

**В. П. ЯГЛИНСКИЙ, С. С. ГУТЫРЯ, А. Н. ЧАНЧИН, Ю. М. ХОМЯК**

### ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ПЛАНЕТАРНЫХ КОЛЕСНЫХ РЕДУКТОРАХ

Разработана математическая модель параметрических колебаний в планетарных колесных редукторах (ПКР) троллейбусов. Модель учитывает циклические деформации тонкостенного обода и зубьев в зацеплении эпицикла с сателлитами. Дифференциальное уравнение колебаний эпицикла приведено к виду уравнений Матье-Хилла с переменными периодическими коэффициентами. На основании диаграммы Айнса-Стретта определены области неустойчивости параметрических колебаний "критериального элемента" – тонкостенного эпицикла для прямозубых и косозубых передач с учетом влияния зазоров в зацеплениях. Установлены диапазоны значений критических скоростей движения троллейбусов, соответствующие проявлению первых трех параметрических резонансов эпицикла ПКР в составе конструкций ведущих мостов 1-го и 3-го поколений известных фирм-производителей. Обоснован критерий виброустойчивости эпицикла, установлены расчетные значения вероятности параметрических резонансов. Теоретически подтвержден положительный эффект от применения косозубого зацепления в ПКР, что обеспечивает минимальную глубину пульсации жесткости, сужение области неустойчивости параметрических колебаний эпицикла, уменьшает вероятность зарождения и развития усталостных трещин.

**Ключевые слова:** тонкостенный эпицикл, усталостные трещины, приведенная жесткость зацепления, коэффициент пульсации жесткости, формы колебаний, параметрический резонанс.

**В. П. ЯГЛИНСЬКИЙ, С. С. ГУТИРЯ, А. М. ЧАНЧІН, Ю. М. ХОМЯК**

### ПАРАМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ В ПЛАНЕТАРНИХ КОЛІСНИХ РЕДУКТОРАХ

Розроблено математичну модель параметричних коливань в планетарних колісних редукторах (ПКР) троллейбусів. Модель враховує циклічні деформації тонкостінного обода і зубців в зацепленні епіциклу з сателітами. Диференціальне рівняння коливань епіциклу приведене до вигляду рівнянь Матье-Хілла зі змінними періодичними коефіцієнтами. На підставі діаграми Айнса-Стретта визначені області нестійкості параметричних коливань "критеріального елемента" – тонкостінного епіциклу для прямозубих і косозубих передач з урахуванням впливу зазорів в зацепленнях. Встановлено діапазони значень критичних швидкостей руху троллейбусів, відповідні прояву перших трьох параметричних резонансів епіциклу ПКР в складі конструкцій тягових мостів 1-го і 3-го поколінь відомих фірм-виробників. Обґрунтовано критерій вібростійкості епіциклу, встановлені розрахункові значення ймовірності параметричних резонансів. Теоретично підтверджено позитивний ефект від застосування косозубого зацеплення в ПКР, що забезпечує мінімальну глибину пульсації жорсткості, звуження області нестійкості параметричних коливань епіциклу, зменшує ймовірність зародження і розвитку втомних тріщин.

**Ключові слова:** тонкостінний епіцикл, втомні тріщини, приведена жорсткість зацеплення, коефіцієнт пульсації жорсткості, форми коливань, параметричний резонанс.

**V. P. YAGLINSKIY, S. S. HUTYRIA, A. M. CHANCHIN, Yu. M. KHOMYAK**

### PARAMETRIC OSCILLATIONS IN PLANETARY WHEEL GEARBOXES

A mathematical model of parametric oscillations in the planetary wheel gearboxes (PWG) of the trolley buses has been developed. The model takes into account the cyclic deformations of a thin-walled rim and teeth in the meshing of the epicycle with the satellites. The differential equation of the oscillations of the epicycle is reduced to the form of the Mathieu-Hill equations with variable periodic coefficients. On the basis of the Ains-Strett diagram, regions of instability of parametric oscillations of the "criteria element" – a thin-walled epicycle for spur and helical gears are determined, taking into account the influence of gaps in the gears. The ranges of values of the critical velocities of the trolley buses corresponding to the manifestation of the first three parametric resonances of the PWG epicycle in the structure of the traction bridges of the 1<sup>st</sup> and 3<sup>rd</sup> generations of well-known manufacturing companies are established. The criterion of the vibration stability of the epicycle is substantiated, the calculated values of the probabilities of parametric resonances are established. Theoretically, the positive effect of helical engagement in PWG has been confirmed, which provides a minimum depth of hardness pulsation, a narrowing of the instability region of parametric oscillations of the epicycle, reduces the probability of nucleation and development of fatigue cracks.

**Keywords:** thin-walled epicycle, fatigue cracks, reduced stiffness of engagement, rigidity pulsation coefficient, vibration modes, parametric resonance.

**Введение.** Повышение долговечности, эксплуатационной надежности, эргономичности и комфортности пассажирского транспорта является актуальной проблемой, непосредственно связанной с виброактивностью наиболее нагруженных структурных элементов механической трансмиссии – тихоходных модулей ведущих мостов. Анализ известных структур тяговых трансмиссий троллейбусов подтверждает устойчивый спрос на многопоточные планетарные колесные редукторы (ПКР), применяющиеся как в мостах 1-го поколения (начиная с троллейбусов 1955-го модельного года), так и в более современных мостах 3-го поколения (начиная с 2005-го модельного года).

Для динамических процессов, сопровождающих эксплуатацию ПКР, характерны следующие особенности:

- вибрационные нагрузки содержат как синхронные компоненты (гармоники), пропорциональные оборотной частоте вращения сателлитов, так и несин-

хронные, связанные с резонансными процессами и не пропорциональные частоте вращения зубчатых колес. Основная мощность виброн нагружения в зубчатых передачах соответствует высокочастотной области;

- возникновение параметрических колебаний в ПКР, связанное с пульсацией жесткости зубчатых зацеплений, приводит к появлению зон неустойчивости колебаний [1–3]. В результате ускоряются процессы накопления усталостных повреждений, развитие усталостных трещин, вплоть до поломок зубьев или разрушения обода эпицикла (рис. 1);

- результаты МКЭ-моделирования показали, что изгибно-крутильные колебания обода эпицикла способствуют возникновению растягивающих напряжений во впадине между зубьями после выхода из зацепления [4, 5];

- многопарность зубчатого зацепления обусловлена периодическим изменением числа нагруженных

© В. П. Яглинский, С. С. Гутьря, А. Н. Чанчин, Ю. М. Хомяк, 2018

Вісник Національного технічного університету "ХПІ".  
Серія: Машинознавство та САПР, №25 (1301) 2018

зубьев, что характеризуется коэффициентами перекрытия  $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma$  и функцией приведенной жесткости зацепления [7–9];

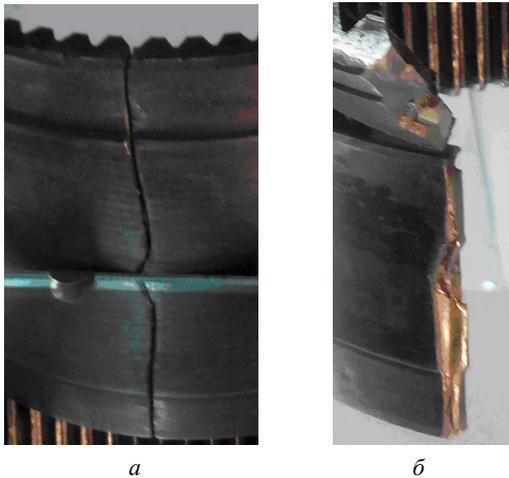


Рис. 1 – Фото усталостных повреждений эпицикла:  
а – магистральная трещина; б – разрушение обода

- многопоточность системы ПКР с несколькими сателлитами увеличивает частоту изменения функции жесткости зубчатого зацепления "эпицикл – сателлиты";

- повышенная податливость тонкостенного обода эпицикла способствует более равномерному распределению передаваемой нагрузки по потокам, обуславливает наличие нескольких форм параметрических колебаний, что приводит к расширению области их неустойчивости [10, 11];

- в связи с ограниченной кинематической точностью изготовления и упругими деформациями основных элементов ПКР под нагрузкой контакт зубьев может происходить вне линии зацепления, в результате возникают т.н. "кромочные удары", способствующие расширению области неустойчивости колебаний [6];

- следствием невыполнения основной теоремы зацепления в точках контакта рабочих профилей зубьев является возникновение дополнительных источников вынужденных колебаний в виде тангенциальных составляющих нагрузки на зубья [6].

Комплекс требований заказчиков к трансмиссии троллейбусов, необходимость адаптации к низкопольным моделям, статистически обоснованные тренды показателей увеличения удельной массы, мощности тяговых электродвигателей, снижения уровня шума в салоне и вибраций в кабине водителя и др., обусловили ряд эволюционных изменений в конструкциях тяговых мостов и ПКР [12]. Портальные мосты 3-го поколения выполнены без механизмов Кардана, главной передачи, механического дифференциала и полуосей на основе агрегатных мотор-колес с многоступенчатыми косозубыми передачами [13].

**Анализ известных исследований виброактивности планетарных передач.** Опыт эксплуатации подтверждает, что виброактивность ПКР является определяющей для вибраций системы тяговой трансмиссии в целом. В ряде работ выполнено исследование тангенциальной жесткости зацепления эпицикла с

сателлитами при различных окружных смещениях осей сателлитов, определены резонансные режимы функционирования планетарных передач [1–3]. Предложенные модели могут быть использованы для обнаружения неисправностей и диагностики, при этом не исследованы области неустойчивости параметрических колебаний тонкостенных эпициклов.

Известны исследования динамики планетарных передач на основе конечно-разностных моделей с применением оригинального программного комплекса [10, 11]. Установлены собственные частоты и формы колебаний трехмерной динамической модели планетарной передачи с учетом упругих деформаций основных деталей.

В результате исследований резонансных режимов работы прямозубых зубчатых передач в составе авиационных вентиляторов экспериментально зафиксировано размыкание зацепляющихся зубьев и увеличение динамических нагрузок в зацеплении в 2...4 раза [6]. При динамическом моделировании передачи с модифицированными зубьями, минимальным углом зацепления  $\alpha_w$  и коэффициентом перекрытия  $\varepsilon_\alpha = 2,08$  установлено снижение виброактивности передачи до 30 %.

В результате моделирования параметрических колебаний эпицикла с учетом многопарности и многопоточности зубчатых передач в составе коробки скоростей автомобилей подтверждена эффективность выравнивания пульсаций жесткости многопарного зацепления путем неравномерного расположения осей сателлитов по окружности [1, 2, 7, 9].

Известны исследования бифуркации колебательных процессов в зубчатых зацеплениях трансмиссионных систем авиационных двигателей, вызванных переменной жесткостью и кинематической погрешностью зацепления [10]. Показано, что при увеличении передаваемой мощности кинематическая погрешность зацепления уменьшается до 2 раз по сравнению с ненагруженным режимом работы. На одной и той же частоте вращения экспериментально зарегистрированы бифуркационные колебания, отличающиеся по амплитуде в два раза. При этом параметрические колебания и зоны соответствующих резонансов не исследованы.

Целью данной работы является математическое моделирование, исследование и минимизации влияния неустойчивых параметрических колебаний тонкостенного эпицикла с учетом многопарности и многопоточности и зазоров в зубчатых зацеплениях.

**Многопарность и многопоточность ПКР.** Основной источник возбуждения низкочастотных параметрических колебаний в ПКР троллейбусов является циклическое изменение жесткости зацеплений эпицикла с сателлитами. Для серийных ПКР фирмы *Raba*, Венгрия, моделей 118.77 и 318.78, расчетные значения коэффициента перекрытия в прямозубом зацеплении "эпицикл – сателлит"  $\varepsilon_\alpha = 1,42$  (рис. 2, а) [9]. При повороте сателлита вокруг своей оси в пределах угла  $\varphi_0$  (на участке  $T_0$ ) зацепление отсутствует и жесткость зацепления равна нулю, при повороте на угол  $(2 - \varepsilon_\alpha)\varphi_{ar}$  – одна пара зубьев (на участке  $T_1$ )

(рис. 2, б) с усредненной жесткостью зацепления  $c_z$ , а при повороте на угол  $(\varepsilon_\alpha - 1)\rho_{\alpha r}$  (на участке  $T_2$ ) нагрузку передают две пары зубьев с усредненной жесткостью зацепления  $2c_z$ .

Частота  $\omega$  изменения приведенной жесткости зацепления (круговая частота зацепления) "один сателлит – эпицикл" определяется известными соотношениями в зависимости от чисел зубьев  $z_s, z_p$  и угловой скорости  $\omega_s$  солнечной шестерни [3]

$$\begin{aligned} \omega_s z_s &= \omega_p 2z_p; \quad \omega_H(z_s + z_p) = \omega_p z_p; \\ \omega &= \omega_p n_p z_p = \omega_H(z_s + z_p)n_p, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\omega_H$  – угловая скорость водила;

$n_p$  – число сателлитов;

индексы в обозначениях расчетных параметров указывают на принадлежность: "s" – солнечной шестерне (англ. sun); "p" – сателлитам (planets); "r" – эпициклу (ring).

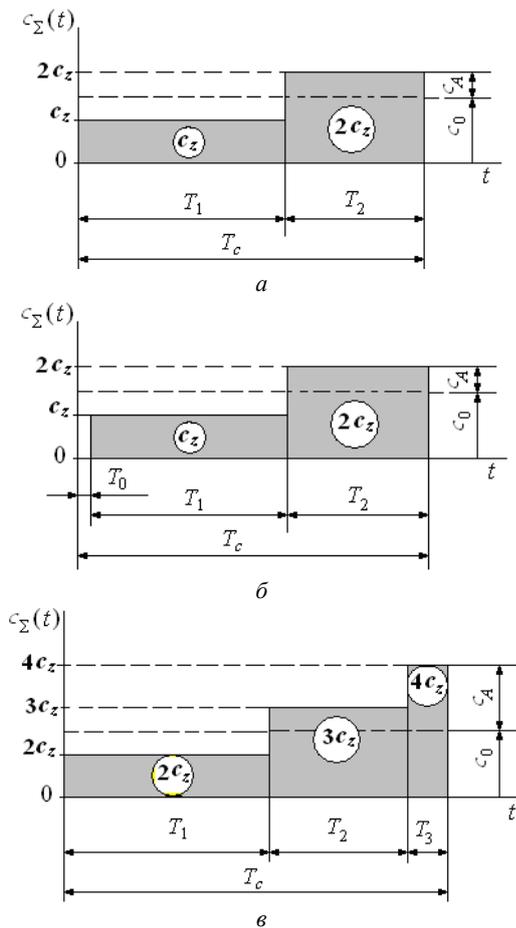


Рис. 2 – Диаграммы многопарности зацепления "сателлит – эпицикл": а – для прямозубого беззазорного зацепления; б – для прямозубого зацепления с зазором; в – для косозубого зацепления без зазоров;  $c_z(t)$  – функция приведенной жесткости;  $c_0$  и  $c_A$  – среднее и амплитудное значения приведенной жесткости

**Упругие деформации обода эпицикла.** Колебания эпицикла ПКР сопровождаются сложными про-

странственными деформациями обода и зубьев эпицикла в процессе зацепления. В условиях ограничения габаритов ПКР троллейбуса в радиальном направлении конструкция эпицикла соответствует тонкостенному кольцу постоянного по длине  $L$  сечения с соотношением толщины к радиусу  $r$  срединной линии  $\delta/r = 0,05 \dots 0,1$  (рис. 3, а).

*Крутильные деформации эпицикла* при колебаниях возникают относительно его продольной оси  $X$ , при этом форма и размеры поперечного сечения кольца не изменяются. Окружная жесткость  $c_t$  и собственная крутильная частота  $f_t$  эпицикла для как тонкостенного трубчатого образца определяются по известным формулам

$$c_t = 2\pi Gr\delta/L; \quad f_t = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi Gr^3\delta}{LJ_x}}, \quad (2)$$

где  $G$  и  $\rho$  – модуль упругости 2-го рода и плотность материала эпицикла;

$J_x = 2\pi r^3 L \delta$  – полярный момент инерции эпицикла относительно продольной оси  $X$ .

*Поперечный изгиб эпицикла* возникает в плоскости  $XZ$ , содержащей продольную ось  $X$ , т.е. относительно оси  $Y$ . Представив первую форму колебаний эпицикла в виде функции  $z = x^2/L^2$  по методу Рэлея [15] получены расчетные формулы для коэффициента изгибной жесткости обода и частоты первой формы изгибных колебаний в виде

$$\begin{aligned} c_Y &= \int_0^L EI_Y \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{4EI_Y}{L^3}; \\ f_Y &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\int_0^L EI_Y \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 dx}{\int_0^L m_0 z^2(x) dx}} = \frac{4,47}{L^2} \sqrt{\frac{EI_Y}{m_0}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $E$  – модуль упругости 1-го рода;

$m$  – масса эпицикла;

$I_Y = 2\pi r^3 \delta$  – осевой момент инерции площади поперечного сечения обода;

$m_0$  – удельная масса единицы длины обода ( $m_0 = m/L$ ).

*Деформации растяжения-сжатия* по длине срединной поверхности обода эпицикла являются простейшими, при которых осевая линия поперечного сечения при колебаниях образует кольцо с периодически изменяющимся радиусом  $(r + u)$ , а все поперечные сечения – семейство концентрических окружностей. Относительное удлинение  $\varepsilon$  обода эпицикла в окружном направлении  $\varepsilon = u/r$  приводит к радиальным перемещениям  $u = \varepsilon r$  произвольной точки коль-

ца. Потенциальная энергия упругой деформации определяется по формуле

$$U_r = (EFu^2/2r^2) \cdot 2\pi r, \quad (4)$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения кольца.

Дифференцируя дважды выражение (4) по перемещению  $u$ , получены уравнения для расчета жесткости эпицикла и соответствующей частоты собственных колебаний в виде

$$c_r = \frac{\partial^2 U_r}{\partial u^2} = \frac{EF\pi}{r}; \quad f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E(1+i^2)}{\rho r^2}}, \quad (5)$$

где  $i$  – число волн деформации, расположенных по срединной окружности обода эпицикла.

При  $i = 0$  выражение (5) соответствует нулевой форме собственных радиальных колебаний, при которой обод представляет собой твердое тело. Последующие формы окружных колебаний эпицикла (при  $i > 0$ ) представляют собой волны деформаций, бегущих по окружности кольца.

Изгибные деформации эпицикла в плоскости кольца обода, например, в плоскости  $YZ$  (рис. 3, а). Изгибную жесткость эпицикла в направлении оси  $Y$  и частоту собственных колебаний можно определить по формулам [15]

$$c_u = \frac{\partial^2 U_u}{\partial v_y^2} = \frac{EI_{x1}\pi}{r^3} (1-i^2)^2; \quad (6)$$

$$f_u = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EI_{x1}i^2(1-i^2)^2}{\rho Fr^4(1+i^2)}},$$

где  $I_{x1} = L\delta^3/12$  – осевой момент инерции площади продольного сечения обода эпицикла относительно продольной оси  $X_1$  (рис. 3, б).

При  $i = 1$  получим  $f_u = 0$ . В этом случае эпицикл движется как абсолютно жесткое тело, форма и размеры поперечного сечения которого не изменяются. При  $i = 2$  имеет место основная форма изгибных колебаний обода (рис. 3, а, формы колебаний показаны штриховыми линиями), что подтверждено результатами МКЭ-моделирования (рис. 3, в).

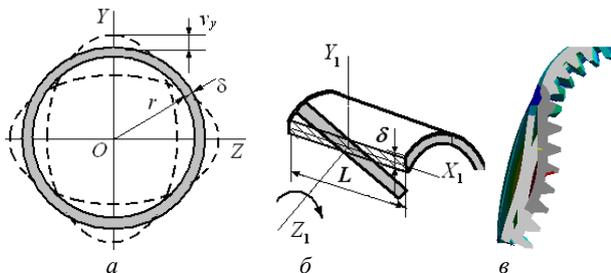


Рис. 3 – Схемы деформаций обода эпицикла:

а – изгибных в плоскости кольца;

б – крутильных относительно поперечной оси сечения обода;

в – фрагмент результатов МКЭ-моделирования

При крутильных колебаниях обода относительно поперечной оси  $z_1$  сечения (рис. 3, б) крутильная жесткость и частота собственных колебаний эпицикла определяется по формулам

$$c_k = \frac{\pi EI_{z1}}{r^3}; \quad f_k = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E(1+i^2)}{2\rho r^2}}, \quad (7)$$

где  $i$  – номер формы колебаний;

$c_k$  – коэффициент жесткости, приведенной к линии зацепления.

Дальнейшие исследования параметрических колебаний выполнены на примере конструкций эпициклов ПКР моделей 118.77 и 318.78 фирмы *Raba* со следующими параметрами:  $\delta = 9$  мм;  $L = 97$  мм;  $r = 0,1175$  м;  $G = 0,8 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>;  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>;  $\rho = 7,85 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $m = 6,5$  кг;  $J_X = 0,09$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_Y = 1,5 \cdot 10^{-4}$  м<sup>4</sup>;  $I_{Z1} = 6,9 \cdot 10^{-5}$  м<sup>4</sup>;  $I_{X1} = 5,9 \cdot 10^{-9}$  м<sup>4</sup>;  $F = 0,873 \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup>;  $z_s = 26$ ;  $z_p = 19$ ;  $\alpha_w = 20^\circ 39' 22''$ ;  $\varepsilon_\alpha = 1,32$ .

Определение приведенной жесткости эпицикла.

В результате сопоставления расчетных значений слагаемых жесткости эпицикла установлено, что значения большинства слагаемых превышают суммарную приведенную жесткость одной пары прямых  $c_z$  и наклонных зубьев  $c_z(\beta) = c_z / \cos^2 \beta$ , где  $c_z = 8 \cdot 10^8$  Н/м,  $\beta$  – угол наклона линии зубьев на делительном цилиндре. Исключение составляет жесткость участков между зубчатыми венцами "плавающей подвески" эпицикла, имеющих сопоставимые значения, например,  $c_u = 0,21 \cdot 10^8$  Н/м при  $i = 2$ ;  $c_u = 1,4 \cdot 10^8$  Н/м при  $i = 3$ ;  $c_u = 5,1 \cdot 10^8$  Н/м при  $i = 4$  (табл. 1). В установленных граничных условиях расчетной моделью эпицикла с "плавающей подвеской" принят набор колец, связанных линейными упругими связями, имитирующими зубчатые соединения и участки между венцами зубчатой муфты. Такая частичная дискретизация упругой системы эпицикла позволяет учесть ее характерную особенность – цикличность в окружном направлении.

Выражение для коэффициента приведенной жесткости эпицикла в окружном направлении имеет вид

$$1/c_{i,j} = 1/c_{ui} + 1/c_{zj}, \quad (8)$$

где  $c_{ij}$  – приведенная жесткость многопарного зацепления (индекс  $j$  соответствует парности зацепления,  $i$  – форме колебаний);

$c_{zj}$  – суммарная жесткость  $j$ -парного зубчатого зацепления;

$c_{ui}$  – жесткость участков между зубчатыми венцами подвески.

Приведенная жесткость эпицикла в окружном направлении в соответствии с (8) имеет вид

$$c_{j,i} = \frac{n_p c_{ui} c_{zj} \cos^2 \alpha_w}{n_p c_{zj} \cos^2 \alpha_w + c_{ui}}. \quad (9)$$

Таблица 1 – Значения слагаемых приведенной жесткости эпицикла в полюсе зацепления

№	Формулы	Расчетные значения, Н/м
1	$c_t = 2\pi Gr\delta/L$	$55 \cdot 10^8$
2	$c_\gamma = 4EI_\gamma/L^3$	$1300 \cdot 10^8$
3	$c_r = \frac{EF\pi}{r}$	$46 \cdot 10^8$
4	$c_{ui} = \frac{EI_{X1}\pi(1-i^2)^2}{2r^3}$	$0,21 \cdot 10^8 (i=2)$ $1,4 \cdot 10^8 (i=3)$ $5,1 \cdot 10^8 (i=4)$
5	$c_k = \pi EI_{Z1}/r^3$	$27 \cdot 10^8$

Среднее и амплитудное значения функции жесткости определены в виде

$$c_0 = (c_{\max} + c_{\min})/2; \quad c_A = (c_{\max} - c_{\min})/2. \quad (10)$$

Периодические пульсации функции жесткости зубчатой передачи предложено характеризовать коэффициентом  $\mu$  в виде

$$\mu = c_A/c_0, \quad (11)$$

минимизация которого способствует сужению области неустойчивости параметрических колебаний эпицикла.

**Пульсация жесткости зубчатого зацепления при наличии зазоров.** Функция кинематической погрешности зацепления, задающая дополнительное перемещение профилей зубьев друг относительно друга, изменяется с роторной частотой в связи с рассеянием значений окружного шага в пределах нормативного допуска, установленного для определенной степени точности зубчатых колес.

После прохождения участка кромочного удара зубьев нормальная составляющая скорости, направленной по касательной к рабочим профилям, равномерно уменьшается и становится равной нулю в момент выхода точки контакта зубьев на линию зацепления. Боковой зазор в зацеплении эпицикла с сателлитами, обусловленный условиями эксплуатации и ограниченной точностью изготовления колес, приводит к тому, что приведенная жесткость зубьев изменяется пульсациями от нуля (при наличии зазора) до максимальной величины. При этом коэффициент пульсации равен  $\mu = 1$ , так как значения средней и амплитудной приведенной жесткости совпадают.

Известно, что в косозубых передачах зубья входят в зацепление не сразу по всей ширине, а благодаря винтовому направлению постепенно, что обеспечивает большую плавность работы, значительное снижение уровня динамических нагрузок, вибраций и акустических шумов. При относительно небольшой ширине зубчатого венца  $b_w/d = 0,35 \dots 0,4$  такие переда-

чи в составе модулей агрегатных мотор-колес ведущих мостов 3-го поколения AVE 130 фирмы ZF отличаются меньшей чувствительностью к кинематической погрешности, что позволяет считать их "точными под нагрузкой" при динамическом моделировании.

При значениях  $b_w = 70$  мм,  $\beta = 15^\circ$ ,  $m_n = 4,5$  мм суммарный коэффициент перекрытия  $\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta = \varepsilon_\alpha + b_w \operatorname{tg} \beta / \pi m_t = 3,03$ , а соответствующее значение коэффициента пульсации жесткости  $\mu = 0,09$ . Для прямозубых ПКР в составе ведущих мостов 1-го поколения фирмы Raba расчетное значение коэффициента  $\mu = 0,18$ .

**Исследование областей устойчивости параметрических колебаний эпицикла.** Приняв функцию жесткости зацепления в виде ступенчатого синуса  $c_\Sigma(t) = c_0 \pm c_A$  с периодом  $T_c$ , модель параметрических колебаний эпицикла представлена для каждого из слагаемых периода  $T_c$  в виде дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. После приведения их к виду уравнений Матье и интегрирования по участкам методом стыковки решений получена диаграмма Айнса-Стретта (рис. 4) в координатах [3, 4]

$$a = 4k_0^2/\omega^2; \quad b = \mu a/2, \quad (12)$$

где  $k_0$  – обобщенная частота собственных крутильных колебаний эпицикла, как твердого тела.

Наклонные прямые характеризует параметрические колебания эпицикла для определенного значения коэффициента глубины пульсации жесткости  $\mu$  в соответствии с уравнением  $b = \mu a/2$ .

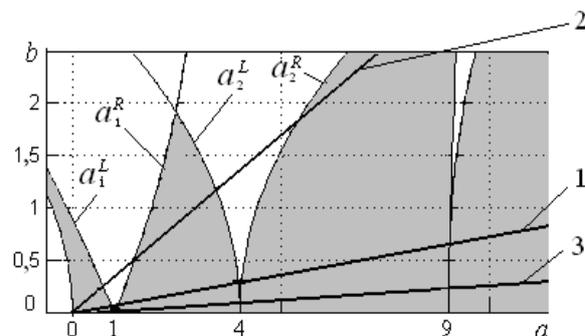


Рис. 4 – Диаграмма Айнса-Стретта (зоны устойчивости параметрических колебаний затенены): кривая 1 соответствует  $\mu = 0,18$ , прямозубое зацепление без зазоров; 2 –  $\mu = 1$  с зазорами; 3 –  $\mu = 0,09$  косозубое зацепление

Сравнение графически определенных зон неустойчивости свидетельствует об их расширении при наличии зазоров в прямозубом зацеплении эпицикла с сателлитами. Параметрическим резонансам соответствуют точки граничных предельных кривых с координатами  $a = (1, 4, 9, \dots)$ . В соответствии с решением (12) условие  $a = 1$  характеризует первый основной параметрический резонанс в виде  $k_0 = 0,5\omega$ .

Скорость движения троллейбуса определяется угловой скоростью водила и с учетом соотношений

(1) представлена в виде зависимости от круговой частоты зацеплений эпицикла

$$V_t = \frac{\omega R}{(z_s + z_p)n_p} = \frac{2k_0 R}{(z_s + z_p)n_p \sqrt{a}}, \quad (13)$$

где  $R$  – радиус ведущего колеса.

Установленные расчетные диапазоны критических значений скоростей троллейбуса, связанные с проявлением параметрических резонансов и усталостными повреждениями эпицикла, зависят от коэффициента перекрытия в зацеплении, наличия зазоров и формы колебаний (рис. 5). Для анализа устойчивости параметрических колебаниях предложен критерий в виде

$$k_R = \sum_{i=1}^n \left( 1 - \frac{S_i}{S_{B,i}} \right), \quad (14)$$

где  $S_i$  и  $S_{B,i}$  – площади зоны неустойчивости  $\Delta O M_i N_i$  и базовой зоны  $\Delta O N_i D_i$  для  $i$ -го параметрического резонанса.

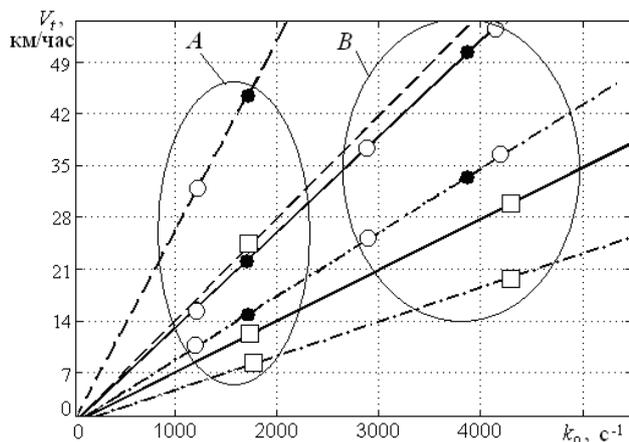


Рис. 5 – Пример диаграммы критических скоростей троллейбуса:  $A, B$  – области второй и третьей форм колебаний эпицикла; пунктирная, сплошная и штрихпунктирная линии соответствуют 1-му, 2-му и 3-му параметрическим резонансам; зацепление прямозубое с учетом зазоров (точки  $\circ$ ) и без ( $\bullet$ ); зацепление косозубое ( $\square$ )

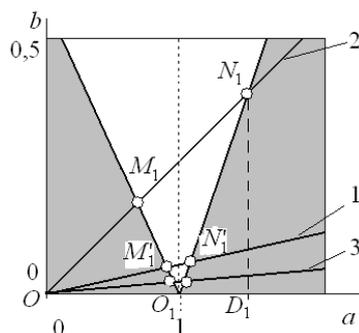


Рис. 6 – Фрагмент диаграммы Айнса-Стретта в области первого параметрического резонанса

Сравнение значений показателя вероятности устойчивости параметрических колебаний эпицикла

$P_R = k_R \cdot 100\%$ , влияющих на возникновение и ускоренное развитие усталостных трещин, подтверждает эффективность применения косозубых передач в ПКР современных троллейбусов с ограниченной нормативной виброактивностью и уровнем шума (табл. 2).

Таблица 2 – Вероятность устойчивости  $P_R$ , %, параметрических колебаний эпицикла

Вид зацепления:	прямозубое		косозубое
влияние кинематической погрешности	+	67	98
	-	83	

#### Выводы:

1. Разработаны аналитические модели и исследованы условия возникновения параметрических резонансов в системе ПКР ведущих мостов троллейбусов.

2. Обосновано адекватность применения коэффициента приведенной жесткости эпицикла с учетом суммарной жесткости зубчатого зацепления и жесткости участков между венцами зубчатой муфты "плавающей подвески" эпицикла, значения которых являются минимальными в балансе последовательных упругих элементов системы ПКР.

3. Исследована возможность возникновения параметрических резонансов для различных форм собственных колебаний прямозубого эпицикла в рабочем диапазоне скоростей движения троллейбуса. Установлено, что в прямозубом зацеплении кинематическая погрешность расширяет диапазон области неустойчивых колебаний до 50 %.

4. Обосновано адекватность применения критерия виброустойчивости  $k_R$ , обеспечивающего возможность прогнозирования вероятности устойчивости параметрических колебаний зубчатых передач в составе ПКР.

5. Подтвержден положительный эффект применения косозубого зацепления в ПКР, обусловленный уменьшением на 50 % коэффициента  $\mu$  пульсации приведенной жесткости зацеплений "эпицикл – сателлит". При этом прогнозируемая вероятность проявления параметрических резонансов "критериального элемента" ПКР – тонкостенного эпицикла, понижается до 2 %.

#### Список литературы

- Lin J., Parker G. Structured vibration characteristics of planetary gears with unequally spaced planets. *Journal of Sound and Vibration*. 2000, 233 (5). P. 921–928.
- Parker R.G., Xionghua Wu. Vibration modes of planetary gears with unequally spaced planets and elastic ring gear. *Journal of Sound and Vibration*. 2010, 329. P. 2265–2275.
- Gutyrya S., Yaglinskyi V., Chanchin A. Parametrical Fluctuations of Epicycle in Wheel Gearboxes. *British Journal of Applied Science & Technology*. 2016, 13(2). P. 1–8.
- Яглінський В.П., Гутиря С.С., Чанчін А.М., Жеглова В.М. Вплив параметричних коливань на втомну міцність епіциклу колісного редуктора. *Вісник НТУ "ХП"*. Харків, НТУ "ХП", 2017. №25 (1247). С. 169–175.
- Ariza De Miguel J., Gutyrya S.S., Jomyak Y.M. Tensiones en ejes huecos con una grieta superficial bajo flexión rotativa. *Revista DYNA*, 2014. Vol. 89, №1. P. 85–88.
- Калинин Д.В. Моделирование нелинейных колебаний цилиндрических зубчатых передач авиационных приводов. *Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета*. 2015, Т. 14, № 3, Ч.1. С. 183–192.

7. Gradu M.K., Langenbeck R. Breunig Planetary Gears with improved Vibrational Behaviour in Automatic Transmissions. *VDI-Berichte 1230*. Dusseldorf: VDI-Verlag. 1996. P. 861–879.
8. Gutyrya S.S., Zablonsky K.L., Yaglinsky V.P. System Modeling of Gears Design Quality. *International Conference on Gears. VDI*, Munich, Germany. 2005. pp. 417–434.
9. Dresig H., Schreiber U. Vibration Analysis for Planetary Gears under Consideration of Stiffness Variations during Tooth Engagement. *International Conference on Gears. VDI*, Munich, Germany, 2005. Pp. 591–610.
10. Дорофеев В.Л., Голованов В.В., Гукасян С.Г., Дорофеев Д.В., Сторчак В.Г. Экспериментальное и теоретическое исследование бифуркаций вибраций в авиационных трансмиссиях. *Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета*. 2015, Т. 14, № 3, Ч.1. С. 193–202.
11. Kahraman A., Kharazi A.A., Umrani M.A. Deformable body dynamic analysis of planetary gears with thin rims. *Journal of Sound and Vibration*. 2003, 262. P. 752–768.
12. Kahraman A., Vijayakar S. Effect of internal gear flexibility on the quasi-static behavior of a planetary gear set. *Transaction of ASME, Journal of Mechanical Design*. 2001, 123. P. 408–415.
13. Сафонов А.И. Особенности режимов нагружения и направления развития тяговых трансмиссий троллейбусов. *Автомобильная промышленность*. 2015, № 4. С. 8–15.
14. Oborsky G.O., Hutyria S.S., Yaglinsky V.P., Chanchin A N. Technical evolution and reliability of trolley's traction transmission. *Вісник НТУ "ХПІ"*. Харків, НТУ "ХПІ", 2018, № 25 (1301). С. 117–126.
15. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. *Колебания в инженерном деле*. Москва: Машиностроение, 1985. 472 с.

#### References (transliterated)

1. Lin J., Parker G. Structured vibration characteristics of planetar gears with unequally spaced planets. *Journal of Sound and Vibration*. 2000, 233 (5). Pp. 921–928.
2. Parker R.G., Xionghua Wu. Vibration modes of planetary gears with unequally spaced planets and elastic ring gear. *Journal of Sound and Vibration*. 2010, 329. Pp. 2265–2275.
3. Gutyrya S., Yaglinsky V., Chanchin A. Parametrical Fluctuations of Epicycle in Wheel Gearboxes. *British Journal of Applied Science & Technology*. 2016, 13(2). Pp. 1–8.
4. Yahlinsky V.P., Hutyria S.S., Chanchin A.M., Zhehlova V.M. Vplyv parametrychnykh kolyvan na vtomnu mitsnist epitsykladu kolisnoho reduktora [Influence of parametric oscillations on the fatigue strength of the epicycle of the wheel gear]. *Visnyk NTU "KhPI"* [Bulletin of the National Technical University "KhPI"]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2018. No. 25 (1301). Pp. 117–126.
5. Ariza De Miguel J., Gutyrya S.S., Jomyak Y.M. Tensiones en ejes huecos con una grieta superficial bajo flexión rotativa. *Revista DYNA*, 2014. Vol. 89, no. 1. Pp. 85–88.
6. Kalinin D.V. Modelirovaniye nelineynykh kolebaniy tsilindricheskikh zubchatykh peredach aviatsionnykh privodov [Modeling of nonlinear oscillations of cylindrical gears of aircraft drives]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta*. 2015. T. 14. No. 3. Part 1. Pp. 183–192.
7. Gradu M.K., Langenbeck R. Breunig Planetary Gears with improved Vibrational Behaviour in Automatic Transmissions // *VDI-Berichte 1230*. Dusseldorf: VDI-Verlag. 1996. Pp. 861–879.
8. Gutyrya S.S., Zablonsky K.L., Yaglinsky V.P. System Modeling of Gears Design Quality. *International Conference on Gears. VDI*, Munich, Germany. 2005. Pp. 417–434.
9. Dresig H., Schreiber U. Vibration Analysis for Planetary Gears under Consideration of Stiffness Variations during Tooth Engagement. *International Conference on Gears. VDI*, Munich, Germany, 2005. Pp. 591–610.
10. Dorofeyev V.L., Golovanov V.V., Gukasyan S.G., Dorofeyev D.V., Storchak V.G. Eksperimentalnoye i teoreticheskoye issledovaniye bifurkatsiy vibratsiy v aviatsionnykh transmissiyakh [Experimental and theoretical study of vibration bifurcations in aviation transmissions]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta*. 2015. T. 14. No. 3. Part. 1. Pp. 193–202.
11. Kahraman A., Kharazi A.A., Umrani M.A. Deformable body dynamic analysis of planetary gears with thin rims. *Journal of Sound and Vibration*. 2003, 262. Pp. 752–768.
12. Kahraman A., Vijayakar S. Effect of internal gear flexibility on the quasi-static behavior of a planetary gear set. *Transaction of ASME, Journal of Mechanical Design*. 2001, 123. Pp. 408–415.
13. Safonov A.I. Osobennosti rezhimov nagruzheniya i napravleniya razvitiya tyagovykh transmissiy trolleybusov [Features of loading regimes and the direction of development of traction transmissions of trolleybuses]. *Avtomobilnaya promyshlennost*. 2015. No. 4. Pp. 8–15.
14. Oborsky G.O., Hutyria S.S., Yaglinsky V.P., Chanchin A N. Technical evolution and reliability of trolley's traction transmission. *Visnyk NTU "KhPI"* [Bulletin of the National Technical University "KhPI"]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2018. No. 25 (1301). Pp. 117–126.
15. Timoshenko S.P., Yang D.Kh., Uiver U. *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Fluctuations in Engineering]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1985. 472 p.

Поступила (received) 19.06.2018

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Яглінський Віктор Петрович (Яглинский Виктор Петрович, Yaglinskij Viktor Petrovych)** – доктор технічних наук (Dr. habil. of Eng. S.), професор, Одеський національний політехнічний університет, професор кафедри підйомно-транспортного та робототехнічного обладнання; м. Одеса, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9466-6927>; e-mail: viknatvov@gmail.com

**Гутиря Сергій Семенович (Гутиря Сергей Семенович, Hutyria Serhij Semenovych)** – доктор технічних наук (Dr. habil. of Eng. S.), професор, Одеський національний політехнічний університет, директор Українсько-іспанського навчально-наукового інституту; м. Одеса, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1257-3933>; e-mail: hutyria@opu.ua

**Хомяк Юрій Мєфодійович (Хомяк Юрий Мєфодиевич, Khomyak Yuriy Mefodiyovych)** – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), доцент, Одеський національний політехнічний університет, доцент кафедри нафтогазового та хімічного машинобудування; м. Одеса, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0093-8405>; e-mail: jomiak38@gmail.com

**Чанчін Андрій Миколайович (Чанчин Андрей Николаевич, Chanchin Andriy Mykolajovych)** – Одеський національний політехнічний університет, асистент кафедри машинознавства і деталей машин; м. Одеса, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1483-8635>; e-mail: chanchin@opu.ua