1. С. 14–21.

#### References (transliterated)

1. Tkachuk M.M., A.V. Grabovskij, M.A. Tkachuk, V.I. Serikov, I. O. Voloshina, Andrusenko A. V. Metodi, modeli ta rezultati doslidzhen' kontaktnoi vzaimodii skladnoprofil'nyh til iz urahuvannjam zalezhnosti harakteristik materialu promizhnyh shariv vid istorii navantazhennja. *Visnik Nacional'nogo tehnicnogo universitetu «KhPI»*. Serija: *Mashinoznastvo ta SAPR*. 2020, no. 1, pp. 119–142.
2. Johnson, K. L. *Contact Mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1987. 464 p.
3. *Mehanika kontaktnykh vzaimodeystviy*. Pod redaktsiey Vorovicha I.I., Aleksandrova V.M. M.: Fizmatlit, 2001. 671 p.
4. Argatov I.I. *Asimptoticheskie modeli uprugogo kontakta*. S–P.: Nauka, 2005. 448 p.
5. Tkachuk N.N., Skripchenko N.B., Tkachuk N.A., Grabovskiy A.V. *Kontaktное взаимодействие сложнопрофильных деталей машиностроительных конструкций с учетом локальной податливости поверхностного слоя*. Kharkov: FOP Panov A.N., 2017. 148 p.

6. Tkachuk N. N. Kontaknoe vzaimodeystvie slozhnoprofilnykh elementov mashinostroitelnykh konstruktov s kinematically sopryazhennymi poverhnostyami. Kharkov: FOP Panov A.N., 2017. 188 p.
7. Tkachuk M. M., A. Grabovskiy, M. A. Tkachuk, M. Saverska, Hrechka I. A semi-analytical method for analysis of contact interaction between structural elements along aligned surfaces. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. no.1/7 (103), pp. 16-25.
8. Zhao J., E. Vollebregt, C. Oosterlee Extending the BEM for elastic contact problems beyond the half-space approach. *Mathematical Modelling and Analysis*. 2016, vol. 21 (1), pp. 119-141.
9. Tkachuk M. M., A. V. Grabovskiy, A. I. Lipeyko, B.Ya. Litvin, O. M. Rikunov, M. S. Saverska, G. V. Tkachuk, Serikov V. I. Obgruntuvannya tehnicnih rishen gidropredach perspektivnih tankovih transmisii na osnovi modelyuvannya kontaktnoyi vzaemodiyi kulkovogo porshnya iz bigovoyu dorizhkoju. *Visnik natsionalnogo tehnicnogo universitetu «KhPI»*. 2019. no. 2, pp. 68-77.
10. Kravchuk A.S. Metod variatsionnykh neravenstv v kontaktnykh zadachah. *Mehanika kontaktnykh vzaimodeystviy*. 2001, pp. 93–115.
11. Hlavacek L., J. Haslinger, J. Necas [and oth.]. *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*. Berlin, New York: Springer–Verlag, 1988. 327 p.
12. Slobodyan B.S., [...], Martyniak R.M. Modeling of Contact Interaction of Periodically Textured Bodies with Regard for Frictional Slip. *J. of Mathematical Sciences*, 2016. vol. 215(1), pp. 110-112.
13. Slobodyan B.S., [...], Martyniak R.M. Modelyuvannya kontaktnoyi vzaemodiyi periodichno teksturovanih tll z urahuvanniam friktsiynogo prokovanannya. *Mat. met. ta fiz.-meh. polya*. 2014, 57(2).
14. Tkachuk M. A Numerical Method for Axisymmetric Adhesive Contact Based on Kalker's Variational Principle. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018, no. 3/7(93), pp. 34–41.
15. Tkachuk M.M., Skripchenko N., Tkachuk M.A., Grabovskiy A. Numerical Methods for Contact Analysis of Complex-Shaped Bodies with Account for Non-Linear Interface Layers. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. no. 5/7(95), pp. 22–31.
16. Tkachuk M. M., Grabovskiy A., Tkachuk M. A., Hrechka I., Ishchenko O., Domina N. investigation of multiple contact interaction of elements of dividing stamps. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. no. 4/7(100), pp. 6–15
17. Vollebregt E., G. Segal. Solving conformal wheel-rail rolling contact problems. *Vehicle System Dynamics*, vol. 52, pp. 455-468, 2014.
18. Kalker J.J. Variational principles of contact elastostatics. *J. Inst. Math. and Appl.* 1977. Vol. 20. P. 199–221.
19. Orap П. М., Д.Б. Горохов, Елсуков В. К. Упругий контакт жесткой шероховатой поверхности с низкомодульным полупространством. *Системы. Методы. Технологии*. 2017. № 2 (34). С. 7–12.
20. Persson BNJ. Relation between interfacial separation and load: a general theory of contact mechanics. *Physical review letters*. 2007. Vol. 99(12). P. 125502.
21. Pohrt R., Popov V. L. Contact stiffness of randomly rough surfaces. *Scientific reports*, 2013. Vol. 3.
22. Yang C., Persson BNJ. Contact mechanics: contact area and interfacial separation from small contact to full contact. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2008. Vol. 20(21). P. 215–214.
23. Papangelo A., N. Hoffmann, Ciavarella M. Load-separation curves for the contact of self-affine rough surfaces. *Scientific reports*, 2017, 7 (1), 6900.
24. Li Q., V.L. Popov. Adhesive force of flat indenters with brush structure. *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*. 2018, vol. 16 (1), pp. 1-8.
25. Popov, V. L., Pohrt, R., & Li, Q. (2017). Strength of adhesive contacts: Influence of contact geometry and material gradients. *Friction*, 5(3), 308-325. DOI: 10.1007/s40544-017-0177-3.
26. Pohrt R., Popov V. L. Contact mechanics of rough spheres: Crossover from fractal to hertzian behavior. *Advances in Tribology*, 2013.
27. Avrunin G.A., Kabanenko I.V., Havil V.V., Istratov A.V. i dr. Ob'emnaya gidropredacha s sharikovymi porshnyami GOP-900: harakteristiki i tehnicheskij uroven. *Mehanika ta mashinobuduvannya*. 2004, no. 1, pp. 14–21.

Надійшла (received). 12.04.2020

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Ткачук Микола Миколайович (Ткачук Николай Николаевич, Tkachuk Mykola M.)** – доктор технічних наук, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», старший науковий співробітник кафедри «Інформаційні технології і системи колісних та гусеничних машин ім. О. О. Морозова», м. Харків, Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4753-4267>, тел.: (057)7076902, e-mail: [m.tkachuk@tmm-sapr.org](mailto:m.tkachuk@tmm-sapr.org).

**Грабовський Андрій Володимирович (Грабовский Андрей Владимирович, Grabovskiy Andrey)** – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», старший науковий співробітник кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6116-0572>; e-mail: [andrej8383@gmail.com](mailto:andrej8383@gmail.com).

**Ткачук Микола Анатолійович (Ткачук Николай Анатольевич, Tkachuk Mykola A.)** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідувач кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4174-8213>; тел.: (057) 707-69-02; e-mail: [tma@tmm-sapr.org](mailto:tma@tmm-sapr.org).

**Сериков Володимир Іванович (Сериков Владимир Иванович, Sierykov Volodymyr)** – кандидат технічних наук (PhD), доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин»; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-69-02; e-mail: [serikovvi@tmm-sapr.org](mailto:serikovvi@tmm-sapr.org).

**Ткачук Ганна Володимирівна (Ткачук Анна Владимировна, Tkachuk Ganna)** – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», кафедра «Інформаційні технології та системи колісних і гусеничних машин ім. О. О. Морозова», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0435-1847>. e-mail: [TkachuckAV@tmm-sapr.org](mailto:TkachuckAV@tmm-sapr.org)

**Калінін Павло Миколайович (Калинин Павел Николаевич, Kalinin Pavel Nikolaevich)** – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), доцент, Національна академія Національної гвардії України, доцент кафедри інженерної механіки; м. Харків, Україна; тел.: (099) 725-12-82; ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9724-0630>; e-mail: [pkalining@gmail.com](mailto:pkalining@gmail.com)

**Волошина Ірина Олександрівна (Волошина Ирина Александровна, Voloshyna Iryna)** – студентка гр. МІТ-218м, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; м. Харків, Україна; e-mail: [s1802@tmm-sapr.org](mailto:s1802@tmm-sapr.org)

**Андрусенко Андрій Володимирович (Андрусенко Андрей Владимирович, Andrusenko Andrii)** – студент гр. МІТ87Б(ТМ), Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; м. Харків, Україна; e-mail: [s1701@tmm-sapr.org](mailto:s1701@tmm-sapr.org)

**Голтвяниця Олексій Сергійович (Голтвяница Алексей Сергеевич, Holtvianysia Oleksii)** – студент гр. МІТ87Б(ТМ), Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; м. Харків, Україна; e-mail: [s1703@tmm-sapr.org](mailto:s1703@tmm-sapr.org)