УДК 621.833.7 DOI:10.20998/2079-0775.2019.2.04

А. Г. ПРИЙМАКОВ, А. В. УСТИНЕНКО, А. В. БОНДАРЕНКО, Р. В. ПРОТАСОВ, В. И. СЕРИКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТАЛЛОПОЛИМЕРНЫХ ГИБКИХ КОЛЕС СИЛОВЫХ ВОЛНОВЫХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ

В настоящее время в мире достигнуты значительные успехи в разработке и внедрении волновых зубчатых передач. Одной из характеристик качества работы волновой передачи является ее шумовая характеристика. С точки зрения снижения уровня шума представляет интерес применение гибких колес из полимера, а при необходимости сохранения высокого уровня работоспособности – из металлополимера. Поэтому задача исследования металлополимерных гибких колес силовых волновых передач является актуальной и практически полезной. Ее решение позволит обеспечить минимальный уровень шума и вибраций при высокой нагрузочной способности и долговечности передачи. Работа посвящена разработке методики теоретического исследования устойчивости составного металлополимерного гибкого колеса. При исследовании стойкости цилиндрических конструктивно-ортотропных оболочек с достаточной точностью для практического использования можно воспользоваться теорией пологих оболочек. Получены расчетные зависимости для определения критических нагрузок, характерных для эксплуатации силовых волновых зубчатых передач. Дана критериальная оценка стойкости оболочек металлополимерных гибких колес через параметры волнообразования λ и η. Рассмотрены частные случаи нагружения силовых волновых зубчатых передач и обеспечение стойкости металлополимерных гибких колес при этом. Показано, что параметры λ и η и числа полуволн волнообразования *n* и *m* определяются из условия минимума критической нагрузки.

Ключевые слова: волновая зубчатая передача, металлополимерное гибкое колесо, теория оболочек, устойчивость.

О. Г. ПРИЙМАКОВ, О. В. УСТИНЕНКО, О. В. БОНДАРЕНКО, Р. В. ПРОТАСОВ, В. І. СЄРИКОВ

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ МЕТАЛОПОЛІМЕРНИХ ГНУЧКИХ КОЛІС СИЛОВИХ ХВИЛЬОВИХ ЗУБЧАТИХ ПЕРЕДАЧ

На наш час в світі досягнуті значні успіхи в розробці і впровадженні хвильових зубчастих передач. Однією з характеристик якості роботи хвильової передачі є її шумова характеристика. З точки зору зниження рівня шуму становить інтерес застосування гнучких коліс з полімеру, а при необхідності збереження високого рівня працездатності – з металополімеру. Тому задача дослідження металополімерних гнучких коліс силових хвильових передач є актуальною та практично корисною. Її розв'язання дозволить забезпечити мінімальний рівень шуму і вібрацій при високій навантажувальній здатності та довговічності передачі. Робота присвячена розробці методики теоретичного дослідження стійкості складеного металополімерного гнучкого колеса. При дослідженні стійкості циліндричних конструктивно-ортотропних оболонок з достатньою точністю для практичного використання можна скористатися теорією пологих оболонок. Отримано розрахункові залежності для визначення критичних навантажень, характерних для експлуатації силових хвильових зубчастих передач. Дано критеріальну оцінку стійкості оболонок металополімерних гнучких коліс через параметри хвилеутворення λ і η. Розглянуто окремі випадки навантаження силових хвильових зубчастих передач та забезпечення стійкості металополімерних гнучких коліс при цьому. Показано, що параметри λ і η і числа півхвиль хвилеутворення *n* та *m* визначаються з умови мінімуму критичного навантаження.

Ключові слова: хвильова зубчаста передача, металополімерне гнучке колесо, теорія оболонок, стійкість.

O. PRYJMAKOV, O. USTYNENKO, O. BONDARENKO, R. PROTASOV, V. SIERYKOV

RESEARCH OF STABILITY OF METAL-POLYMER FLEXIBLE WHEELS FOR POWER WAVE GEARS

Nowadays, significant successes have been achieved in the development and implementation of wave gears in the world. One of the characteristics of the quality of the wave gears is its noise characteristic. From the point of view of reducing the noise level, the use of flexible wheels made of polymer is of interest. and if it is necessary to maintain a high level of performance - the use of flexible wheels made of metal-polymer. Therefore, the task of researching metal-polymer flexible wheels of power wave gears is actual and practically useful. Its solution will ensure a minimum level of noise and vibration with high load capacity and gear durability. The work is devoted to the development of a methodology for the theoretical study of the stability of a composite metal-polymer flexible wheel. In studying the resistance of cylindrical structurally orthotropic shells with sufficient accuracy for practical use, we can use the theory of shallow shells. The calculated dependences for determining the critical loads characteristic of the operation of power wave gears are obtained. A criterial assessment of the resistance of the shells of metal-polymer flexible wheels through the wave formation parameters λ and η is given. Particular cases of loading power wave gears and ensuring the stability of metal-polymer flexible wheels are considered. It is shown that the parameters λ and η and the number of half-waves of wave formation n and m are determined from the condition of minimum critical load.

Keywords: wave gear, metal-polymer flexible wheel, shell theory, stability.

Актуальность задачи. Развитие различных отраслей машиностроения Украины обуславливает необходимость создания машин и механизмов с высокими качественными показателями. Одним из путей повышения надежности, уменьшения габаритных размеров и массы машин, а также снижения расходов на их эксплуатацию является использование прогрессивных типов механических передач энергии от двигателя к исполнительному устройству.

К таким передачам относится волновая зубчатая передача, которая основана на принципе преобразования параметров вращательного движения посредством волновой деформации одного из кинематических звеньев механизма. Впервые этот принцип предложен А.И. Москвитиным в 1944 г. для фрикционной передачи с электромагнитным генератором волн [1], а затем В. Массером [2, 3] в 1959 г. для зубчатой передачи с механическим генератором волн. Признание и распространение волновая передача получила благодаря своим неоспоримым преимуществам перед другими типами передач, основными из которых являются большое передаточное число, большое число зубьев, одновременно находящиеся в зацеплении, высокая кинематическая точность, малые скорости скольжения в зацеплении и, как следствие, малый износ зубьев и высокий

КПД, малые нагрузки на валы и опоры в результате взаимной уравновешенности сил в зацеплении.

В настоящее время в мире достигнуты значительные успехи в разработке и внедрении волновых редукторов общего назначения. В отечественном машиностроении механизмы с волновой зубчатой передачей также активно внедряются в таких областях машиностроения, как робототехника, самолетостроение и др.

Одной из характеристик качества роботы любой передачи является ее шумовая характеристика. С точки зрения снижения уровня шума представляет интерес применение гибких колес из полимера, а при необходимости сохранения достаточно высокого уровня работоспособности – из металлополимера.

Еще в середине 70-х годов прошлого века [4] предложено использовать двухслойные металлополимерные гибкие колеса – наружный слой металлический с зубчатым венцом, а внутренний, по которому осуществляется контакт тела гибкого колеса с вращающимся генератором волн, – полимерный. Однако применение их было ограничено только кинематическими волновыми передачами с роликовым генератором, и не было разработано рекомендаций по вычислению приведенных механических характеристик прочности, по расчету изгибной прочности под нагрузкой, по анализу температурно-теплового режима работы, а также по влиянию характера сопряжения двух слоев.

Таким образом, задача всестороннего исследования металлополимерных гибких колес силовых волновых передач является актуальной и практически полезной, так как позволит обеспечить при их высокой нагрузочной способности и долговечности минимальный уровень шума и вибраций.

Постановка задачи. Специфика применения силовых волновых зубчатых передач (СВЗП) требует оценки следующих критериев работоспособности, а именно:

– виброустойчивость гибких колес и всей передачи в целом;

– износостойкость боковых поверхностей зубьев;

– прочность основных элементов СВЗП;

– устойчивость формы составных (конструктивно-ортотропных оболочек) гибких колес.

Наименее исследованным на наш день является последний критерий. Поэтому **целью работы** будет разработка методики теоретического исследования устойчивости составного металлополимерного гибкого колеса.

Деформации и напряжения в гибком колесе трехволновой СВЗП. Гибкое колесо деформируется радиально на величину $\Delta = W_0$ и плотно прилегает к каждому из дисков на участке, соответствующем углу 2β. Тогда в этих зонах упругая линия колеса описывается радиусом $R_X = R_Д + 0{,}5h$ ($R_Д$ – радиус диска, h – толщина гибкого колеса), на остальных участках форма упругой линии определяется силовыми факторами.

Известно, см. работы [2–5], что надежность и нагрузочную способность СВЗП лимитируют напряжения изгиба σ_θ в продольных сечениях металлополимерного гибкого колеса (в плоскости генератора волн). Для определения этих напряжений необходимо знать компоненту радиальных перемещений W, которая связана с компонентами упругих деформаций известными соотношениями, см. например [4–6]. Очевидно, что начальная радиальная деформация W_0 определит напряжения σ_θ от воздействия генератора ($\sigma_{\Gamma\max(\min)}$), а дальнейший рост ΔW под воздействием внешней нагрузки – определит приращение напряжений σ_θ от воздействия внешнего крутящего момента ($\Delta\sigma_{\theta\max(\min)}$). Суммарная радиальная деформация $W_0 + \Delta W$ позволяет перейти к определению экстремальных значений полных изгибных напряжений $\sigma_{\theta\max(\min)}$.

Для вычисления напряжений в гибком колесе волновой передачи в работах [4–6] получены выражения на основе теории пологих оболочек. Исходная расчетная зависимость имела вид [4]:

$$\sigma_\theta = \frac{Eh}{2R^2\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} + \frac{\partial v}{\partial\theta}\right), \qquad (1)$$

где E, ν – модуль упругости, коэффициент Пуассона;

h, R – толщина колеса, радиус его срединной поверхности;

w, v, u – компоненты перемещения;

θ, ξ – относительная угловая и относительная осевая координаты.

Сначала в работах [4–6] были записаны зависимости для определения изгибающего момента на гибком колесе. На участке 1, где $0 \le \varphi \le (\pi/3 - b)$ он будет равен:

$$M_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}PR\left(1-\cos\phi\right) - M_0 = \\ = \sqrt{3}PR\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)}{\pi} + \frac{\beta\cos\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)}{\pi} - \frac{\cos\phi}{3}\right], \qquad (2)$$

а на участке 2, где $(\pi/3 - b) \le \varphi \le \pi/3$,

$$M_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}PR\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)\right] - M_0 = \\ = \sqrt{3}PR\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)}{\pi} + \frac{\beta\cos\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)}{\pi} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)}{3}\right]. \qquad (3)$$

Далее рассмотрим полученные в [4–6] выражения для определения экстремальных значений полных изгибных напряжений $\sigma_{\theta\max(\min)}$ в критических точках гибкого колеса В (участок 1) и С (участок 2). Эти выражения имеют вид:

$$\sigma_{\theta\max}=\sigma_B=\frac{k_2}{2k_1-k_2}\frac{WhE}{2R^2}; \qquad (4)$$

$$\sigma_{\theta\min}=\sigma_C=\frac{k_3}{2k_1-k_2}\frac{WhE}{2R^2}, \qquad (5)$$

где k_1, k_2, k_3 – коэффициенты. вычисляемые по зависимостям:

$$k_1=\frac{\pi}{18}-\frac{\beta}{6}-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)}{12};$$

$$k_2=-\frac{\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)}{3}+\frac{\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)}{\pi}+\frac{\sqrt{3}\beta\cos\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)}{\pi};$$

$$k_3=\frac{\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)}{\pi}+\frac{\sqrt{3}\beta\cos\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)}{\pi}-\frac{\sqrt{3}}{3}. \qquad (6)$$

Таким образом, выражения (2–6) позволяют определить экстремальные значения напряжений в МГК, необходимые в дальнейшем для исследования его устойчивости.

Математическое моделирование металлополимерных гибких колес силовых волновых зубчатых передач. Основными элементом СВЗП служит гибкое металополимерное зубчатое колесо (МГК), которое представляет собой длинную конструктивно-ортотропную оболочку с внешним зубчатым венцом (или двумя), подкрепленную изнутри полимерным кольцом [5–7], как шпангоутом. При больших значениях частоты вращения генератора волн (n ~ 3000…10000 мин$^{-1}$) и при больших внешних нагрузках появляется проблема обеспечения устойчивости таких оболочек, например, при осевом сжатии (из-за наличия осевой составляющей нагрузки в зубчатом зацеплении), при внешнем радиальном сжатии (под действием генератора волн) и при тангенциальной нагрузке из-за передачи крутящего момента M_{KP}.

Длинная конструктивно-ортотропная оболочка, подкрепленная изнутри полимерным шпангоутом, при нагрузке ее усилиями T_1^0, T_2^0, S_0 относительно ее срединной поверхности будет поддаваться изгибу от самого начала нагрузки [8–10].

Устойчивость оболочки определяется критической нагрузкой, то есть наименьшей нагрузкой, при которой возможны другие изгибные формы равновесия, которые характеризуются появлением волнообразований на ее поверхности.

Приняв, что деформирование гибкого колеса происходит лишь от генератора волн и в плоскости генератора, нормальную составляющую внешней нагрузки, которая вызывает выпучивание оболочки, запишем так:

$$P=T_1^0e_1+T_2^0e_2+S^0e_3. \qquad (7)$$

При исследовании устойчивости цилиндрических конструктивно-ортотропных оболочек с достаточной точностью для практического использования можно воспользоваться теорией пологих оболочек [8, 9, 11]. Согласно этой теории, в уравнениях равновесия в тангенциальном направлении можно пренебречь перерезывающими силами, а искривление оболочки с достаточной точностью можно описать лишь нормальными компонентами перемещений.

Для пологой конструктивно-ортотропной длинной цилиндрической оболочки соотношения упругости запишем в виде:

$$\begin{cases} T_1=B_{11}\dfrac{\partial U}{\partial x}+\nu B\left(\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}+\dfrac{\varpi}{R}\right)-A_{11}\dfrac{\partial^2\varpi}{\partial x^2};\\ T_2=\nu B\dfrac{\partial U}{\partial x}+B_{22}\left(\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}+\dfrac{\varpi}{R}\right)-A_{22}\dfrac{\partial^2\varpi}{\partial y^2};\\ S=\dfrac{B(1-\nu)}{2}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y}+\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)-A_{33}\dfrac{\partial^2\varpi}{\partial x\partial y}.\end{cases} \qquad (8)$$

$$\begin{cases} G_1=D_{11}\dfrac{\partial^2\varpi}{\partial x^2}+\nu D\dfrac{\partial^2\varpi}{\partial y^2}-A_{11}\dfrac{\partial U}{\partial x};\\ G_2=\nu D\dfrac{\partial^2\varpi}{\partial x^2}+D_{22}\dfrac{\partial^2\varpi}{\partial y^2}-A_{22}\left(\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}+\dfrac{\varpi}{R}\right);\\ H_1=D_{13}\dfrac{\partial^2\varpi}{\partial x\partial y}-\dfrac{A_{33}}{2}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y}+\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}\right);\\ H_2=D_{23}\dfrac{\partial^2\varpi}{\partial x\partial y}-\dfrac{A_{33}}{2}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y}+\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}\right),\end{cases} \qquad (9)$$

где ε_1, ε_2, $\varpi=2\varepsilon_3$ – относительные удлинения и сдвиг срединной поверхности оболочки;

e_1, e_2, e_3 – ее изменение кривизны и кручение;

u, υ – компоненты перемещения вдоль координатных линий;

ϖ – компонент перемещения по внешней нормали;

B – жесткость металлической части оболочки при растяжении-сжатии, $B = Eh/(1-\nu^2)$;

D – жесткость металлической части оболочки при изгибе, $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$;

E, ν – приведенные значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона металлополимерной оболочки;

h – общая толщина оболочки, измеренная в впадинах зубчатого венца;

B_{11} – жесткость подкрепленной оболочки при растяжении в направлении оси x;

B_{22} – жесткость подкрепленной оболочки при растяжении в направлении оси y;

D_{11} – параметр жесткости подкрепленной оболочки при изменении в направлении оси x;

D_{22} – параметр жесткости подкрепленной оболочки при изменении в направлении оси y;

D_{13} – жесткость подкрепленной оболочки при кручении вокруг оси x;

D_{23} – жесткость подкрепленной оболочки при кручении вокруг оси y;

R – радиус срединной поверхности.

Параметры A_{11}, A_{22}, A_{33} является коэффициентами влияния, которые характеризуют изгибные деформации, которые возникают при растяжении-сжатии и сдвиге оболочки, и, наоборот, эти параметры пропорциональны статистическим моментам поперечных сечений относительно осей, которые лежат в срединной поверхности оболочки.

При симметричном размещении шпангоута $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$ (конструктивно-ортотропная оболочка).

Систему дифференциальных уравнений нейтрального равновесия цилиндрической оболочки представим в следующей форме:

$$T_1 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad T_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad S = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \qquad (10)$$

где Φ – функция напряжений.

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(H_1 + H_2) + \frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2} + \frac{T_2}{R} = = -\left(T_1^0 \frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} + T_2^0 \frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2} + T_3^0 \frac{\partial^2 \varpi}{\partial x \partial y} \right). \qquad (11)$$

К уравнениям равновесия (11), которые представлены в усилиях, следует добавить условие совместности деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} = \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2}. \qquad (12)$$

В условии (12) согласно теории пологих оболочек пренебрегаем изменением геометрических размеров оболочки сравнительно с изменением напряженно-деформированного состояния при выпирании.

Решая соотношение упругости (8) относительно компонентов деформации, с учетом (10) получаем:

$$\left(B_{11}B_{22} - v^2B^2\right)\varepsilon_1 = = B_{22}\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} - vB\frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2} + B_{22}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - vB\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2};$$

$$\left(B_{11}B_{22} - v^2B^2\right)\varepsilon_2 = = B_{11}\frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2} - vB\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} + B_{11}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - vB\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2};$$

$$2\left(B_{11}B_{22} - v^2B^2\right)\varepsilon_3 = = \frac{B_{11}B_{22} - v^2B^2}{B(1-v)}\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x \partial y} - \frac{B_{11}B_{22} - v^2B^2}{B(1-v)}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \qquad (13)$$

Подставляя систему (13) в уравнение совместности деформаций (12), а систему (9) в уравнение равновесия (11), мы получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\nabla_1 \varpi + \nabla_2 \Phi = = \left(B_{11}B_{22} - v^2B^2\right)\left(T_1^0 \frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} + T_2^0 \frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 \varpi}{\partial x}\partial y \right);$$

$$\nabla_2 \varpi = \nabla_3 \Phi. \qquad (14)$$

Тут ∇ – дифференциальные операторы в частных производных четвертого порядка:

$$\nabla_1 = \left[D_{11}\left(B_{11}B_{22} - v^2B^2\right) - B_{22} \right]\frac{\partial^4}{\partial x^4} + + \left[D_{22}\left(B_{11}B_{22} - v^2B^2\right) \right]\frac{\partial^4}{\partial y^4} + + \left[2vD\left(B_{11}B_{22} - v^2B^2\right) - B + \left(B_{11}B_{22} - v^2B^2\right)\left(D_{13}D_{23}\right) - - \frac{2\left(B_{11}B_{22} - v^2B^2\right)}{B(1-v)} \right]\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}; \qquad (15)$$

$$\nabla_2 = vB\frac{\partial^4}{\partial x^4} + vB\frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{B_{11}B_{22} - v^2B^2}{R}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - - \left[B_{11} + B_{22} - \frac{2\left(B_{11}B_{22} - v^2B^2\right)}{B(1-v)} \right]\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}; \qquad (16)$$

$$\nabla_3 = B_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2(B_{11}B_{22} - v^2B^2)}{B(1-v)}\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + B_{22}\frac{\partial^4}{\partial y^4}. \qquad (17)$$

Исключая из системы уравнений (14) функцию напряжений Ф, получаем дифференциальное уравнение, которое описывает устойчивость длинной цилиндрической металлополимерной оболочки при комбинированной нагрузке:

$$\left(\nabla_1\nabla_2 + \nabla_2^2\right)\varpi = \left(B_{11}B_{22} - v^2B^2\right);$$

$$\left(T_1^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + T_2^0 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2S^0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right)\nabla_3 \varpi. \qquad (18)$$

Подставляя в уравнение (18) решение в виде

$$\varpi = A\sin(\lambda x \pm \eta y), \qquad (19)$$

которое описывает скошенные формы волнообразования и где

$$\lambda = m\pi/l; \qquad \eta = n/R, \qquad (20)$$

получаем следующее соотношение для определения критических нагрузок при комбинированной нагрузке:

$$-\left(T_1^0\lambda^2 + T_2^0\eta^2 + 2S^0\lambda\eta\right)_{кр} =$$
$$= \left[\psi_1 + \left(B_{11}B_{22} - v^2B^2\right)\left(\frac{\psi_2^2}{\psi_3} - 2\frac{\lambda^2\psi_2}{R\psi_3} + \frac{\lambda^4}{R^2\psi_3}\right)\right], \qquad (21)$$

где

$$\psi_1(\lambda,\eta) = \left(D_{11} - \frac{B_{22}}{B_{11}B_{22} - v^2B^2}\right)\lambda^4 +$$
$$+\left(D_{22} - \frac{B_{11}}{B_{11}B_{22} - v^2B^2}\right)\eta^4 + \qquad (22)$$
$$+\left[2vD + D_{13} + D_{23}\frac{B}{B_{11}B_{22} - v^2B^2} - \frac{2}{B(1-v)}\right]\lambda^2\eta^2;$$

$$\psi_2(\lambda,\eta) = \frac{vB}{B_{11}B_{22} - v^2B^2}\lambda^4 +$$
$$= \frac{vB}{B_{11}B_{22} - v^2B^2}\lambda^4 + \frac{vB}{B_{11}B_{22} - v^2B^2}\eta^4 - \qquad (23)$$
$$-\left[\frac{B_{22} + B_{11}}{B_{11}B_{22} - v^2B^2} - \frac{2}{B_{11}B_{22} - v^2B^2}\right]\lambda^2\eta^2;$$

$$\psi_3(\lambda,\eta) = B_{11}\lambda^4 + B_{22}\eta^4 +$$
$$+\frac{2\left(B_{11}B_{22} - v^2B^2\right)}{B(1-v)}\lambda^2\eta^2. \qquad (24)$$

Очевидно, что критериальная оценка устойчивости МГК заключается в следующем:

$$P_{KP} \langle -\left(T_1^0\lambda^2 + T_2^0\eta^2 + 2S^0\lambda\eta\right)_{KP}. \qquad (25)$$

Параметры λ, η определяются из условия минимума критической нагрузки, то есть $P_{KP} \Rightarrow \min$.

Обеспечение устойчивости металлополимерных гибких колес при различных видах нагружения. Рассмотрим частные случаи нагружения СВЗП и обеспечение стойкости МГК при этом [12–14].

1. Устойчивость металлополимерных гибких колес при осевом сжатии оболочки МГК из-за значительных осевых сил в зубчатом зацеплении СВЗП. В этом случае $T_2^0 = S^0 = 0$ и, в соответствии с (21), имеем

$$\left(T_1^0\right)_{KP} = \left[\phi_1 + \left(B_{11}B_{22} - v^2B^2\right)\frac{\phi_2^2}{\phi_3}\right]\lambda^2 +$$
$$+\frac{B_{11}B_{22} - v^2B^2}{R^2\phi_3\lambda^2} - \frac{2\left(B_{11}B_{22} - v^2B^2\right)}{R}\frac{\phi_2}{\phi_3}, \qquad (26)$$

где

$$\phi_i = \psi_i(1,\psi)(i = 1, 2, 3);$$

$$\phi = \frac{\eta^2}{\lambda^2} = \frac{n^2l^2}{m^2\pi^2R^2}, \qquad (27)$$

где n, m – число полуволн волнообразования.

Наименьшее значение правой части выражения (26) по отношению к параметру λ будет иметь место при

$$\lambda = \frac{2}{R}\sqrt[4]{\frac{B_{11}B_{22} - v^2B^2}{\phi_1\phi_3\left(B_{11}B_{22}v^2B^2\right)\phi_2^2}} \qquad (28)$$

и определяется выражением

$$T_{KP} = \frac{2}{R}\sqrt{\left(B_{11}B_{22} - v^2B^2\right)\left[\phi_1\phi_3 + \left(B_{11}B_{22} - v^2B^2\right)\right]} +$$
$$+\frac{2\left(B_{11}B_{22} - v^2B^2\right)}{R}\frac{\phi_2}{\phi_3}. \qquad (29)$$

Зависимость (29) определяет критическое значение осевой нагрузки МГК СВЗП, причем, для обоих слоев одновременно.

Значение параметра φ находится из условия минимума правой части зависимости (29), когда $T_{KP} \Rightarrow \min$.

2. Устойчивость МГК под внутренним давлением от действия генератора волн. При радиальном сжатии со стороны генератора волн СВЗП в теле оболочки МГК; $T_2^0 = -PR$ и, согласно (21), при потере устойчивости оболочки в продольном направлении образуется лишь одна полуволна, то есть m = 1 и $\lambda_1 = \pi/l$.

Следовательно, для определения критического радиального давления со стороны генератора волн будет иметь место зависимость

$$(PR)_{KP} = \left[\theta_1 + \left(B_{11}B_{22} - v^2B^2\right)\frac{\theta_2 - \frac{\pi^2}{Rl^2}}{\theta_3}\right]\frac{1}{\eta^2}, \qquad (30)$$

где η – параметр, который определяется из условия минимума правой части, то есть при

$$\left(PR\right)_{KP} = \min;\ \theta_i\left(\lambda_1\eta\right) = \psi_i\left(\lambda_1, \eta\right)\left(i = 1, 2, 3\right).$$

3. Устойчивость металлополимерных гибких колес при тангенциальной нагрузке из-за передачи вращательного момента M_{KP}. При силовом кручении оболочки МГК $T_1^0 = T_2^0 = 0$, и, соответственно зависимости (21), критический вращательный момент $(M_{KP})_{KP}$ определяется выражением

$$\frac{\left(M_{KP}\right)_{KP}}{2\pi R} = \frac{1}{\lambda\eta}\left[\psi_1 + \left(B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2\right)\frac{\psi_3 - \dfrac{\lambda^2}{R}}{\psi_3}\right]. \quad (31)$$

Параметры λ, η опять выбираются из условия минимума правой части и определяют форму потери устойчивости при кручении МГК. Форма потери устойчивости существенно зависит от характера соединения слоев, от жесткости элементов соединения, их формы, размеров и характера нагрузки.

Выводы:

1. Применение металлополимерных гибких колес силовых волновых передач позволяет обеспечить минимальный уровень шума и вибраций в силовых волновых передачах.

2. Получены расчетные зависимости для определения критических нагрузок, характерных для эксплуатации СВЗП.

3. Дана критериальная оценка устойчивости оболочек МГК через параметры волнообразования λ и η.

4. Показано, что параметры λ и η и числа полуволн волнообразования n и m определяются из условия минимума критической нагрузки.

Список литературы

1. *Итоги науки и техники. Серия "Машиностроительные материалы, конструкция и расчет деталей машин. Гидропривод". Том 4 "Волновые передачи"*. Под ред. Н. С. Ачеркана. Москва, 1972. 192 с.
2. W. Masser. *Strain wave gearing*. Patent no. US2906143A, 1959, USA.
3. Murayama, Yuya. An Introduction to HarmonicDrive® and Strain Wave Gearing. *Journal of the Japan Society for Precision Engineering*. 2017, vol. 83, pp. 746–749.
4. Валявский А. И. *Исследование напряженного состояния и жесткости гибких колес волновых зубчатых передач с генератором свободной деформации. Автореф. дисс. ... канд. техн. наук*. Одесса, 1975. 25 с.
5. Приймаков А. Г. *Напряженно-деформированное состояние и усталостная прочность металлополимерных гибких колес силовых волновых передач. Автореф. дисс. … канд. техн. наук*. Москва, 1984. 24 с.
6. Приймаков А. Г., Рудницкий В. И. Определение радиальной осадки полимерного слоя металлополимерных гибких колес силовых волновых передач. *Детали машин*. 1985, вып. 41, С. 106–110.
7. Приймаков А. Г. Усталостные испытания силовых трехволновых зубчатых передач с металлополимерными гибкими колесами. *Проблемы трения и изнашивания*. 1985, вып. 27, С. 48–51.
8. Приймаков О. Г. *Розрахунок і проектування силових хвильових зубчастих передач*. Харків, вид. ХІ ВПС ім. І. Кожедуба, 2003. 112 с.
9. Curt Preissner, Thomas Royston, Deming Shu. A High-Fidelity Harmonic Drive Model. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*. 2012, vol. 134, pp. 011002–13.
10. Pholchai Chotiprayanakul, Nattakul Khamsri, Neeracha Kumjaroen. A design of HDPE flexible spline of harmonics gear. *MATEC Web of Conferences 192, 01030 (2018). ICEAST 2018*. Available at: https://www.matec-conferences.org/articles/matecconf/pdf/2018/51/ matec-conf_iceast2018_01030.pdf, accessed 22.07.2019.
11. Abakumov A. N., Zakharova N. V. Determination of load capacity for flexible spline of harmonic drive. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019, vol. 1210, pp. 12–19.
12. Quan Lu, Tieqiang Gang, Guangbo Hao, Lijie Chen. Compound optimal control of harmonic drive considering hysteresis characteristic. *Mechanical Sciences*. 2019, vol. 10, pp. 383–391.
13. Masoud Masoumi and H. Alimohammadi. An investigation into the vibration of harmonic drive systems. *Frontiers of Mechanical Engineering*. 2013, vol. 8, pp. 50–59.
14. A. Aidl, M. Bendouba, A. Talha, N. Benseddiq, M. Benguediab, and S. Zengah. Uniaxial Fatigue of HDPE-100 Pipe. *Experimental Analysis (2014). Directory of Open Access Journals in Engineering*. 2014, vol. 4, no 2, pp. 600-604.

References (transliterated)

1. *Itogi nauki i tehniki. Serija "Mashinostroitel'nye materialy, konstrukcija i raschet detalej mashin. Gidroprivod". Tom 4 "Volnovye peredachi"* [Results of science and technology. Series "Mechanical engineering materials, design and calculation of machine parts. Hydraulic drive". Vol. 4 "Wave gears"]. Ed. N. S. Acherkan. Moscow, 1972. 192 p.
2. W. Masser. *Strain wave gearing*. Patent no. US2906143A, 1959, USA.
3. Murayama, Yuya. An Introduction to HarmonicDrive® and Strain Wave Gearing. *Journal of the Japan Society for Precision Engineering*. 2017, vol. 83, pp. 746–749.
4. Valjavskij A. I. *Issledovanie naprjazhennogo sostojanija i zhestkosti gibkih koles volnovyh zubchatyh peredach s generatorom svobodnoj deformacii. Avtoref. diss. ... kand. tehn. nauk* [Research of the stress state and rigidity of the flexible wheels of wave gears with the generator of free deformation. Candidate eng. sci. diss. (Ph. D.)]. Odessa, 1975. 25 p.
5. Prijmakov A. G. *Naprjazhenno-deformirovannoe sostojanie i ustalostnaja prochnost' metallopolimernyh gibkih koles silovyh volnovyh peredach. Avtoref. diss. … kand. tehn. nauk* [Stress-strain state and fatigue strength of metal-polymer flexible wheels of power wave gears. Candidate eng. sci. diss. (Ph. D.)]. Moscow, 1984. 24 p.
6. Prijmakov A. G., Rudnickij V. I. Opredelenie radial'noj osadki polimernogo sloja metallopolimernyh gibkih koles silovyh volnovyh peredach [Determination of the radial deposition of the polymer layer of metal-polymer flexible wheels of power wave gears]. *Detali mashin* [Machine parts]. 1985, vol. 41, pp. 106–110.
7. Prijmakov A. G. Ustalostnye ispytanija silovyh trehvolnovyh zubchatyh peredach s metallopolimernymi gibkimi kolesami [Fatigue tests of power three-wave gears with metal-polymer flexible wheels]. *Problemy trenija i iznashivanija* [Friction and Wear Problems]. 1985, vol. 27, pp. 48–51.
8. Prijmakov O. G. *Rozrahunok i proektuvannja sylovyh hvyl'ovyh zubchastyh peredach* [Calculation and design of power wave gears]. Kharkiv, XI VPS im. I. Kozheduba Publ., 2003. 112 p.
9. Curt Preissner, Thomas Royston, Deming Shu. A High-Fidelity Harmonic Drive Model. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*. 2012, vol. 134, pp. 011002–13.
10. Pholchai Chotiprayanakul, Nattakul Khamsri, Neeracha Kumjaroen. A design of HDPE flexible spline of harmonics gear. *MATEC Web of Conferences 192, 01030 (2018). ICEAST 2018*. Available at: https://www.matec-conferences.org/articles/matecconf/pdf/2018/51/ matec-conf_iceast2018_01030.pdf, accessed 22.07.2019.
11. Abakumov A. N., Zakharova N. V. Determination of load capacity for flexible spline of harmonic drive. *Journal of Physics:*

Conference Series. 2019, vol. 1210, pp. 12–19.

12. Quan Lu, Tieqiang Gang, Guangbo Hao, Lijie Chen. Compound optimal control of harmonic drive considering hysteresis characteristic. *Mechanical Sciences*. 2019, vol. 10, pp. 383–391.
13. Masoud Masoumi and H. Alimohammadi. An investigation into the vibration of harmonic drive systems. *Frontiers of Mechanical Engineering*. 2013, vol. 8, pp. 50–59.
14. A. Aidl, M. Bendouba, A. Talha, N. Benseddiq, M. Benguediab, and S. Zengah. Uniaxial Fatigue of HDPE-100 Pipe. *Experimental Analysis (2014). Directory of Open Access Journals in Engineering*. 2014, vol. 4, no 2, pp. 600-604.

Надійшла (received) 09.08.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Приймаков Олександр Григорович ***(Приймаков Александр Григорьевич, Pryimakov Oleksandr)*** – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), доцент, старший науковий співробітник; м. Харків, Україна.

Устиненко Олександр Віталійович (Устиненко Александр Витальевич, Ustynenko Oleksandr) – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), доцент, старший науковий співробітник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-64-78; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6714-6122; e-mail: ustin1964@tmm-sapr.org

Бондаренко Олексій Вікторович (Бондаренко Алексей Викторович, Bondarenko Oleksiy) – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; м. Харків, Україна; тел.: (067) 189-97-00; ORCID: https://orcid.org/ 0000-0002-2693-5301; e-mail: avbondko@gmail.com

Протасов Роман Васильович (Протасов Роман Васильевич, Protasov Roman) – Словацький технічний університет в Братиславі, старший викладач кафедри транспортної техніки та конструювання; м. Братислава, Словаччина; тел.: +421-949-352-655; ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1611-0610; e-mail: roman.protasov@stuba.sk

Сєриков Володимир Іванович (Сериков Владимир Иванович, Sierykov Volodymyr) – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), доцент, старший науковий співробітник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», старший науковий співробітник кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-64-78; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5295-3925; e-mail: SerikovVI@tmm-sapr.org