

УДК 623.4: 681.7: 539.3

*Н.А. ТКАЧУК, А.В. ХЛАНЬ, А.И. ШЕЙКО, А.Н. МАЛАКЕЙ, А.В. НАБОКОВ, А.В. ГРАБОВСКИЙ,
А.Ю. ТАНЧЕНКО, А.Ю. ВАСИЛЬЕВ, А.В. ТКАЧУК*

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В работе разработан единый подход к расчетно-экспериментальному исследованию элементов механических систем и, в частности, деталей объектов бронетанковой техники, на базе обобщенного параметрического подхода. Все этапы исследования – от составления систем уравнений до сравнения численных результатов с экспериментальными данными – соединяет разработанная обобщенная математическая модель для исследования прочностных и жесткостных характеристик элементов механических систем. Задача синтеза расчетных моделей элементов механических систем получила полную математическую формализацию. Разработаны методы автоматизированного перевода графического портрета деформирования элементов сложных механических систем в численный формат данных, которые обладают свойствами устойчивости и обеспечения плавности получаемых при расшифровке полей искомым функций. Поиск параметров, обеспечивающих высокое качество расчетных моделей исследуемых объектов, производился модифицированными методами минимизации функционала. Достоверность расчетных моделей элементов технологической оснастки обеспечивается соединением преимуществ метода конечных элементов и метода спекл-голографической интерферометрии.

Ключові слова: расчетно-экспериментальный метод, механическая система, метод конечных элементов, метод спекл-голографической интерферометрии

В роботі розроблений єдиний підхід до розрахунково-експериментального дослідження елементів механічних систем і, зокрема, деталей об'єктів бронетанкової техніки, на базі узагальненого параметричного підходу. Всі етапи дослідження – від складання систем рівнянь до порівняння чисельних результатів із експериментальними даними – об'єднує розроблена узагальнена математична модель для дослідження міцності і характеристик жорсткості елементів механічних систем. Задача синтезу розрахункових моделей елементів механічних систем отримала повну математичну формалізацію. Розроблено методи автоматизованого переведення графічного портрета деформування елементів складних механічних систем в чисельний формат даних, які мають властивості стійкості і забезпечення плавності полів шуканих функцій, які отримуються при розшифровці. Пошук параметрів, що забезпечують високу якість розрахункових моделей досліджуваних об'єктів, проводиться модифікованими методами мінімізації функціоналу. Достовірність розрахункових моделей елементів технологічного оснащення забезпечується об'єднанням переваг методу скінченних елементів і методу спекл-голографічної інтерферометрії.

Ключові слова: розрахунково-експериментальний метод, механічна система, метод скінченних елементів, метод спекл-голографічної інтерферометрії

A unified approach to the calculation and experimental research of mechanical systems elements and, in particular, details of armored technics object has been developed based on the generalized parametric approach. All research stages, from preparation of equations systems to the comparison of numerical results with experimental data, are combined by developed generalized mathematical model for research of strength and rigidity characteristics of mechanical systems elements. The problem of computational models synthesis for mechanical systems element has received a complete mathematical formalization. Methods for automated translation of deformation graphic portrait of complex mechanical systems elements into a numerical data format are developed. These methods have properties of stability and ensure the smoothness of fields of unknown functions obtained during decoding. The parameters search for ensuring high quality of calculated models of investigated objects was carried out by modified methods of functional minimization. The reliability of computational models of technological equipment elements is ensured by combining the advantages of the finite element method and the speckle-holographic interferometry method.

Keywords: calculation and experimental method, mechanical system, finite element method, speckle-holographic interferometry method.

Введение

Для отечественного бронетанкостроения огромное значение имеют современные эффективные методы обеспечения высоких технических и тактико-технических характеристик боевых машин легкой и тяжелой категории по массе, а также технологического оборудования и оснастки для изготовления их элементов. Этим вопросам уделяется значительное внимание в [1–7]. В этих работах описаны математические и численные модели, а также методы решения задач анализа процессов и состояний в исследуемых объектах и синтеза рациональных технических решений по критериям огневой мощи, защищенности, подвижности и обитаемости боевых бронированных машин.

В то же время узким местом при этом является обоснование расчетных моделей исследуемых процессов и состояний. Для этого предлагается расчетно-экспериментальный метод, основанный на применении технологии обобщенного параметрического моделирования [8]. При формулировке задачи расчетно-экспериментального исследования элементов механических систем, в частности, объектов бронетанковой техники (БТТ) можно вычленил следующие основные проблемы математического характера: сравнение полей разной природы и происхождения; оценка точности

численных исследований при помощи метода конечных элементов (МКЭ); модификация теоретических основ метода спекл-голографической интерферометрии (МСГИ) с точки зрения оценки точности и взаимодействия с МКЭ; построение меры несоответствия результатов экспериментальных и численных исследований; выбор методов минимизации меры несоответствия; разработка методов "регуляризации" формы областей, в которых формулируется некоторая краевая задача, ее численный и экспериментальный аналоги (учитывая сложную геометрическую форму элементов БТТ, например, наличие большого количества отверстий, пазов, выборок).

Формулировка задачи анализа прочностных и жесткостных характеристик элементов машиностроительных конструкций

Рассмотрим элементы объектов бронетанковой техники как механическую систему взаимодействующих тел, поведение которой (математическая модель) описывается в общем виде в операторной форме

© Ткачук Н.А., Хлань А.В., Шейко А.И., Малакей А.Н., Набоков А.В., Грабовский А.В., Танченко А.Ю., Васильев А.Ю., Ткачук А.В., 2017

$$\bar{L}_M(u_M, P_M, f_M, t) = 0. \quad (1)$$

Здесь \bar{L}_M – некоторый оператор, структура и параметры которого зависят от типа исследуемого процесса или состояния, состава системы, граничных условий, нагрузки и условий сопряжения (структурно данный оператор содержит описание всех элементов системы); u_M – массив переменных состояния, относительно которых сформулирована задача, образующих пространство решений U_M ; P_M – массив параметров (характеристики физико-механических свойств, геометрические размеры, величины присоединенных масс, жесткости), составляющих параметрическое пространство P_M ; f_M – массив, характеризующий действующие на систему внешние нагрузки (поверхностные, объемные сосредоточенные, тепловые нагрузки), составляющие пространство нагрузок F_M ; t – время или иной параметр, характеризующий исследуемое явление как процесс.

В частности, для большинства случаев удобно сформулировать уравнения (1) для напряженно-деформированного состояния (НДС) в перемещениях. В этом случае $U_M = \bigcup_s u_{M_i}^{(s)}$, где $u_{M_i}^{(s)} = u_{M_i}^{(s)}(r_i, t)$ – массив перемещений точек элемента s исследуемой системы функций с радиус-вектором \mathbf{r} с компонентами r_i ($i=1,2,3$), соответствующих моменту времени t . Соответственно

$$P_M = \bigcup_s P_M^{(s)}, F_M = \bigcup_s f_M^{(s)}.$$

Например, для некоторого элемента исследуемой системы (массивное тело) общее уравнение (1) расписывается в виде системы уравнений (индексы $*$.^(s) опущены) в области Ω , занимаемой телом [9]:

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}; \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}; \quad (3)$$

$$\sigma_{ij,j} + \bar{f}_i = 0. \quad (4)$$

Здесь $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций, связь между которыми задается тензором упругих постоянных C_{ijkl} , а \bar{f}_i – составляющая объемной нагрузки.

Соотношения (2)–(4) дополняются граничными условиями

$$u_i|_{S_u} = g_i(\mathbf{r}), \quad \sigma_i|_{S_\sigma} = \bar{f}_i(\mathbf{r}). \quad (5)$$

Здесь S_u, S_σ – части поверхности тела, на которых заданы геометрические и силовые граничные условия, а g_i, \bar{f}_i – заданные вектор-функции перемещений и поверхностных нагрузок.

В случае контактного взаимодействия тел p, q с гладкими поверхностями на части поверхности S_c каждого тела добавляются условия непроникнове-

ния:

$$(u_v^p + u_v^q)|_{S_c} \leq \delta(\mathbf{r}), \quad (7)$$

где u_v – составляющая перемещения по нормали \mathbf{v} к поверхности, а δ – начальный зазор в сопряжении тел.

Как известно [10–12], исходная задача (1)–(7) приводится к вариационной задаче

$$(\bar{L}_M u_M, v_M) = (f_M, v_M), \quad \forall v_M, \quad (8)$$

где \bar{L}_M – оператор краевой задачи внутри области Ω ; а $(*, **)$ – соответствующая билинейная форма, или вариационному неравенству

$$(\bar{L}_M u_M, v_M - u_M) \geq (f_M, v_M - u_M), \quad \forall v_M \in G, \quad (9)$$

где G – множество, задаваемое ограничениями (7).

Вариационная задача (8) или неравенство (9) приводятся к проблеме минимизации функционала $I(u_M)$ [13]:

$$I(u_M) = 1/2(\bar{L}_M u_M, u_M) - (f_M, u_M) \rightarrow \min. \quad (10)$$

Для случая (8) ищется безусловный минимум, а для случая (9) – минимум на множестве G в пространстве функций u_M . Данный квадратичный функционал состоит из квадратичной $a(u_M, u_M)$ и линейной $b(u_M)$ форм. При этом квадратичная форма в (10) представляет собой потенциальную энергию деформации исследуемой системы, а линейная – работу внешних сил. Например, для пространственной задачи теории упругости билинейная форма, порождающая квадратичную составляющую (10), имеет вид:

$$a(u_M, v_M) = (\bar{L}_M u_M, v_M) = \int_{(\Omega)} \sigma_{ij}(u_M) \varepsilon_{ij}(v_M) d\Omega, \quad (11)$$

а линейная –

$$b(u_M) = (f_M, u_M) = \int_{(S_u)} \bar{f}_i \cdot u_{M_i} dS + \int_{(\Omega)} \bar{f}_i \cdot u_{M_i} d\Omega. \quad (12)$$

Для определения НДС тел исследуемой системы, т.е. решения некоторой текущей задачи анализа, необходимо или решить систему уравнений (2)–(6) (или неравенств (7) для случая контактного взаимодействия), или вариационное уравнение (8) (соответственно, неравенство (9)), или произвести минимизацию функционала (10).

При решении задачи определения напряженно-деформированного состояния предполагается, что она поставлена корректно (по Адамару) [14]. При этом кроме классических требований разрешимости, единственности и устойчивости, т.е.:

$$\forall f_M \exists u_M : L_M(u_M, p_M, f_M, t) = 0, \quad (13)$$

$$[L_M(u_M^1) = 0, L_M(u_M^2)] = 0 \Rightarrow u_1 = u_2, \quad (14)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f_M^\varepsilon - f_M\| = 0 \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon - u\| = 0, \quad (15)$$

где $\|\cdot\|$ – некоторая норма, а u_ε – решение (1) для $f_M = f_M^\varepsilon$,

предполагается еще и требование устойчивости по отношению к изменению оператора \bar{L}_M (как структурному, так и параметрическому), а также граничных условий (5), (6) и условий контактного непроникновения (7). Последние условия распространяются и на функции $\bar{g}_i, \bar{f}_i, \bar{\delta}$ из (5)–(7), и, соответственно, на поверхности S_u, S_σ, S_c . Соотношения (1)–(15) составляют математическую модель для определения напряженно-деформированного состояния элементов механических систем, в т.ч. – для деталей объектов бронетанковой техники.

Оператор \bar{L}_M исследуемой задачи действует как оператор \bar{L}_M в области Ω и характеризуется типом оператора, его структурой, физико-механическими характеристиками, определяемыми свойствами материала, а также физической размерностью области Ω . На границе действуют различные граничные условия, характеризующие тип краевых условий, внешние нагрузки, условия контактного взаимодействия. Кроме того, сама область Ω имеет некоторую форму и геометрические размеры. То же относится к границе S и ее составляющим.

Все указанные данные различной природы составляют множество обобщенных параметров математической модели исследуемого элемента механических систем. Естественно, что при переходе от реального объекта к его математической модели допускается некоторая погрешность. В соответствии с этим необходимо в различных случаях решать следующие типы задач: уточнение оператора краевой задачи (тип, структура); уточнение краевых условий; уточнение нагрузок (тип, величина, распределение); уточнение условий сопряжения; уточнение формы, размеров, гладкости областей Ω, S .

Конечно-элементное описание поведения исследуемых элементов

Для численного решения задачи минимизации функционала (10), в настоящее время часто применяется метод Рунге с базисными кусочно-полиномиальными функциями – метод конечных элементов [15]. Тогда, вводя пространство V^n (n – количество узлов сетки конечных элементов) базисных функций МКЭ [15], исходную задачу можно привести к проблеме минимизации функционала

$$I^n(q^n) = 1/2 K_{ij} q_i q_j - b_i q_i, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (16)$$

Здесь $K_{ij} = (L\phi_i, \phi_j)$ – коэффициенты матрицы жесткости конструкции K , ϕ_i – базисная функция МКЭ, а $b_i = (f_i^N, q_i)$ – элементы массива узловых нагрузок.

Условия минимальности (16) дают систему линейных алгебраических уравнений [15]

$$K \cdot q = b, \quad (17)$$

которая соответствует операторному аналогу (1):

$$\bar{L}_N(u_N, P_N, f_N, t) = 0, \quad (18)$$

где u_N, P_N, f_N – соответственно аналоги u_M, P_M, f_M в пространстве функций u_N , параметров P_N и нагрузок f_N .

Таким образом, при дискретизации исходной задачи производится переход от функционального пространства функций U_N к пространству конечной размерности V^N . Поскольку V^N является замкнутым подпространством U_M , то для решения u_N и ошибки МКЭ

$$\Delta_N = (u_M - u_N)$$

справедливы следующие утверждения [15]:

$$a(u_M - u_N, u_M - u_N) = \min_{v_N \in V^N} a(u_M - v_N, u_M - v_N); \quad (19)$$

$$a(u_M - u_N, v_N) = 0, \quad \forall v_N \in V^N; \quad (20)$$

$$a(u_N, v_N) = b(v_N) \quad \forall v_N \in V^N; \quad (21)$$

$$a(\Delta_N, \Delta_N) = a(u_M, u_M) - a(u_N, u_N); \quad (22)$$

$$a(u_N, u_N) \leq a(u_M, u_M). \quad (23)$$

Таким образом, в пространстве с энергетической нормой решение u_N является проекцией решения u_M на пространство V^N , причем энергия ошибки равна ошибке в энергии.

Для евклидовой нормы ошибки справедлива оценка [15]

$$\|\Delta_N\| \leq C_N h^\xi \|u_N\|, \quad (24)$$

где h – размер конечного элемента, а ξ – показатель, зависящий от типа задачи.

Зависимости и соотношения (1)–(24) носят качественный характер. Тем не менее из этих зависимостей можно сделать вывод о том, что теоретическая точность МКЭ в силу эллиптичности исследуемых задач может быть оценена качественно в различных нормах (энергетическая, евклидова, чебышевская). При этом тенденция изменения нормы ошибки должна быть монотонной: начиная с некоторого момента с уменьшением размеров конечных элементов ошибка уменьшается по обратной степенной зависимости.

Поскольку измельчение сетки конечных элементов приводит к росту требований к объему вычислительных ресурсов, то закономерно возникает вопрос об узости постановки задачи, предполагающей повышение точности конечно-элементной модели. Здесь можно сделать 2 замечания:

1. Процесс улучшения конечно-элементной модели должен быть ограничен наперед заданным значением погрешности α_i (i – номер варианта для вычисления погрешности МКЭ)

$$\alpha_i \leq \bar{\alpha}_i. \quad (25)$$

2. Процесс повышения точности конечно-элементной модели ограничивается также вычислительными ресурсами.

Последнее замечание можно трансформировать в систему ограничений

$$\left. \begin{aligned} V_{RAM}(\alpha) \leq \bar{V}_{RAM}(\alpha); \quad V_{HD}(\alpha) \leq \bar{V}_{HD}(\alpha); \\ V_t(\alpha) \leq \bar{V}_t, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где в правых частях соотношений (26) находятся предельные объемы оперативной памяти, дискового пространства и времени решения на компьютере или системе компьютеров соответственно.

Неявно заданные ограничения (26) и явное ограничение (25) образуют условие ограничения процесса улучшения численной модели:

$$\alpha_i \leq \alpha_i^+ = \max \left\{ \bar{\alpha}_i^{-RAM}, \bar{\alpha}_i^{-HD}, \bar{\alpha}_i^{-t} \right\}. \quad (27)$$

Здесь $\bar{\alpha}_i^{-RAM}, \bar{\alpha}_i^{-HD}, \bar{\alpha}_i^{-t}$ – соответственно решения соотношений (26) в случае равенства:

$$V_{RAM}(\alpha_i) = \bar{V}_{RAM}; \quad V_{HD}(\alpha_i) = \bar{V}_{HD}; \quad V_t(\alpha_i) = \bar{V}_t. \quad (28)$$

Наиболее существенными при повышении качества конечно-элементной модели являются задачи уточнения следующих обобщенных параметров: тип задачи; тип конечных элементов; схема конечно-элементной разбивки; размеры конечных элементов; расположение зон сгущения-разрежения сетки конечных элементов; ограничения вычислительных ресурсов.

Применение метода спекл-голографической интерферометрии для исследования поведения сложных механических систем

Экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния элементов сложных механических систем предполагает наличие самого объекта исследований или его физической модели, измерительной аппаратуры, регистрирующих приборов, оборудования для расшифровки полученных результатов. Все эти элементы объединены при помощи специально разработанных схем, которые реализуют тот или иной способ измерений. Так, в частности, голографическая интерферометрия [16–18] предоставляет исследователю мощный инструмент определения перемещений точек поверхности исследуемых элементов механических систем. Особенностью голографической интерферометрии является возможность проведения бесконтактных измерений как на физической модели исследуемого объекта, так и на самом объекте. При этом, как и любой другой метод экспериментальных измерений, метод голографической и спекл-интерферометрии допускает формальную запись в виде:

$$\bar{L}_E(u_E, P_E, f_E, t) = 0. \quad (29)$$

Здесь \bar{L}_E – некоторый оператор, который можно трактовать как способ преобразования интерференционной картины в информацию о деформации объекта в некоторый формат данных, u_E – массив переменных состояния (в большинстве случаев – вектор перемещений точек поверхности исследуемого тела), P_E – массив параметров p_E , включающий в себя (в соответствие с концепцией обобщенной параметризации) и метод измерений, и измерительные схемы, и количественные параметры используемой аппаратуры, и методы расшифровки и обработки результатов измерений, f_E – массив, характеризующий внешнее воздействие на исследуемый объект, а t – время.

Задачу согласования результатов численных и экспериментальных исследований можно сформулировать в виде

$$I = \|u_E - u_N\| \rightarrow \min, \quad (30)$$

где функционал I – некоторая мера $\|*\|$ несоответствия полей распределений u_E, u_N

Основные соотношения метода спекл-голографической интерферометрии и оценка погрешностей измерений. При исследовании напряженно-деформированного состояния непрозрачных тел при помощи метода голографической и спекл-интерферометрии их поверхность освещается электромагнитным излучением.

Электромагнитную волну, в частности, световую, можно описать, задав временную и пространственную зависимости ее вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} . Для более полного описания необходимо еще задать вектор напряженности магнитного поля, вектор электрического смещения и вектор магнитной индукции, связь между которыми устанавливается уравнениями Максвелла. При рассмотрении метода спекл-голографической интерферометрии можно ограничиться заданием лишь вектора \mathbf{E} , поскольку исследователя интересует форма волны, а не ее физическая природа. К тому же регистрирующие фотографические материалы, используемые в голографической интерферометрии, реагируют главным образом на электрическое поле \mathbf{E} .

Простейшим типом электромагнитной волны является линейно-поляризованная плоская волна. Если такая волна поляризована в направлении y и распространяется в направлении z , то три компоненты электрического поля \mathbf{E} можно записать как [18]

$$E_x = 0; \quad E_y = A \sim \cos(\omega t - kz); \quad E_z = 0. \quad (31)$$

Здесь $A \sim$ – амплитуда волны. Ее круговая частота ω и волновое число k определяются формулами

$$\omega = 2\pi\nu, \quad k = 2\pi/\lambda, \quad (32)$$

где частота света ν составляет величину порядка 10^{15} Гц, а длина волны видимого света λ лежит в интервале $0,38 \text{ мкм} < \lambda < 0,76 \text{ мкм}$. Световая волна распространяется с фазовой скоростью $v = \omega/k$. Эта скорость зависит от среды, в которой распространяется свет. Ее

максимальное значение $c = 3 \cdot 10^8$ м/с достигается в вакууме.

В общем случае задаются направление распространения световой волны волновым вектором \mathbf{k} , величина которого равна $k = 2\pi/\lambda$, а направление совпадает с направлением распространения волны. Плоская волна – это волна, фаза которой в любой момент времени постоянна во всех точках плоскости, нормальной вектору \mathbf{k} . Если $\mathbf{r} = ix + jy + kz$ – радиус-вектор произвольной точки в пространстве с координатами (x, y, z) , как показано на рис. 1, то уравнения линейно-поляризованной плоской волны имеют вид:

$$E_{x'} = 0, E_{y'} = A \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), E_{z'} = 0. \quad (33)$$

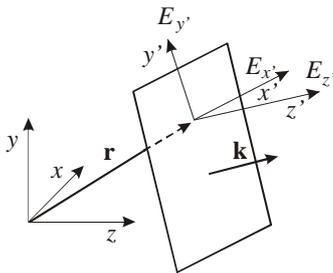


Рисунок 1 – Плоская световая волна, распространяющаяся в направлении, определяемом волновым вектором \mathbf{k}

Поверхность, на которой фаза постоянна (в данном случае плоскость $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const}$), называется *волновым фронтом*.

В подавляющем большинстве применений голографической интерферометрии источником света служит лазер. Лазеры излучают световые волны очень простой формы, причем их характеристики постоянны во времени и могут быть измерены с большой точностью. Узкие пучки практически монохроматического лазерного излучения с плоскими волновыми фронтами очень близки к идеальным. Большая часть лазеров испускает линейно-поляризованный свет. Излучение обычного He-Ne-лазера непрерывного действия, используемого в голографической интерферометрии, имеет длину волны $\lambda = 632,8$ нм. Оно испускается в виде узкого пучка диаметром около 2 мм с угловой расходимостью, не превышающей 0,7 мрад, и имеет линейную поляризацию не хуже чем $1:10^3$ (число характеризует степень деполаризации лазерного пучка). Наиболее важной характеристикой лазерного излучения с точки зрения применения в методе голографической спекл-интерферометрии является его высокая когерентность. Сферические и плоские волны, которые используются в голографической интерферометрии, могут быть получены с помощью узкого лазерного пучка, как показано на рис. 2. Пучок пропускают через небольшую положительную линзу, например микрообъектив с малым фокусным расстоянием f_1 . Пройдя через фокус, лучи расходятся, образуя сферическую волну. Эту волну можно коллимировать при помощи второй линзы с большим фокусным расстоянием f_2 . Если вторую линзу поместить на расстоянии f_2 от источника сферической волны, то образуется плоская

волна (см. рис. 2). Обычно излучение лазера поляризовано чаще всего в вертикальном направлении.

Явление *интерференции* занимает центральное место в методе спекл-голографической интерферометрии. На регистрирующей среде фиксируется картина освещенности, которая представляет собой усредненный во времени световой поток. Освещенность I^0 определяется по формуле:

$$I^0 = \epsilon v (\mathbf{E}^2), \quad (34)$$

где ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, в которой распространяется свет, а v – скорость его распространения.

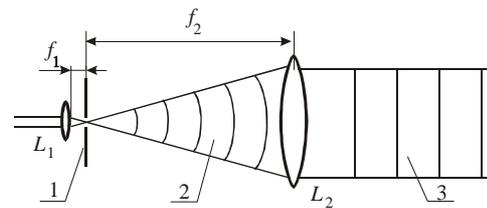


Рисунок 2 – Схема получения плоской волны: 1 – точечное отверстие; 2 – сферическая волна; 3 – плоская волна; L_1 – короткофокусная линза с фокусным расстоянием f_1 ; L_2 – длиннофокусная линза с фокусным расстоянием f_2

Освещенность I^0 пропорциональна усредненному во времени квадрату электрического вектора \mathbf{E}^2 . Рассмотрим явление интерференции. Пусть имеются две различные световые волны \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 одинаковой частоты, которые налагаются друг на друга. Поскольку $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, освещенность определяется выражением

$$I^1 = \overline{\mathbf{E}^2} = \overline{\mathbf{E}_1^2} + \overline{\mathbf{E}_2^2} + 2\overline{\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2}, \quad (35)$$

где $I^1 = I^0 / \omega$ – величина, пропорциональная I^0 , а $\bar{*}$ – величина, усредненная по времени.

Пусть \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 – две линейно-поляризованные в одном направлении волны:

$$E_1 = A_1 \cos(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}), E_2 = A_2 \cos(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + \phi), \quad (36)$$

где ϕ – постоянный относительный фазовый сдвиг между двумя волнами. При комбинировании выражения (36) и усреднении во времени

$$I^1 = I_1^1 + I_2^1 + 2\sqrt{I_1^1 \cdot I_2^1} \cos \delta, \quad (37)$$

где $I_1^1 = A_1^2$, $I_2^1 = A_2^2$, $\delta = (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})$ – разность фаз между двумя волнами в произвольной точке.

Освещенность меняется от минимального значения

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cos \delta$$

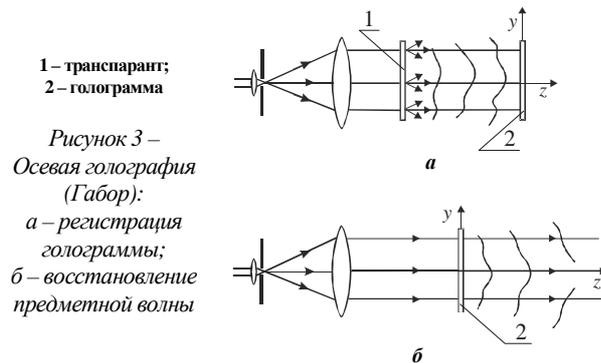
в точках, где $\delta = (2N + 1)\pi$, до максимального

$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cos \delta$, где $\delta = 2N\pi$ (здесь N

– целое положительное число).

Распределение освещенности в произвольной плоскости можно зарегистрировать, поместив в эту плоскость фотопластинку. Его можно также наблюдать на диффузном экране, например, на матовом стекле. В том и другом случае мы имеем картину, состоящую из чередующихся светлых и темных полос. Эта интерференционная картина позволяет определить пространственное распределение разности фаз между рассматриваемыми волнами, а, соответственно, определить при помощи интерференционной картины [18] перемещение точек поверхности исследуемого объекта.

В явлении интерференции распределение фаз преобразуется в распределение освещенности в интерференционной картине, которое может быть зарегистрировано на фотослое. На этом основан голографический метод, изобретенный и детально описанный Габором [18]. Габор предложил получать интерференционную картину, добавляя к предметной волне когерентную с ней опорную волну. Картина интерференции этих волн может быть зарегистрирована на фотопластинке. Проявленная и освещенная должным образом фотопластинка дифрагирует свет так, что в ее плоскости восстанавливается комплексная амплитуда U_0 . На практике все это можно проделать при помощи простой системы, изображенной на рис. 3.



1 – транспарант;
2 – голограмма

Рисунок 3 –
Осевая голография
(Габор):

а – регистрация
голограммы;
б – восстановление
предметной волны

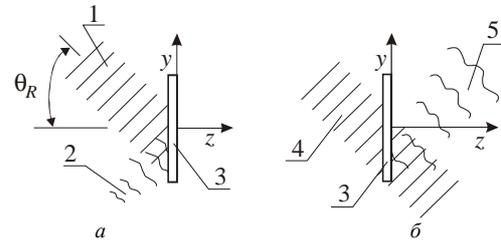
Обычно в голографической интерферометрии используют внеосевые голограммы, записываемые по методу Лейта и Упатниекса. Их схема позволяет пространственно разделить три волны, возникающие при дифракции в процессе восстановления. Она основана на общеизвестном в теории связи способе кодирования и декодирования сигналов с помощью их модуляции высокочастотной несущей волной. В голографии, правда, имеют дело с пространственными частотами, однако принцип остается тем же. Опорная волна, используемая для записи внеосевой голограммы, распространяется под некоторым углом к предметной волне. На рис. 4, а показана регистрация внеосевой голограммы с использованием плоской опорной волны. Комплексные амплитуды в плоскости фотослоя ($z = 0$) имеют вид:

- предметная волна –
$$U_0(x, y) = a_0(x, y)e^{[-i\phi_0(x, y)]}, \quad (38)$$

- опорная волна –

$$U_R(x, y) = a_R e^{i2\pi f_y y}, \quad (39)$$

где $f_y = (\sin \theta_R) / \lambda$ – пространственная частота опорной волны.



а
1 – опорная волна; 2 – предметная волна;
3 – фотослой (голограмма); 4 – восстанавливающая волна;
5 – восстановленная предметная волна

Рисунок 4 – Внеосевая голография (Лейт и Упатниекс):

а – регистрация голограммы;
б – восстановление предметной волны

Освещенность в плоскости фотослоя равна

$$I^1(x, y) = |U_0 + a_R e^{i2\pi f_y y}|^2 = a_R^2 + |U_0|^2 + a_R U_0 e^{-i2\pi f_y y} + a_R U_0^* e^{i2\pi f_y y}. \quad (40)$$

Фотопластинка экспонируется распределением освещенности, соответствующим формуле (40), и затем проявляется так, что ее амплитудное пропускание $t^1(x, y)$ оказывается пропорциональным $I^1(x, y)$:

$$t^1(x, y) = t_b + \beta (|U_0|^2 + a_R U_0 e^{-i2\pi f_y y} + a_R U_0^* e^{i2\pi f_y y}) \quad (41)$$

или

$$t^1(x, y) = t_b + \beta a_0^2(x, y) + 2\beta a_R a_0(x, y) \cos[2\pi f_y y + \phi_0(x, y)]. \quad (42)$$

Из выражения (42) ясно видно, что голограмма состоит из совокупности "несущих" интерференционных полос с пространственной частотой f_y , которые промодулированы по амплитуде за счет величины $a_0(x, y)$ и по фазе за счет величины $\phi_0(x, y)$.

Для восстановления предметной волны голограмму освещают плоской волной, распространяющейся в том же самом направлении, что и исходная опорная волна. Ее комплексная амплитуда в плоскости голограммы

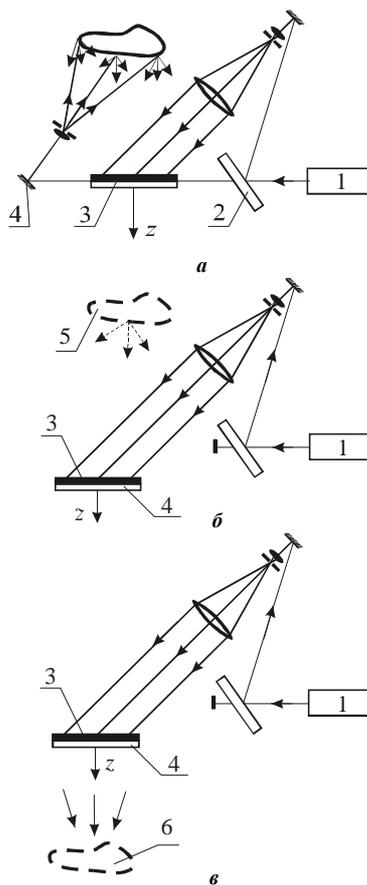
$$U_c(x, y) = a_c e^{i2\pi f_y y}. \quad (43)$$

Результирующая комплексная амплитуда света непосредственно за голограммой ($z = 0 +$) равна

$$U_I(x, y) = (t_b + \beta |U_0|^2) a_c e^{i2\pi f_y y} + \beta a_c a_R U_0 + \beta a_c a_R U_0^* e^{i4\pi f_y y}. \quad (44)$$

Первый член выражения (44) представляет собой часть восстанавливающей волны, которая проходит через голограмму, испытывая ослабление и некоторую модуляцию освещенности. Второй член описывает дифрагированную волну, являющуюся копией исход-

ной предметной волны. Она формирует мнимое изображение объекта, причем восстановленная предметная волна пространственно отделена от части восстанавливающей волны, прошедшей через голограмму (см. рис. 4, б). Третий член выражения (44) дает волну, сопряженную исходной предметной волне. Она распространяется под углом $\arcsin(2\sin\theta)$ к оси z . Обычно наблюдаются только восстановленная предметная волна и прошедшая через голограмму компонента.



1 – лазер, 2 – светоделитель, 3 – фотоэмульсия, 4 – голограмма, 5 – мнимое изображение, 6 – действительное изображение

Рисунок 5 – Внеосевая голография:
а – оптическая система для записи голограмм;
б – восстановление прямого мнимого изображения;
в – восстановление сопряженного действительного изображения

На рис. 5, а представлена типичная оптическая система для записи внеосевых голограмм. Используя метод внеосевой голографии, можно получать трехмерные изображения диффузно отражающих объектов, которые кажутся покрытыми интерференционными полосами. Присутствие интерференционных полос на изображении объекта говорит о том, что объект испытал деформацию, смещение или вращение. Аналогично в случае прозрачных объектов может быть получена интерференционная картина, свидетельствующая об изменениях показателя преломления или толщины объекта. Интерферометрия такого типа возможна благодаря тому, что голографический метод позволяет зарегистрировать волну, рассеянную объектом, а затем восстановить ее с точностью, допускающей ее интер-

ферометрическое сравнение с волной, рассеянной тем же объектом, но в другое время. Возможен и иной способ – интерферометрическое сравнение восстановленной волны с другой голографически зарегистрированной и восстановленной волной, рассеянной тем же объектом.

Результат сложения двух или более таких волн – голографическая интерферограмма. Термин "интерферограмма" – эта картина интерференционных полос, зарегистрированная на фотослое, а также образованная на двумерном экране или сетчатке глаза.

Голография – линейный процесс в том смысле, что она позволяет зарегистрировать последовательно во времени две или более оптических волны, которые впоследствии могут быть восстановлены одновременно. Поэтому с ее помощью можно производить суммирование, вычитание или даже усреднение во времени совокупности волн.

Освещенность, создаваемая восстановленной волной [18]:

$$I^1(x, y) = 2a^2(x, y)\{1 + \cos[\Delta\phi(x, y)]\}. \quad (45)$$

Выражение (45) дает освещенность объекта $a^2(x, y)$, промодулированную интерференционными полосами $2\{1 + \cos[\Delta\phi(x, y)]\}$. Темные полосы – это линии, вдоль которых значения фазы $\Delta\phi$ являются нечетными кратными числа π , светлые полосы – линии постоянных значений фазы $\Delta\phi$, являющихся четными кратными числа π .

Голографическая интерферометрия во многих случаях является эффективным и единственно возможным методом исследования. В основе этого лежат следующие ключевые свойства: высокая информативность, разделение амплитуды во времени, непрерывная запись событий, временная фильтрация.

Принимается следующая модель. Поверхность объекта состоит из набора точечных рассеивателей. Если произвольная точка поверхности P претерпевает смещение \mathbf{L} в новое положение P' , то голографическая интерференционная картина образуется в результате интерференции света, рассеянного точками P и P' , тогда как интерференции света, рассеянного точкой P , со светом, рассеянным всеми другими точками поверхности, не происходит. Эта модель удобна и достаточна для целей интерпретации полос.

Роль голограммы состоит в том, чтобы воспроизвести свет, рассеянный объектом как в исходном, так и в смещенном положении. На рис. 6 приведены основные элементы схемы расшифровки, причем основной задачей является увязывание сдвига фаз δ и перемещения точек \mathbf{L} .

Исходя из соотношений на рис. 6, можно записать в виде:

$$\phi_1 = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{k}_2 (\mathbf{R} - \mathbf{r}_1) + \phi_r; \quad (46)$$

$$\phi_2 = \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}_3 + \mathbf{k}_4 (\mathbf{R} - \mathbf{r}_3) + \phi_r. \quad (47)$$

Здесь ϕ_1 и ϕ_2 – фазы световой волны, рассеянной точкой P до и после смещения, а ϕ_r – произвольная фаза, приписываемая этим волнам в точке O , в которой рас-

положен источник.

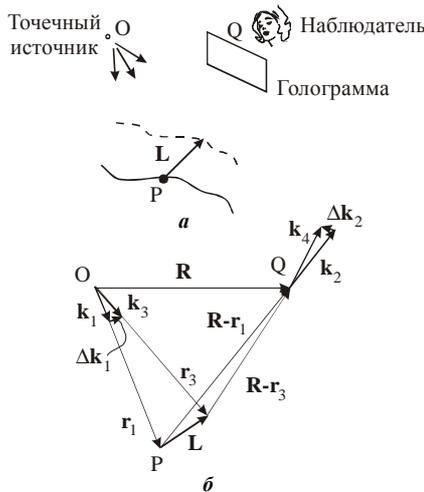


Рисунок 6 – Обозначения, используемые при анализе интерференционных полос:
а – схема установки;

б – векторы положения точек и волновые векторы

Разность фаз, измеряемая наблюдателем, равна

$$\delta = \phi_2 - \phi_1. \quad (48)$$

Тогда

$$\delta = (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) + \Delta\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_3 + \Delta\mathbf{k}_2(\mathbf{R} - \mathbf{r}_3). \quad (49)$$

В реальной системе величины \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_3 гораздо больше, чем $\mathbf{L} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$, так что для практических целей можно считать, что $\Delta\mathbf{k}_1 \perp \mathbf{r}_3$ и $\Delta\mathbf{k}_2 \perp (\mathbf{R} - \mathbf{r}_3)$. Поэтому два последних скалярных произведения в равенстве (49) пренебрежимо малы, и мы приходим к соотношению

$$\delta = (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{L}. \quad (50)$$

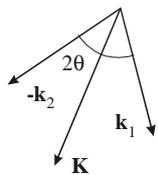


Рисунок 7 – Вектор чувствительности

Это простое соотношение является основой количественной интерпретации полос в голографической интерферометрии. Удобно ввести вектор чувствительности $\mathbf{K} \equiv (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)$, так что $\delta = \mathbf{K} \cdot \mathbf{L}$.

Пусть 2θ – угол между направлениями освещения и наблюдения, как показано на рис. 7. Вектор чувствительности имеет величину $2k \cos \theta$ и совпадает с биссектрисой угла между направлениями освещения и наблюдения. Таким образом, одно наблюдение интерферограммы дает величину δ , которая позволяет определить компоненту \mathbf{L} в этом направлении.

Для компланарных смещений (рис. 8)

$$\delta = 2kL \cos \theta \cos \psi. \quad (51)$$

Для определения компонент вектора \mathbf{L} необходимо провести серию измерений. Один из способов осуществления таких наблюдений показан на рис. 9, а. Регистрируются три отдельные голографические интерферограммы и измеряются разности фаз $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ в

трех точках Q_1, Q_2, Q_3 соответственно. Для каждой точки наблюдения Q_N определяется волновой вектор, который компланарен вместе с волновым вектором освещающей волны \mathbf{K} . Эти векторы показаны на рис. 9, б. Для каждого направления наблюдения можно записать уравнение, связывающее разность фаз со смещением:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{L} = \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{L}; \\ \delta_2 &= (\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{L} = \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{L}; \\ \delta_3 &= (\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{L} = \mathbf{K}_3 \cdot \mathbf{L} \end{aligned} \quad (52)$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} K_{1x} & K_{1y} & K_{1z} \\ K_{2x} & K_{2y} & K_{2z} \\ K_{3x} & K_{3y} & K_{3z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = 2\pi \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}, \quad (53)$$

где N_i – номера полос в каждом случае.

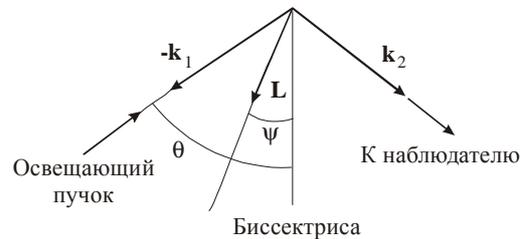


Рисунок 8 – Компланарное смещение

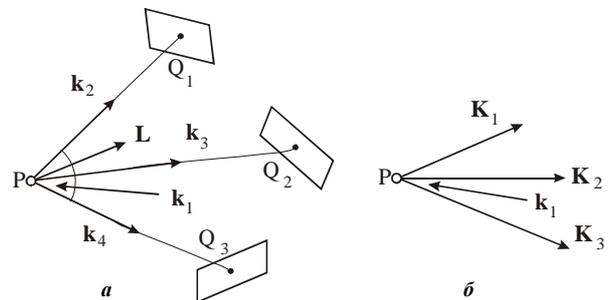


Рисунок 9 – Многоголограммный метод:
а – схема установки;

б – векторы чувствительности для этой схемы

Матричные коэффициенты полностью определяются геометрией голографической системы и длиной световой волны. Вектор, стоящий справа, находят в результате наблюдения интерференционных полос. Систему уравнений (52) можно решить относительно трех ортогональных компонент смещения L_x, L_y, L_z .

Другим подходом к измерению вектора смещения является одноголографический метод [18]. Рассмотрим схему, изображенную на рис. 10. Три независимых измерения фазы можно сделать, наблюдая точку объекта P через три различные точки голограммы Q_1, Q_2, Q_3 . Если измерять $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, ведя счет полос от нулевой полосы, соответствующей несмещенному участку, то применимы все рассуждения и расчеты, сделанные для многоголограммного метода. Однако для одной большой голограммы можно использовать другую методику

ку, которая не требует нахождения нулевой полосы. Если наблюдатель непрерывно перемещает глаз из точки Q_1 в точку Q_2 , фиксируя свой взгляд (через небольшую диафрагму или телескоп) на точке P , то ему будет казаться, что полосы пересекают поле зрения. Число полос N_{1-2} , прошедших через поле зрения, является мерой разности $\delta_1 - \delta_2$, а именно $\delta_1 - \delta_2 = 2\pi N_{1-2}$.

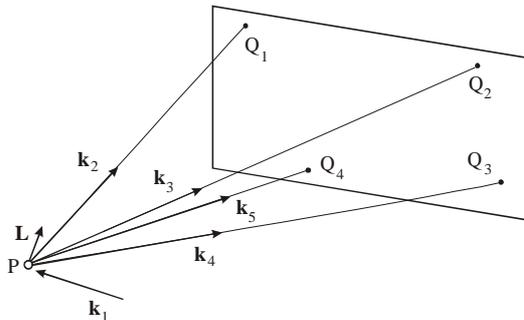


Рисунок 10 – Одноголограммный метод (наблюдение ведется из четырех положений на одной голограмме)

Имея это в виду, уравнение вида (50) можно записать для каждого из четырех направлений наблюдения, показанных на рис. 10,

$$\begin{aligned} \delta_1 &= (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{L}; \quad \delta_2 = (\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{L}; \\ \delta_3 &= (\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{L}; \quad \delta_4 = (\mathbf{k}_5 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{L}. \end{aligned} \quad (54)$$

Попарно вычитая эти уравнения, можно получить

$$\begin{aligned} \delta_1 - \delta_2 &= (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{L} = \bar{\mathbf{K}}_1 \cdot \mathbf{L}; \\ \delta_2 - \delta_3 &= (\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \cdot \mathbf{L} = \bar{\mathbf{K}}_2 \cdot \mathbf{L}; \\ \delta_3 - \delta_4 &= (\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_5) \cdot \mathbf{L} = \bar{\mathbf{K}}_3 \cdot \mathbf{L} \end{aligned}$$

или

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{1x} & \bar{K}_{1y} & \bar{K}_{1z} \\ \bar{K}_{2x} & \bar{K}_{2y} & \bar{K}_{2z} \\ \bar{K}_{3x} & \bar{K}_{3y} & \bar{K}_{3z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = 2\pi \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Хотя приведенная ранее теория измерения вектора смещения достаточно ясна, при ее экспериментальном применении может возникнуть ряд проблем, влияющих на точность измерений. Наиболее очевидный источник ошибок связан с вектором чувствительности. Если общая ориентация смещений известна априори, то можно таким образом расположить голографическую систему, чтобы вектор чувствительности был почти параллелен \mathbf{L} , что позволяет производить точные измерения величины \mathbf{L} . Если направление вектора \mathbf{L} неизвестно, следует использовать более общие схемы, приводящие к уравнениям (52) и (55). Рассмотрим метод одной голограммы. Обычно телесный угол, охватываемый голограммой, невелик, и, следовательно, $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3$ почти параллельны. В результате система уравнений (55) оказывается плохо обусловленной, и малые ошибки в измерении N_{1-2} , N_{2-3} и N_{3-4} усиливаются и приводят к большим ошибкам в величинах L_x, L_y, L_z . Решение будет также чувстви-

тельным к точности геометрических измерений при определении матричных коэффициентов. Для количественного решения этих вопросов справедливы соотношения:

$$\bar{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{L} = 2\pi \mathbf{N}, \quad (56)$$

$$\text{где } \bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{1x} & \bar{K}_{1y} & \bar{K}_{1z} \\ \bar{K}_{2x} & \bar{K}_{2y} & \bar{K}_{2z} \\ \bar{K}_{3x} & \bar{K}_{3y} & \bar{K}_{3z} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_{1-2} \\ N_{2-3} \\ N_{2-4} \end{bmatrix}.$$

Для относительной ошибки можно записать

$$\|\Delta \mathbf{L}\| / \|\mathbf{L}\| \leq \text{cond}(\bar{\mathbf{K}}) (\|\Delta \mathbf{N}\| / \|\mathbf{N}\|), \quad (57)$$

$$\|\Delta \mathbf{L}\| / \|\mathbf{L}\| \leq \text{cond}(\bar{\mathbf{K}}) (\|\Delta \bar{\mathbf{K}}\| / \|\bar{\mathbf{K}}\|). \quad (58)$$

Здесь $\text{cond}(\bar{\mathbf{K}})$ – обусловленность матрицы, $\|\Delta \mathbf{L}\| / \|\mathbf{L}\|$ – относительная погрешность определения перемещений, а $\|\Delta \mathbf{N}\|$, $\|\Delta \bar{\mathbf{K}}\|$ – соответственно ошибка в определении номеров полос и ошибка определения коэффициентов матрицы $\bar{\mathbf{K}}$, обусловленная неточностью геометрических измерений.

Для повышения точности измерений удобно использовать методику, соединяющую в одной измерительной схеме запись голограммы во встречных пучках по схеме Денисюка и фиксацию спекл-фотографии [16, 17]. Для определения компонент перемещений, перпендикулярных плоскости голограммы, используется соотношение

$$u_n = (\lambda N) / 2, \quad (59)$$

где N – номер полосы, u_n – нормальная составляющая вектора перемещения \mathbf{u} , а λ – длина волны лазера.

Для определения перемещений u_τ в плоскости спекл-фотографии используются соотношения (рис. 11)

$$u_\tau = \frac{\lambda a^3}{L^3}, \quad (60)$$

где a^3 – расстояние между полосами на экране, а L^3 – расстояние до экрана.

При этом вектор \mathbf{u}_τ направлен по перпендикуляру к полосам, наблюдаемым на экране при освещении спекл-интерферограммы неразведенным лучом лазера (см. рис. 11).

Рассмотрим природу погрешностей метода голографической и спекл-интерферометрии.

Природа и источники погрешностей: погрешность самой модели; погрешность измерительной схемы; погрешность носителя (шум); погрешность расшифровки; погрешность дальнейшей интерполяции и обработки (вычисление перемещений в промежуточных точках, численное дифференцирование).

Влияние погрешности модели является неуправляемой величиной в ходе эксперимента. Она минимизируется при соблюдении технологии изготовления объекта или его физической модели, а также путем ста-

тистической обработки результатов множества измерений на некоторой выборке исследуемых объектов. Что касается остальных компонент погрешности, то они минимизируются путем разработки новых измерительных схем, методов расшифровки и обработки информации.

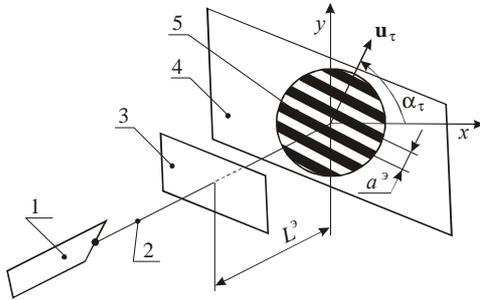


Рисунок 11 – Схема поточечной расшифровки спекл-интерферограмм:

1 – лазер; 2 – неразведенный луч; 3 – спекл-интерферограмма; 4 – экран; 5 – картина полос

Погрешность измерительной схемы в данном случае сводится к минимуму путем использования схемы, соединяющей запись метода голографической интерферограммы и спекл-фотографии на одном носителе одновременно [16, 17]. В этом случае удается избежать погрешностей, обусловленных традиционными технологиями расшифровки (46)–(58). Соотношения (59) и (60), в которых нормальная и тангенциальная составляющие вектора перемещений разделены по способу их получения, а также формально, позволяет исключить взаимовлияние этих компонент, что максимально увеличивает точность измерений. В этом случае погрешности измерений определяются по соотношениям

$$\frac{\|\Delta u_N\|}{\|u_N\|} = \frac{\|\Delta N\|}{\|N\|}, \quad \frac{\|\Delta u_\tau\|}{\|u_\tau\|} = \frac{\|\Delta a\|}{\|a\|}. \quad (61)$$

Соответственно в данном случае относительная погрешность гораздо меньше, поскольку отсутствует влияние $cond(\mathbf{K})$.

Погрешность носителя (регистрирующей среды) уменьшается с применением высококачественных фотопластин ПФГ-03, позволяющих регистрировать с высокой разрешающей способностью интерференционные полосы, что для практических приложений обеспечивает и точность фиксации, и допустимую густоту полос на голограмме.

Вклад указанных выше составляющих погрешности измерений можно уменьшить практически до долей процента. В то же время существенно возрастает значение компонент погрешностей расшифровки, интерполяции и обработки данных, поскольку предполагается автоматизированное выполнение этих операций.

Автоматизация процессов расшифровки и интерполяции результатов экспериментальных исследований. Рассмотрим эти стадии расшифровки интерферограмм. Задача расшифровки может быть сформулирована следующим образом: по заданному множеству полос M_p определить непрерывное поле перемещений u_i ($i = 1, 2, 3$) на части исследуемой поверхности Γ с

минимальной погрешностью. Для решения данной задачи используются полученные выше соотношения (59) и (60). Однако при этом возникают вопросы: идентификации номеров полос N ; идентификации средних линий \tilde{L}_s полос; интерполяции промежуточных значений компонент вектора перемещений на заданной сетке S^\sim ; определение путем интерполирования значений компонент вектора u_i^I перемещений в произвольных точках.

Решение задачи идентификации средних линий интерференционных полос предполагается осуществлять по следующему алгоритму (рис. 12).

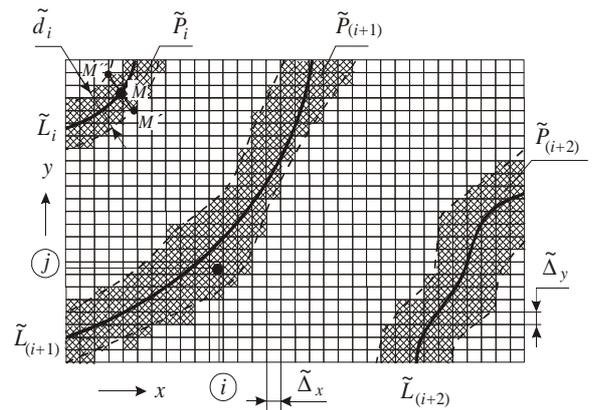


Рисунок 12 – Картина полос \tilde{P}_i , заданных

в системе ячеек $J(i, j)$: $\tilde{\Delta}_x, \tilde{\Delta}_y$ – размеры ячеек, (i, j) – номер ячеек; \tilde{L}_i – средняя линия; \tilde{P}_i – полоса интерферограммы

1. Над полем дискретно заданных (в ячейках $J(i, j) = \{0; 1\}$ на рис. 12) булевых значений, идентифицирующих наличие-отсутствие полосы, совершается операция выделения "средних" линий L_i по правилу: точка $\tilde{M} \in \tilde{L}_k$, если $\frac{abs(dist|MM^r| - dist|MM^n|)}{|MM^n|} < \tilde{\pi}$,

где $\tilde{\pi}$ – некоторый заданный параметр точности; M^r, M^n – точки, образуемые расширением зоны примыкания к текущей внутренней точке M (круг с центром M и нарастающим радиусом) до одновременной встречи с двух сторон с ячейками, в которых $J(i, j) = 0$.

2. Множеству точек $\tilde{M} \in \tilde{L}_q$ присваивается численное значение $q \cdot \lambda / 2$ (начиная с некоторой указанной исследователем полосы с условно "нулевым" номером).

3. При повторном обходе линий \tilde{L}_i проводится операция замыкания средней линии интерференционных полос (рис. 13): если точка M_0 – исходная на некоторой линии, то при обходе за и против часовой стрелки образуется множество текущих точек M_T^R, M_T^L , принадлежащих веткам \tilde{L}^R, \tilde{L}^L ; точки M_T^R, M_0, M_T^L и некоторая внутренняя точка

$M_C \in S_{\Gamma_{int}}, M_C \in S_{\Gamma_{out}}$, где $S_{\Gamma_{int}}, S_{\Gamma_{out}}$ – области, ограниченные внутренним и внешним контурами и образующие при пересечении область между $\Gamma_{int}, \Gamma_{out}$. Луч $M_C M_T$ образует углы $\tilde{\varphi}_L, \tilde{\varphi}_R$; тогда определяются замыкающие точки M_0^R, M_0^L по правилу:

$$\tilde{\varphi}_L(M_T^L) = 2\pi, \tilde{\varphi}_R(M_T^R) = 2\pi. \quad (62)$$

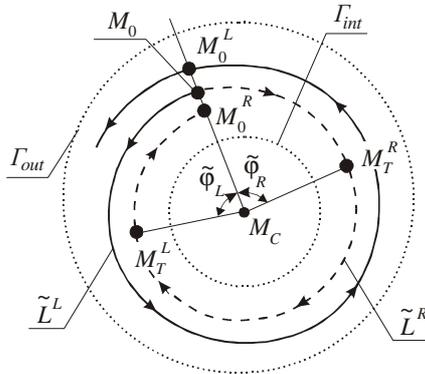


Рисунок 13 – Операция замыкания средней линии интерференционных полос

В связи с тем, что в силу дискретности задания картины полос линии \tilde{L}^R, \tilde{L}^L в общем случае не совпадают, то для выделения единой линии предлагаются следующие способы:

1) строится "коридор" линий:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_D(\tilde{\varphi}) &= \min \left\{ |M_C M_T^L|, |M_C M_T^R| \right\}, \\ \tilde{\rho}_U(\tilde{\varphi}) &= \max \left\{ |M_C M_T^L|, |M_C M_T^R| \right\}; \end{aligned} \quad (63)$$

2) строится непрерывное или дискретно заданное множество $\Omega_{\tilde{L}}$ линий, удовлетворяющих ограничениям

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_D(\tilde{\varphi}) \leq \tilde{\rho}(\tilde{\varphi}) \leq \tilde{\rho}_U(\tilde{\varphi}), \\ \tilde{\rho}(\tilde{\varphi}_0) = |M_C M_0|, \end{aligned} \quad (64)$$

где $\tilde{\rho}(\tilde{\varphi})$ – текущий радиус-вектор точки с началом в точке M_C ;

3) на множестве $\Omega_{\tilde{L}}$ определяется линия \tilde{L}^* , удовлетворяющая некоторому дополнительному условию

$$F_{\tilde{L}}(\tilde{L}) = 0, \quad (65)$$

например, требованию минимальной кривизны линии.

Таким образом, описанный выше подход позволяет произвести идентификацию средних линий полос и попутно присвоить их точкам числовую характеристику, соответствующую перемещению точек полосы с определенным номером.

Задача интерполяции значений перемещений по картине линий уровня может решаться различными способами. Пусть \tilde{P} – некоторая точка (узел сетки S^- , наброшенной на исследуемую область). На рис. 14 приведена схема к двум способам интерполяции значе-

ния компоненты \tilde{w} вектора перемещений в точке \tilde{P} .

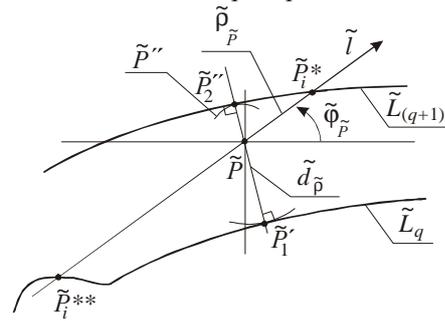


Рисунок 14 – К вопросу интерполяции перемещений в промежуточных точках

1. Полиномиальная интерполяция вдоль сечения. Рассмотрим луч \tilde{l} из точки \tilde{P} , проходящей под углом $\tilde{\varphi}_P$ к горизонтали. Пусть \tilde{P}_i^* – точки встречи луча с полосами, \tilde{P}_i^{**} – точки встречи луча под углом $(\tilde{\varphi}_P + \pi)$. Из условия прохождения некоторым полиномом соответствующей степени через точки $(-\tilde{\rho}_{\tilde{P}_i^{**}}, \tilde{q}(\tilde{P}_i^{**}))$ и $(+\tilde{\rho}_{\tilde{P}_i^*}, \tilde{q}(\tilde{P}_i^*))$ (рис. 15) строится интерполирующий полином \tilde{F} от переменной \tilde{l} , изменяющейся при изменении угла $\tilde{\varphi}$. Значение \tilde{F} при $\tilde{l} = 0$ (обозначим $\tilde{F}_0(\tilde{\varphi}_P)$) интерполирует искомое значение перемещения в точке \tilde{P} . Естественно, что при изменении угла $\tilde{\varphi}$ меняется значение \tilde{F}_0 , и в результате выбранной точке \tilde{P} соответствует множество значений \tilde{w} , являющихся функцией угла $\tilde{\varphi}$ (рис. 16).

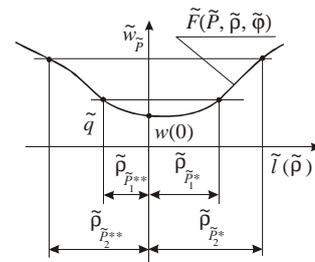


Рисунок 15 – Интерполяция искомой функции вдоль сечений

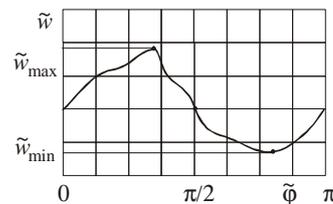


Рисунок 16 – К вопросу зависимости \tilde{w} от угла $\tilde{\varphi}$

Для определения единственного значения \tilde{w} возможны различные подходы. Их можно условно разбить на 2 группы. При использовании локального подхода задача рассматривается изолированно для выбранной точки \tilde{P} , и тогда из функции \tilde{w} по некоторому закону

определяется "средневзвешенное" значение \tilde{w} :

$$\bar{w} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\tilde{w}(\tilde{\varphi}) - \tilde{g}(\tilde{\varphi})] d\tilde{\varphi} \quad (66)$$

или

$$\bar{w} = \frac{1}{2\pi N} \sum_{i=1}^N \tilde{w}(\tilde{\varphi}_i) \cdot \tilde{g}(\tilde{\varphi}_i), \quad (67)$$

где $\tilde{g}(\tilde{\varphi})$ – некоторая заданная весовая функция, подчиняющаяся условиям нормировки

$$\int_0^{2\pi} \tilde{g}(\tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi} = 2\pi \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^N \tilde{g}(\tilde{\varphi}_i) = 2\pi \quad (68)$$

соответственно.

Рассматривая значения \tilde{w} во взаимосвязи с множеством значений \tilde{w} в остальных точках исследуемой области, можно построить некоторый относительно глобальный критерий. Например, можно потребовать от поверхности $\tilde{S}_{\tilde{P}}$, образованной точками \tilde{P} , некоторых свойств гладкости, минимальности кривизны или наименьшего значения некоторой нормы. В частности, представляет интерес для множества практически важных задач критерий минимальности нормы

$$\begin{aligned} \tilde{I} = & \tilde{\alpha} \int_{(\tilde{S}_{\tilde{P}})} [(\tilde{w})^2] d\tilde{S}_{\tilde{P}} + \tilde{\beta} \int_{(\tilde{S}_{\tilde{P}})} \left[\left(\frac{d\tilde{w}}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\tilde{w}}{dy} \right)^2 \right] d\tilde{S}_{\tilde{P}} + \\ & + \tilde{\gamma} \int_{(\tilde{S}_{\tilde{P}})} \left[\left(\frac{d^2\tilde{w}}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2\tilde{w}}{dy^2} \right)^2 \right] d\tilde{S}_{\tilde{P}}, \end{aligned} \quad (69)$$

где $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ – некоторые задаваемые из специфики задач весовые коэффициенты ($\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + \tilde{\gamma} = 1$).

Также оправданно использование в качестве функционала \tilde{I} величины внутренней энергии или другого функционала, выбор структуры которого диктуется спецификой исследуемой конструкции, явления, процесса. В таком случае задача может быть формализована следующим образом:

$$\tilde{w}^\wedge : \tilde{I}(\tilde{w}) \rightarrow \min \text{ на множестве } \tilde{M}_{\tilde{w}}, \quad (70)$$

$$\text{где } \tilde{M}_{\tilde{w}} = \left\{ \tilde{w} : \tilde{w}_{\min}(\tilde{P}) \leq \tilde{w}(\tilde{P}) \leq \tilde{w}_{\max}(\tilde{P}) \right\}. \quad (71)$$

Здесь $\tilde{w}_{\min}(\tilde{P}), \tilde{w}_{\max}(\tilde{P})$ – значения ограничений коридора варьирования искомым перемещений (см. рис. 16).

2. *Полиномиальная интерполяция вдоль радиусов касательных окружностей.* При рассмотрении интерполяции значений $\tilde{w}(\tilde{P})$ (см. рис. 15) некоторые направления выделяются естественным образом. Например, это направления из точки \tilde{P} по кратчайшему расстоянию до линии \tilde{L}_q . При достаточно гладких линиях в локальной окрестности \tilde{P} это множество точек касания окружностей растущего радиуса с центром в точке \tilde{P} (т.е. точки $\tilde{P}'_i, \tilde{P}''_i$ на рис. 14). В данном случае в качестве независимых переменных выступают рас-

стояния $d_{\tilde{P}'_i}, d_{\tilde{P}''_i}$ (рис. 17).

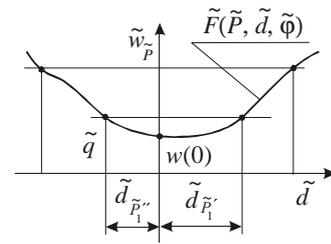


Рисунок 17 – Интерполяция искомой функции вдоль радиус-векторов с началом в точке \tilde{P} и концом на ближайших точках линии

Значение интерполирующего полинома в нуле интерполирует искомую функцию в точке \tilde{P} . Кроме рассмотренных вариантов интерполяции с выбором определенных направлений интерполирования, возможно использование локальной интерполяции искомой функции как функции двух переменных. Действительно, искомую функцию локально можно представить в виде квадратичной формы

$$\tilde{F}_{\tilde{P}}(x, y) = \tilde{\mu}_1 x^2 + \tilde{\mu}_2 y^2 + \tilde{\mu}_3 xy + \tilde{\mu}_4 x + \tilde{\mu}_5 y + \tilde{\mu}_6. \quad (72)$$

Неопределенные коэффициенты $\tilde{\mu}_i$ в выражении (72) могут быть рассчитаны из условий прохождения интерполирующей поверхности через некоторое множество точек. Основной проблемой при этом является обоснованный выбор данного множества точек. Он может быть продиктован или спецификой решаемой задачи, или характером поведения полос в локальной окрестности точки \tilde{P} . Для однозначного определения коэффициентов $\tilde{\mu}_i$ в выражении (72) необходимо минимум 6 значений функции или задание множества точек с количеством, превышающим минимально необходимое, и заданием дополнительного критерия (т.е. применения критерия минимального квадратичного отклонения или иного условия, которое позволяет однозначно определить функцию $\tilde{F}_{\tilde{P}}(x, y)$). Значение $\tilde{F}_{\tilde{P}}(0, 0)$ интерполирует $\tilde{w}(\tilde{P})$. В общем случае нельзя выделить приоритетный способ интерполяции. Наиболее разумным представляется использование различных способов и их комбинаций. При получении значительного разброса значений $\tilde{w}(\tilde{P})$, получаемых при использовании различных методов, необходимо дополнительное исследование поведения функции \tilde{w} в окрестности точки \tilde{P} .

Таким образом, для определения значений \tilde{w} в узлах сетки S^\sim , наброшенной на исследуемую область, можно использовать описанные выше методы. Это дает возможность перехода к интерполяции значений функции w^\wedge в произвольной точке P^\wedge . Прямое определение w^\wedge возможно, но только при использовании так называемого (см. выше) локального подхода. При неизбежном наличии шумов на носителе, погрешностей процессов расшифровки и интерполяции более

предпочтительным путем является использование описанного выше глобального подхода, что требует обязательной первичной интерполяции \tilde{w} на узлах сетки S^{\sim} , последующего "сглаживания" \hat{w} , а затем интерполяции \hat{w} в произвольных точках исследуемой области.

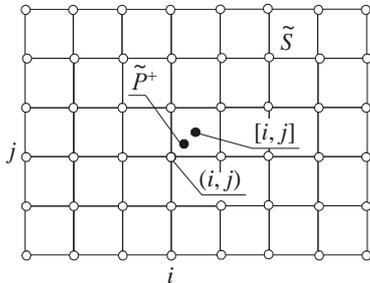


Рисунок 18 – Интерполяция значений функции по узловым значениям функции \hat{w}

Рассмотрим интерполяцию функции \hat{w} по значениям $\hat{w}_{i,j}$ в узлах сетки S^{\sim} с номерами i, j (рис. 18). Пусть \tilde{P}^+ – заданная точка, в которой требуется определение значения \hat{w} . Пусть также $[i, j]$ – принятое обозначение (нумерация) ячейки сетки S^{\sim} (при этом i, j – минимальные номера узлов, образующих ячейку). Обозначая через $\{i, j\}$ "звезду" ячеек с центром в узле (i, j) , можно ввести в рассмотрение локальный базис $\hat{f}(i, j)$. Функции базиса с локальным носителем – "звездой" ячеек $\{i, j\}$. Тогда значение функции в произвольной точке \tilde{P}^+ определяется в виде разложения по базисным функциям

$$\hat{w}(\tilde{P}^+) = \sum_{\hat{s}, \hat{t}=1}^2 [\hat{w}(i + \hat{s} - 1, j + \hat{t} - 1) \cdot \hat{f}(i + \hat{s} - 1, j + \hat{t} - 1)]. \quad (73)$$

В общем случае выражение (73) может быть записано с учетом значений функций и их производных в узлах. В частности, по значениям функций, производных первого порядка и смешанной производной второго порядка строятся интерполяционные полиномы Эрмита [15, 19]:

$$\begin{aligned} \hat{f}_1 &= \hat{\Phi}(i) \cdot \hat{\Phi}(j); & \hat{f}_2 &= \hat{\Phi}(i) \cdot \hat{\Psi}(j); \\ \hat{f}_3 &= \hat{\Psi}(i) \cdot \hat{\Phi}(j); & \hat{f}_4 &= \hat{\Psi}(i) \cdot \hat{\Psi}(j), \end{aligned}$$

где $\hat{\Phi}, \hat{\Psi}$ – функции аргументов с локальным носителем, определяемые по формулам

$$\Phi(\eta) = (|\eta| - 1)^2 (2|\eta| + 1); \quad (74)$$

$$\Psi(\eta) = \eta (|\eta| - 1)^2. \quad (75)$$

Приведенные функции характеризуются следующими свойствами:

$$\Phi_i(x_i) = 1, \Phi_i(x_{i \neq j}) = 0, \Phi_i'(x_i) = 0; \quad (76)$$

$$\Psi_i(x_i) = 0, \Psi_i'(x_{i \neq j}) = 0, \Psi_i'(x_i) = 1; \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(x_i, y_i) &= \frac{\partial \hat{f}_2(x_i, y_i)}{\partial y} = \frac{\partial \hat{f}_3(x_i, y_i)}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial^2 \hat{f}_4(x_i, y_i)}{\partial x \partial y} = 1. \end{aligned} \quad (78)$$

Остальные сочетания функций, производных и их узловых аргументов в выражении (78) дают нулевые значения.

Таким образом, обобщение формулы (73) в виде

$$\hat{w}(\tilde{P}^+) = \sum_{i, j \in \hat{J}_{\tilde{P}^+}} [\hat{w}^{(s)}(i, j) \cdot \hat{f}_s(i, j)], \quad (79)$$

где $\hat{w}^{(1)} = \hat{w}, \hat{w}^{(2)} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial y}, \hat{w}^{(3)} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial x}, \hat{w}^{(4)} = \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x \partial y},$ а

$\hat{J}_{\tilde{P}^+}$ – множество узлов, принадлежащих ячейке, в которую попадает точка \tilde{P}^+ , дает возможность получить локальное полиномиальное представление функции \hat{w} . При этом обеспечиваются условия непрерывности функции и ее производных на границах ячеек.

Таким образом, в данной работе предложены: способ перехода от непрерывного поля интерференционных полос к дискретному полю изолиний, далее – к дискретно заданному множеству значений функций на узлах некоторой сетки и последующий переход к непрерывному полю компонент вектора перемещений, которое описывается интерполяционными полиномами.

Особенностью предложенного подхода является формализация всех этапов экспериментальных исследований. Это позволяет, во-первых, автоматизировать процессы измерений, регистрации, расшифровки и интерполяции результатов. Во-вторых, соотношения (62)–(79) составляют математический аппарат, посредством которого формально расширяется поле действия аппарата математической физики на экспериментальные исследования. Кроме того, предложенный математический аппарат позволяет идентифицировать источники и провести оценки накопленных на разных этапах ошибок.

Основные задачи, возникающие в ходе экспериментальных исследований. В процессе проведения экспериментальных исследований возникают следующие задачи уточнения обобщенных параметров:

- определение адекватности объекта или его модели множеству исследуемых объектов (т.е. соответствие свойств конкретного изделия или группы изделий, на которых проводятся измерения, свойствам, которыми обладают элементы всего множества аналогичных объектов);
- определение соответствия моделируемых величин, законов распределения нагрузки и граничных условий реально действующим;
- определение диапазона нагрузок, позволяющих проверить измерение картины деформирования исследуемого тела с приемлемой точностью (т.е. подбор диапазона нагрузок, в котором интерференционные полосы, во-первых, присутствуют на регистрирующей

среде; во-вторых, их количество позволяет проводить сам процесс расшифровки);

- определение схем измерений, методов расшифровки и интерполяции, которые в конкретном случае дают необходимую точность измерений.

Анализ предложенных подходов позволяет сделать следующие выводы:

1. Разработанные методы получения информации о деформации объекта по результатам экспериментальных исследований элементов сложных механических систем позволяют перейти от графического образа (картины интерференционных полос), т.е. практически непрерывного распределения исследуемых функций, к дискретной системе значений на наперед заданной сетке узлов, а в завершении – к непрерывному заданию данных функций через интерполяционные функции.

2. Предложенная совокупность методов позволяет регулировать точность регистрации измерений, аппроксимаций и вычислений на каждом этапе исследований.

3. На основе разработанных подходов возможна формализация операций сравнения с результатами экспериментальных исследований и приведение информации, с которой производятся различные операции в дальнейшем, к удобному виду.

4. Методы сглаживания полей распределений искомым функций позволяют уменьшить влияние факторов дискретности на всех этапах экспериментальных исследований методом голографической и спекл-интерферометрии (зернистость регистрирующей среды, наложение спекл-структуры на картину интерференционных полос, дискретный характер сетки узловых значений исследуемых функций).

5. Система поэтапной обработки информации позволяет провести автоматизацию процесса исследований и решить основную задачу: определение с достаточной точностью значений искомым функций в заданной точке.

6. Предложенные методы позволяют реализовать идею расширенного параметрического подхода применительно к этапу экспериментальных исследований.

7. Предложены методы уменьшения погрешностей измерений за счет применения технологий измерений, соединяющих голографию и спекл-фотографию.

8. Описанные методы обработки информации в конечном счете позволяют привести ее к форме, которая легко трансформируется к виду, используемому в системах автоматизированного проектирования, исследования и изготовления машиностроительных конструкций.

Численная оценка несоответствия результатов численных и экспериментальных исследований

В работе поставлена задача повышения достоверности численных моделей исследуемых элементов механических систем, в частности, деталей объектов бронетанковой техники. При этом формулируется, в частности, проблема минимизации функционала несоответствия результатов численных и экспериментальных исследований. Основная специфика и сложность по-

становки задачи состоит в том, что, во-первых, сравниваются распределения (поля, процессы, функций многих переменных) и, во-вторых, сравниваются данные, имеющие различную структуру и происхождение. Для корректировки и повышения достоверности численных моделей необходимо решить следующие задачи:

- сформулировать оценочный функционал несоответствия результатов численных и экспериментальных исследований;

- разработать процедуру вычисления функционала через приведения численных и экспериментальных данных к единому формату;

- разработать методы минимизации сформулированного функционала;

- разработать методы устранения вычислительных трудностей при исследовании элементов реальных машиностроительных конструкций, поверхность которых имеет множество отверстий, пазов, фасок, т.е. нарушений "регулярности" геометрической формы.

Мера несоответствия результатов численного и экспериментального исследований. Применение предлагаемого в работе подхода приводит к замене u_R на

u_E при сравнении приближенного и точного решений.

Схематически соотношения искомым полей для реального объекта и его математической модели, а также численного решения задачи и результатов экспериментальных исследований, можно представить в виде точек в пространстве решений u . Предполагаемые соотношения близости различных описаний исследуемого объекта можно трактовать следующим образом:

$$\{\Delta_{RE} \leq \bar{\epsilon}_1; \Delta_{RM} \leq \bar{\epsilon}_2; \Delta_{MN} \leq \bar{\epsilon}_3\} \Rightarrow \{\Delta_{NR} \leq \bar{\epsilon}_4\}, \quad (80)$$

где $\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\epsilon}_3$ – погрешности моделирования и измерений при экспериментальном исследовании, математической модели, дискретизации соответственно, $\bar{\epsilon}_4$ – ограничение на меру несоответствия результатов численных и экспериментальных исследований, Δ_{RE} – погрешность физического моделирования, Δ_{RM} – погрешность математической модели, Δ_{MN} – погрешность перехода к численной модели, а Δ_{EN} – минимизируемая погрешность.

В данном случае предполагается естественным, что все фигурирующие в (80) составляющие представляют собой величины одного порядка малости. При решении реальных задач к величине Δ_{RE} , в частности, предъявляются высокие требования, поскольку речь идет обычно о перемещениях точек исследуемого объекта под нагрузкой на несколько микрометров. В связи с этим в качестве метода экспериментальных исследований **необходимо выбрать метод**, обеспечивающий высокую точность, и, кроме того, обеспечивающий естественное приведение u_E к виду представления u_N .

В этом случае замена в выражениях (25)–(27) u_M на u_E не приводит к значительным вычислительным трудностям и погрешностям.

Введем меру оценки различия результатов численных и экспериментальных исследований:

$$I = I(u_N, u_E). \quad (81)$$

Естественно, при идеальном выборе численной модели, условий эксперимента и теоретической модели явления

$$I \equiv 0. \quad (82)$$

Однако в реальных условиях $I \neq 0$, и задача получения достоверных численных моделей может быть сформулирована как задача определения p_N^* , минимизирующих I :

$$p_N^* = \arg \min I(u_N, u_E, p_N). \quad (83)$$

Ценность решения данной задачи состоит в том, что полученный набор параметров p_N^* может быть использован при численном анализе целого ряда аналогичных конструкций без проведения дорогостоящих экспериментов.

Отдельной задачей является определение конкретного вида функционала I . Это может быть:

- эвклидова норма

$$I_1 = \int_{(s)} (\bar{u}_N - \bar{u}_E)^2 ds, \quad (84)$$

- аналогичная величина для выбранной части поверхности

$$I_2 = \int_{(s^p)} (\bar{u}_N - \bar{u}_E)^2 ds, \quad (85)$$

- аналогичная величина для некоторой линии $l \in S$:

$$I_3 = \int_{(l)} (\bar{u}_N - \bar{u}_E)^2 dl, \quad (86)$$

- аналогичная величина для некоторой точки $p_j \in S$:

$$I_4 = (\bar{u}_N - \bar{u}_E)^2. \quad (87)$$

Величины (84)–(87) могут в некоторой комбинации с весовыми коэффициентами γ образовывать комплексный функционал I^C :

$$I^C = \sum_k \gamma_k \sum_{j,s,t} \gamma_{j,s,t} I_k(S, S_j^p, l_s, p_t). \quad (88)$$

Кроме того, в качестве функционала I может быть принята некоторая энергетическая норма, норма абсолютной разности или любая другая норма, диктуемая спецификой исследуемого объекта и спецификой задачи.

На параметры p_N в общем случае могут быть наложены дополнительные ограничения

$$G(p_N) \geq 0, \quad (89)$$

которые описывают в пространстве данных параметров V_{p_N} некоторую область $V_{p_N}^0$. Тогда исходная задача сводится к проблеме поиска минимума функционала I на множестве $V_{p_N}^0$:

$$p_N^* = \arg \min I(u_N, u_E, p_N), p_N \in V_{p_N}^0. \quad (90)$$

Важно, что подход, описываемый соотношениями (83)–(90), распространяется без ограничений на случай на любые подмножества из множества параметров $V_{p_N} \cup V_{p_E}$.

Численная оценка функционала несоответствия. Одним из важнейших аспектов построения функционала несоответствия результатов численных и экспериментальных исследований является процедура его вычисления. Действительно, при сравнении полей компонент перемещений, заданных на поверхностях в пространстве трех измерений, важно получить численную характеристику, которая отражает две стороны:

- совпадение *качественное*, т.е. степень соответствия закона распределения по пространственным координатам, тенденции изменения во времени или реакция на изменение того или иного параметра;

- совпадение *количественное*, т.е. точность численного моделирования измеряемой экспериментально функции.

Естественно, что в интегральной оценке совмещены оба приведенных требования. Рассмотрим форматы сравниваемых величин. При использовании метода конечных элементов искомые компоненты вектора перемещений формально определяются в любой точке исследуемого тела, в том числе и на поверхности, через базисные функции φ_N^U и узловые значения u_N^U . Таким образом, в рассмотрении находятся следующие данные: описание области Ω^U , занимаемой телом, в виде ансамбля конечных элементов (т.е. при численном исследовании задаются массив координат узлов χ^U , матрица конечных элементов M^U , определяющая узлы, которые образуют различные конечные элементы); узловые параметры u_N^U ; тип представления искомой компоненты вектора перемещений через узловые параметры и базисные функции МКЭ:

$$\bar{u}_N^U(x) = \sum_{E^U} u_N^U(E^U) \varphi_N^U(E^U, x), \quad (91)$$

где E^U – подмножество узлов, образующих элемент, которому принадлежит точка x , а φ_N^U – базисная функция метода конечных элементов.

Результаты экспериментальных исследований методом спекл-голографической интерферометрии имеют следующую структуру данных: сетка S^{\sim} узлов J^{\wedge} , покрывающих исследуемую часть поверхности объема S ; узловые параметры u_E^{\wedge} ; выражение искомой компоненты вектора перемещений в заданной точке x через узловые параметры и интерполяционные функции \hat{f} :

$$\bar{u}_E^{\wedge}(x) = \sum_{j^{\wedge}} u_E^{\wedge}(j) \hat{f}(j, x), \quad (92)$$

где j^{\wedge} – подмножество узлов ячейки, в которую попадает точка x .

Несмотря на кажущуюся эквивалентность структуры выражений (91) и (92), их сопоставление через непосредственное вычисление по приведенным формулам применимо для сравнения данных только в отдельных точках. В то же время непосредственное применение формул (91) и (92) для вычисления функционала несоответствия $I(\bar{u}_N, \bar{u}_E)$ проблематично. Действи-

тельно, основное отличие представлений \bar{u}_N и \bar{u}_E на данном этапе состоит в том, что они определяются через различные дискретные множества (множества конечных элементов и узлов конечных элементов, с одной стороны, и множество ячеек и узлов интерполяции – с другой).

Для устранения возникающих при этом проблем возможны следующие пути:

1. Приведение численных данных, вычисляемых по выражению (91), к узлам J^\wedge сетки S^\sim , используемой при представлении результатов экспериментальных исследований.

2. Приведение экспериментальных данных, вычисляемых по формуле (92), к узлам χ^\cup множества конечных элементов M^\cup (из конечно-элементной модели исследуемого объекта).

3. Приведение численных и экспериментальных результатов к некоторому искусственно созданному дискретному множеству R^* узлов ячеек (элементов) T^* с базисными функциями ξ^* . Тогда

$$\bar{u}_N = \sum_{r^*} \bar{u}_N^\cup(x(r^*)) \cdot \xi^*(r^*, x), \quad (93)$$

$$\bar{u}_E = \sum_{r^*} \bar{u}_E^\wedge(x(r^*)) \cdot \xi^*(r^*, x), \quad (94)$$

где r^* – подмножество узлов, образующих элементарный фрагмент искусственно созданной сетки T^* .

Формально третий путь оказывается наиболее универсальным, поскольку отсутствует привязка к формам представления численных и экспериментальных данных. Тогда с учетом выражений для функционала $I(\bar{u}_N, \bar{u}_E)$, содержащего операции суммирования \sum и (или) интегрирования \int , и выражений (91)–(94), можно записать для некоторых случаев:

$$I(\bar{u}_N - \bar{u}_E) = \left\{ \sum, \int \right\} \left(\sum_{r^*} (\bar{u}_N^\cup - \bar{u}_E^\wedge) \cdot \xi(r^*, x) \right)^2. \quad (95)$$

Учитывая перестановочность операций суммирования и интегрирования, выражение (95) может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} I(\bar{u}_N - \bar{u}_E) &= \\ &= \sum_{r_1^*} \sum_{r_2^*} \left[\bar{u}_N^\cup(r_1^*) - \bar{u}_E^\wedge(r_1^*) \right] \cdot \left[\bar{u}_N^\cup(r_2^*) - \bar{u}_E^\wedge(r_2^*) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ \sum, \int \right\} \cdot \left[\xi(r_1^*, x) \cdot \xi(r_2^*, x) \right] \end{aligned} \quad (96)$$

Введя обозначение

$$\Delta \bar{u}_{NE}^* = \bar{u}_N^\cup(r_1^*) - \bar{u}_E^\wedge(r_1^*), \quad (97)$$

выражение для функционала $I(\bar{u}_N, \bar{u}_E)$ можно записать в виде

$$I(\Delta \bar{u}_{NE}^*) = \sum_{r_1^*} \sum_{r_2^*} \left[\bar{\alpha}^*(r_1^*, r_2^*) \cdot \Delta \bar{u}^*(r_1^*) \cdot \Delta \bar{u}^*(r_2^*) \right] \quad (98)$$

где через $\bar{\alpha}^*(r_1^*, r_2^*)$ обозначен результат применения операции интегрирования (суммирования) в выражении (96):

$$\bar{\alpha}^*(r_1^*, r_2^*) = \left\{ \sum, \int \right\} \cdot \left[\xi(r_1^*, x) \cdot \xi(r_2^*, x) \right]. \quad (99)$$

Таким образом, вычисление функционала $I(\bar{u}_N, \bar{u}_E)$ сводится к определению квадратичной формы (99) с известными коэффициентами.

Указанный способ вычислений формально остается в силе при использовании любого формата представления данных численных и экспериментальных результатов.

Методы минимизации функционала несоответствия результатов численных и экспериментальных исследований. Специфика минимизируемого функционала $I(\Delta \bar{u}_{NE}, \bar{p})$ (здесь \bar{p} – множество варьируемых параметров), состоит в том, что заранее неизвестен характер изменения I по параметрам \bar{p} . Кроме того, сама область варьирования этих параметров может быть задана при помощи достаточно сложной системы трудноформализуемых соотношений. В связи с этим нельзя заранее определить тип возникающей задачи математического программирования [13, 20], а также ни предпочтительный метод минимизации, ни критерий окончания процесса поиска минимума.

Следующим специфическим моментом является то, что для определения значений функционала в различных точках параметрического пространства требуется численное решение задачи определения НДС. В работе [8] приведены методы автоматизации процесса построения параметризованных конечно-элементных моделей исследуемых объектов и описаны методы автоматизации расчетов и анализа результатов исследований в единой базе. Таким образом, большая часть задачи решается в автоматизированном режиме, что существенно ускоряет весь процесс исследований. Особенно это важно при многовариантных исследованиях, когда требуется чрезвычайно большое количество решений задач анализа.

Важным фактором является также тот факт, что в связи с бурным развитием возможностей вычислительной техники время решения задач резко уменьшается, особенно для задач средней размерности. Учитывая эти обстоятельства, можно заключить, что "цена" решения отдельной задачи анализа методом конечных элементов уменьшается. Следовательно, появляется возможность увеличения количества вычислительных циклов,

связанных с определением значения минимизируемого функционала в отдельных точках параметрического пространства.

Отмеченные особенности выдвигают на первый план такие особенности применяемых методов минимизации, как их универсальность, высокую вероятность отыскания минимума функционала I , устойчивость, сходимост и достигаемую точност даже в ущерб вычислительным затратам.

Поскольку на данный момент не существует универсального алгоритма определения минимума функции общего вида многих переменных, а каждый отдельный метод имеет свои преимущества и недостатки, то представляется целесообразным при решении возникающей задачи использовать комбинации различных методов [13, 20].

Предлагается следующий комплексный метод поиска минимума.

Этап 1. Определение подобластей P_p^α области P_p параметрического пространства, в которых вероятность достижения минимума максимальна. Формально, если $I^-(P)$ – минимизируемый функционал, где $P \in P_p = \bigcup_{\beta} P_p^\beta$ (β – номера подобластей, покрывающих без перекрытия $P \in P_p = \bigcup_{\beta} P_p^\beta = \emptyset$ – область

P_p), то множество α и, соответственно, множество P_p^α можно определить следующим образом:

$$P_p^\alpha = \left\{ P_p^\beta : \frac{\left| I^-(P_*^\beta) - \min_{\beta} I^-(P_*^\beta) \right|}{\left| \max_{\beta} I^-(P_*^\beta) - \min_{\beta} I^-(P_*^\beta) \right|} \leq \varepsilon_p^\alpha \right\}, \quad (100)$$

где P_*^β – характерная точка подобласти P_p^β , а ε_p^α – параметр, определяющий ширину коридора для отбора "перспективных" подобластей

Если, например, область P_p представима в виде объединения параллелепипедов в параметрическом пространстве, образованных координатными гиперплоскостями, то в качестве характерных точек можно выбрать центры образуемых таким образом параллелепипедов.

Этап 2. Определенные на 1 этапе множества P_p^α и p_*^α являются исходными точками и областями ограничения параметров при осуществлении некоторых процедур минимизации. В частности, представляется целесообразным рассмотреть комбинации следующих методов минимизации [13, 20].

Метод покоординатного спуска. В данном случае поиск $\min I^-(p)$ осуществляется вдоль координатных направлений p_i , соответствующих отдельным компонентам вектора параметров p . Тогда

$$I^-(p^{(n+1)}) = I^-(p^{(n)} + \tilde{\alpha} p_i) = I^-(\alpha^{\sim}), \quad (101)$$

и для одномерной минимизации задачи $I^-(\tilde{\alpha}^*)$ опре-

деляются из условий

$$\tilde{\alpha}^* : \frac{dI^{\sim}}{d\tilde{\alpha}} = 0, \quad (102)$$

причем $I^-(p^{(n)} + \tilde{\alpha}^* p_i) < I^-(p^{(n)})$. Последовательность шагов по координатам p_i параметрического пространства и циклов этих шагов по соотношениям (101)–(102) приводит в каждой подобласти $P_p^{\alpha_k}$ к локальным минимумам \bar{p}_{α_k} , и в качестве решения задачи можно принять

$$\bar{p}^* = \arg \min_{\alpha_k} I^-(\bar{p}_{\alpha_k}). \quad (103)$$

Важно отметить, что в качестве возможных направлений на границах между циклами покоординатного спуска можно выбирать некоторую взвешенную комбинацию координатных направлений, что может ускорить процесс сходимости в "овражной ситуации", когда ось оврага образует углы одного порядка с несколькими координатными осями.

Метод сопряженных направлений. При применении данного метода используется информация о векторе производных функционала $I^-(p)$ по параметрам [13, 20]

$$p^{(n+1)} = p^{(n)} - \tilde{\alpha}^{(n)} q^{(n)}; \quad (104)$$

$$p^{(n+1)} = p^{(n)} - \tilde{\alpha}^{(n)} q^{(n)}; \quad (105)$$

$$q^{(0)} = (I^{\sim})'; \quad q^{(n)} = (I^{\sim})' - \delta^{(n)} q^{(n-1)}; \quad (106)$$

$$\alpha^{(n)} = \arg \min (I(p^{(n+1)})). \quad (107)$$

Здесь $\delta^{(n)}$ – скаляр или матрица, "корректирующие" степень отклонения вектора изменения параметров на текущем шаге решения от направления антиградиента.

Метод Ньютона. Располагая информацией о матрице вторых производных функционала $I^-(p)$, на каждом шаге текущее решение задачи определения минимума I^{\sim} приводит к многшаговому процессу

$$p^{(n+1)} = p^{(n)} - \left[(I^{\sim})'' \right]^{-1} \cdot (I^{\sim})'. \quad (108)$$

Соотношения (101)–(108) определяют различные способы спуска к минимуму функционала I^{\sim} . Однозначно определить границы областей с преимущественным применением того или иного способа решения исходной задачи в общем случае невозможно, т.к. в принципе характер зависимости $I^-(p)$ может быть самым разнообразным. Для выбора метода необходимо провести решение тестовых задач. Однако при этом нельзя обобщить полученные результаты на все множество решаемых задач, поскольку на практике требуется решение сформулированных задач для различных конструкций, при различных условиях эксплуатации и нагружения и для различных варьируемых параметров.

В результате перспективным является комбини-

рованный пошаговый метод: после задания начального приближения осуществляется последовательность циклов минимизации по соотношениям (101)–(108), причем конечная точка одного цикла является стартовой точкой для следующего цикла. Оценивая текущую эффективность этих циклов по формуле

$$i_n^{\sim} = \left\| \Delta p^{(n)} \right\| / \left\| p^{(n)} \right\| \quad (109)$$

или по аналогичному критерию для оценки скорости сходимости (с учетом необходимого числа операций), можно из набора методов выбирать более эффективный.

"Регуляризация" формы областей с системой отверстий и с другими особенностями геометрии. Элементы многих исследуемых объектов, например, технологической оснастки для оснащения технологических систем предприятий бронетанкостроения Украины, имеют большое количество крепежных и базирующих деталей. Отверстия, пазы, вырезы в данных деталях имеют различные функциональные назначения: закрепление, базирование, центрирование и т.д. При этом часть поверхности S_r^{\sim} детали состоит из регулярного "паркета" элементарных поверхностей:

$$S_r^{\sim} = \bigcup_i S_{e_i}^{\sim} \quad (110)$$

Если S_p^{\sim} – полная исследуемая поверхность элемента механической системы, т.е. поверхность, ограниченная наружным контуром Γ_p^{\sim} (рис. 19), то во многих случаях ее можно представить в виде:

$$S_p^{\sim} = S_r^{\sim} \cup S_d^{\sim} \cup S_a^{\sim} \quad (111)$$

где $S_d^{\sim} = \bigcup_i S_{d_i}^{\sim}$ – воображаемая поверхность, "занятая" вырезами, пазами, а S_a^{\sim} – сплошной участок поверхности S_p^{\sim} .

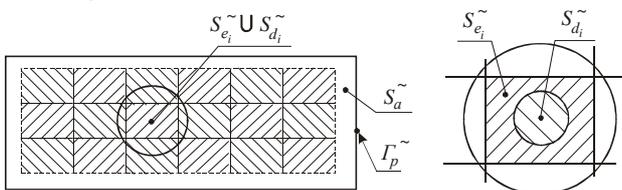


Рисунок 19 – Полная исследуемая поверхность S_p^{\sim}

Оценка погрешности, вносимой в исследуемый объект фиксирующим элементом. На голографической

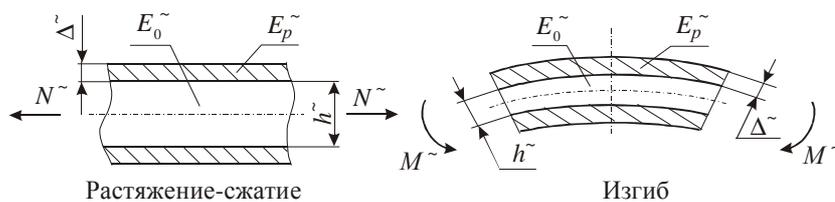


Рисунок 21 – Схема наложения пленки на исследуемый объект

интерферограмме, фиксирующей поле перемещений точек поверхности элемента механических систем, основным информационным носителем являются интерференционные полосы. Естественно, что при расшифровке картины полос в автоматизированном режиме возникает ситуация (рис. 20), когда некоторые подобласти $S_{d_i}^{\sim}$ пересекают несколько интерференционных полос. Следуя формальному правилу принадлежности некоторой точке полосе с определенным номером (например, правило: все выбранные точки (ячейки) принадлежат одной и той же полосе, если из каждой точки (ячейки) в каждую можно попасть вдоль линии, каждая точка которой принадлежит данной полосе), можно получить, что все полосы, проходящие через одну и ту же область выборки материала, имеют один и тот же номер. Искаженная картина может быть исправлена дополнительной процедурой идентификации, причем в некоторых ситуациях необходимо проводить эту операцию вручную.

В то же время достаточно часто при исследовании аналогичных элементов механических систем задачу можно разбить на 2 подзадачи: определение картины НДС в зонах выборки материала и определение общей картины деформирования исследуемого объекта.

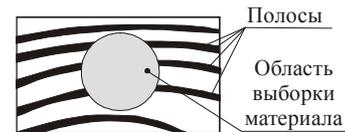


Рисунок 20 – Наложение картин интерференционных полос на подобласти выборки материала

Первая из указанных задач решается для обособленных фрагментов общей картины распределения компонент НДС и сформулированных выше трудностей не содержит. При решении второй задачи возникает проблема избавления от множества особенностей формы. Действительно, более удобной при обработке является картина полос по области S_p^{\sim} без особенностей. Для решения данной задачи необходимо рассмотреть ее физическую и математическую стороны.

Физически область S_p^{\sim} можно получить, покрыв исследуемую поверхность тонкой эластичной пленкой (которая и будет новым фиксирующим слоем), создающую сплошную однородную поверхность и, в то же время, практически не искажает картину напряженно-деформированного состояния в оригинальной детали, получаемую без наложения пленки.

С математической точки зрения важно оценить количественно вносимую погрешность и определить область применимости предложенного метода. На рис. 21 представлена схема наложения пленки на исследуемый объект при растяжении-сжатии и изгибе. Здесь E_o – модуль упругости основного материала, E_p – модуль упругости материала пленки. Жесткость на растяжение и изгиб изменяется в пределах

$$\lambda_1 \sim 1 + \frac{E_p}{E_o} \cdot \frac{2\Delta}{h}; \quad \lambda_2 \sim 1 + \frac{E_p}{E_o} \cdot \frac{\Delta}{h} \cdot 6 \quad (112)$$

соответственно.

Обозначая соотношение модулей в выражениях (112) λ_{E^-} , а отношения толщин – λ_{h^-} , можно записать выражение для относительной погрешности при использовании пленки

$$\varepsilon \sim k \cdot \lambda_{E^-} \cdot \lambda_{h^-}, \quad (113)$$

где k – некоторый ограниченный коэффициент, зависящий от типа напряженно-деформированного состояния в окрестности той или иной выборки материала. Видно, что для уменьшения погрешности измерений необходимо наклеивать относительно тонкую пленку из относительно податливого материала.

Внесение в исследуемую систему дополнительного покрытия формально означает, например, что исходный функционал полной внутренней энергии системы изменится. Так, квадратичная его часть состоит в таком случае из двух слагаемых:

$$a_N(u^-, u^-) = a_o(u^-, u^-) + a_p(u^-, u^-), \quad (114)$$

где составляющие a_o , a_p выражают вклад основного материала и материала пленки.

Тогда с учетом выражения (113)

$$a_N(u^-, u^-) = a_o(u^-, u^-) (1 + 2k), \quad (115)$$

где $k \ll 1$ – среднеинтегральный коэффициент, отражающий специфику НДС исследуемого объекта.

Поскольку в исходной постановке задачи предполагается устойчивость исследуемой задачи к изменению параметров системы, то погрешность, вносимая наклеиваемой индикаторной пленкой, будет того же порядка, что и k в выражении (115).

Кроме требований, предъявляемых к материалу и толщине индикаторной пленки, необходимо соблюдение дополнительных требований, диктуемых особенностями используемого МСГИ.

1. Поскольку при появлении в областях выборки материала зон сжатия или сдвига в тонких пленках могут возникать "выпучины", то во избежание наложения локальных всплесков распределений перемещений необходимо создать в индикаторной пленке предварительное деформированное состояние (например, двухосное растяжение), такое, что в каждой точке $\varepsilon_0 + \varepsilon_E \geq 0$, где ε_0 – предварительная деформация в пленке; ε_E – деформация в процессе нагружения исследуемого объекта эксплуата-

ционными нагрузками.

2. В областях S_{e_i} требуется высокая адгезия индикаторной пленки, поскольку в противном случае в отдельных областях может быть получена существенно искаженная картина напряженно-деформированного состояния исследуемого объекта.

3. Индикаторная пленка должна обеспечивать удовлетворительные светоотражающие качества, т.е. быть достаточно равномерно по всей области, диффузно отражающей поверхностью, что обеспечивает хорошее качество голографических интерферограмм.

Таким образом, индикаторная пленка является своеобразной "маской", устраняющей нерегулярности геометрии поверхности исследуемых объектов, но полностью отражающей в целом характерные свойства их деформированного состояния. Показано, что достаточно тонкая пленка из низко модульного материала, нанесенная на исследуемую поверхность способом, обеспечивающим высокую адгезию с основным материалом с одновременным созданием предварительного растяжения, позволяет получать практически неискаженную картину деформированного состояния исследуемого элемента механической системы.

Формально трактуя выражение (115), которое по структуре соответствует структуре функционала при применении процедуры регуляризации задач математической физики [14], можно говорить о "регуляризации" в том смысле, что в исследуемую систему вносится незначительный дополнительный фиксирующий элемент, позволяющий для корректной задачи устранить некорректность формы границы области.

Таким образом, в результате применения индикаторной пленки образуется новая система, практически совпадающая по жесткостным характеристикам с исследуемым объектом, но при этом позволяющая в автоматизированном режиме интерпретировать картину интерференционных полос.

Предложен также комплекс методов для решения задачи вычисления и минимизации функционала несоответствия результатов численных и экспериментальных исследований. Разработана процедура приведения данных различной природы к универсальному формату. Задание массива данных в виде совокупности параметров, привязанных к узлам создаваемой исследователем сетки, которая покрывает исследуемую область, позволяет распространять на поля различного происхождения операции вычитания, суммирования (интегрирования по областям или подобластям), а также любые другие операции. Этот формат, отделенный от форматов данных эксперимента и численных исследований, можно трактовать как некоторый "экран", на который проецируются два потока информации ("E" и "N"). При этом данный носитель информации по структуре формально независим от структуры носителей "E", "N". Указанные особенности позволяют абстрагироваться от технологии проведения численных и экспериментальных исследований в каждом конкретном случае, а также распространить на задачу минимизации функционала несоответствия результатов численных и экспериментальных исследований классические методы математического программирования. Предложенная технология "зашивания" нерегулярностей геометрической

формы позволяет привести все операции на поверхностях исследуемых объектов к операциям с односвязными областями. Таким образом, предложенные подходы обеспечивают приведение исходной задачи к ряду задач, технология решения которых достаточно отработана.

Заклучение

В работе разработан единый подход к расчетно-экспериментальному исследованию элементов механических систем и, в частности, деталей объектов бронетанковой техники на базе обобщенного параметрического подхода. При этом:

1. Разработанная обобщенная математическая модель для исследования прочностных и жесткостных характеристик элементов механических систем соединяет все этапы от составления систем уравнений до сравнения численных результатов с экспериментальными данными.

2. Задача синтеза расчетных моделей элементов механических систем элементов механических систем получила полную математическую формализацию.

3. Достоверность расчетных моделей элементов технологической оснастки обеспечивается соединением преимуществ метода конечных элементов и метода спектрографической интерферометрии: путем сравнения полей различного происхождения (причем каждый из методов – МКЭ и МСГИ – обладает высокой точностью и широкими возможностями) удается замкнуть цикл расчетно-экспериментальных исследований, получив не только конкретные результаты для конкретной задачи, но также достоверную численную модель.

4. Разработанные методы автоматизированного перевода графического портрета деформирования элементов сложных механических систем в численный формат данных обладают свойствами устойчивости и обеспечения плавности получаемых при расшифровке полей искомых функций.

5. Конкретизация функционала несоответствия результатов численных и экспериментальных исследований, проведенная в работе, позволяет получить численную характеристику при сравнении полей перемещений точек элементов сложных механических систем.

6. Разработка единого формата данных для вычисления функционала несоответствия результатов численных и экспериментальных исследований дает возможность удобного и точного его вычисления.

7. Модифицированные методы минимизации функционала позволяют экономно, с достаточной универсальностью и гарантированностью произвести поиск параметров, обеспечивающих высокое качество расчетных моделей исследуемых объектов.

8. Метод "регуляризации" формы элементов технологической оснастки с большим количеством отверстий, пазов, выборок позволяет формально перейти к сравнению распределения искомых величин в односвязной области.

Таким образом, предложенный в работе подход после формализации основных этапов исследований при помощи соответствующего математического аппарата реализован в виде последовательности конечного числа задач. Для перехода к решению конкретных прикладных задач разработанные методы должны быть реализованы в виде соответствующего программно-аппаратного ком-

плекса. Это составляет направление дальнейших исследований.

Список литературы

1. **Ткачук М.А.** Науковий супровід проектно-технологічних розробок задля забезпечення тактико-технічних характеристик бойових броньованих машин / **М. А. Ткачук, О.В. Литвиненко, А.В. Грабовський** // Перспективи науково-технологічного забезпечення оборонно-промислового комплексу України: Інформаційно-комунікативний захід (Київ, 22-23 вересня 2015 р.). – Київ: ТОВ "Міжнародний виставковий центр", 2015. – С. 61–65.
2. **Чепков И.Б.** Модель обоснования технических решений защитных устройств боевых бронированных машин / **И.Б. Чепков** // Артиллер. и стрелковое вооружение. – 2011. – № 4. – С. 42-46.
3. Основы военно-технических исследований. Теория и приложения: монография: [в 4 т.]. Т. 4. Методология исследования сложных систем военного назначения / **С.В. Лапицкий, А.В. Кучинский, А.И. Сбитнев [и др.]**; ред.: **С.В. Лапицкий**. – Киев: 2013. – 477 с.
4. **Чепков И.Б.** Основні напрями розвитку озброєння і військової техніки. Організаційні і економічні механізми державної підтримки оборонної промисловості / **Чепков И.Б.** // Перспективи науково-технологічного забезпечення оборонно-промислового комплексу України: Інформаційно-комунікативний захід (Київ, 22-23 вересня 2015 р.). – Київ: ТОВ "Міжнародний виставковий центр", 2015. – С. 8–13.
5. **Ткачук М.А.** Залежність динамічних характеристик бронекорпусів від варіюваних параметрів / **Ткачук М.А., Грабовський А.В., Набоков А.В., Мазур І.В., Рикунів О.М.** // Перспективи розвитку озброєння та військової техніки Сухопутних військ. Зб. тез доп. Міжн. наук.-техн. конф. (Львів, 14-15 травня 2015 р.). – Львів: АСВ, 2015. – С. 57–58.
6. **Толстолицкий В.А.** Математическое моделирование и анализ процессов в шасси колесных и гусеничных машин / **В.А. Толстолицкий**; под ред. **Д.О. Волощевича**. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2013. – 171 с.
7. Математическое моделирование процессов возмущенного движения агрегатов и систем бронетанковой техники: Учеб. пособие в 2-х т. – Т.1. / **Е.Е. Александров, Д.О. Волощевич, В.В. Душенко, В.В. Епифанов, Н.В. Кохановский**. – Харьков: НТУ "ХПИ", 2012. – 356 с.
8. **Ткачук Н.А.** Конечно-элементные модели элементов сложных механических систем: технология автоматизированной генерации и параметризованного описания / **Н.А. Ткачук, Г.Д. Грищенко, А.Д. Чепурной, Е.А. Орлов, Н.Н. Ткачук** // Механіка та машинобудування – Харків: НТУ "ХПИ", 2006. – № 1. – С. 57–79.
9. **Лурье А.И.** Теория упругости / **А.И. Лурье**. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
10. **Гловински Р.** Численное исследование вариационных неравенств / **Гловински Р., Лионс Ж.Л., Тремольер Р.** – М.: Мир, 1979. – 574 с.
11. **Марчук Г.И.** Методы вычислительной математики / **Г.И. Марчук**. – М.: Наука, 1980. – 536 с.
12. **Кравчук А.С.** Вариационный метод в контактной задаче теории упругости. В кн.: Упругость и неупругость / **Кравчук А.С., Васильев В.А.** – М.: Наука, 1978. – С.23–31.
13. **Сea Ж.** Оптимизация. Теория и алгоритмы / **Ж. Сea**. – М.: Мир, 1973. – 244 с.
14. **Тихонов А.Н.** Методы решения некорректных задач / **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** – М.: Наука, 1974. – 224 с.
15. **Стренг Э.** Теория метода конечных элементов / **Стренг Э., Фикс Дж.** – М.: Мир, 1977. – 349 с.
16. **Капустин А.А.** Теория спекл-интерферометрических измерений напряженно-деформированного состояния элементов натуральных конструкций. В кн.: Физические основы голографии / **Капустин А.А.** – Л.: ЛИЯФ, 1979. – С.137–159.
17. **Капустин А.А.** Использование методов голографической и спекл-интерферометрии в задачах технической диагностики элементов конструкций. В кн.: Тезисы докл. Вессоюз. научно-технической конференции "Применение лазеров в науке и технике" / **Капустин А.А., Мажура С.О.** – Ленинград, 1981. – С.116–118.
18. **Вест Ч.** Голографическая интерферометрия / **Ч. Вест**. – М.: Мир, 1982. – 504 с.
19. **Чубань М.А.** Аппроксимация поверхности отклика для использования в процессе параметрического синтеза машиностроительных конструкций / **М.А. Чубань** // Вісник НТУ "ХПИ". Серія: Транспортне машинобудування. – Харків: НТУ "ХПИ", 2015. – № 43 (1152). – С. 161–164.

20. Карманов В.Г. Математическое программирование / В.Г. Карманов. – М.: Наука, 1980. – 536 с.

References (transliterated)

1. Tkachuk M.A. Naukovyy suprovod proektno-tehnolohichnykh rozrobok zadlya zabezpechennya taktyko-tehnichnykh kharakterystyk boyoovykh bron'ovanykh mashyn / M.A. Tkachuk, O.V. Lytvynenko, A.V. Hrabovskyy // Perspektivy naukovykh-tehnolohichnoho zabezpechennya oboronno-promyslovoho kompleksu Ukrainy: Informatsiyno-komunikativnyy zakhid (Kyiv, 22-23 veresnya 2015 r.). – Kyiv: TOV "Mizhnarodnyy vystavkovyy tsentr", 2015. – P. 61–65.
2. Chepkov I.B. Model' obosnovaniya tehnicheskikh resheniy zashhit-nykh ustrojstv boevykh bronirovannykh mashin / I.B. Chepkov // Artiller. i strelkovoe vooruzhenie. – 2011. – No 4. – P. 42–46.
3. Osnovy voenno-tehnicheskikh issledovaniy. Teoriya i prilozheniya: monografiya: [v 4 t.]. T. 4. Metodologiya issledovaniya slozhnykh sistem voennogo naznacheniya / S.V. Lapickij, A.V. Kuchinskij, A.I. Sbitnev [i dr.]; red.: S.V. Lapickij. – Kiev: 2013. – 477 p.
4. Chepkov I.B. Osnovni napryamy rozvytku ozbroynennya i viyskovoyi tekhniki. Orhanizatsiyni i ekonomichni mekhanizmy derzhavnoyi pidtrymky oboronnoyi promyslovosti / Chepkov I.B. // Perspektivy naukovykh-tehnolohichnoho zabezpechennya oboronno-promyslovoho kompleksu Ukrainy: Informatsiyno-komunikativnyy zakhid (Kyiv, 22-23 veresnya 2015 r.). – Kyiv: TOV "Mizhnarodnyy vystavkovyy tsentr", 2015. – P. 8–13.
5. Tkachuk M.A. Zalezhnist' dynamichnykh kharakterystyk bronekorpusiv vid varyovanykh parametriv / Tkachuk M.A., Hrabovskyy A.V., Nabokov A.V., Mazur I.V., Rykunov O.M. // Perspektivy rozvytku ozbroynennya ta viyskovoyi tekhniki Sukhoputnykh viysk. Zb. tez dop. Mizhn. nauk.-tehn. konf. (Lviv, 14-15 travnya 2015 r.). – Lviv: ASV, 2015. – P. 57–58.
6. Tolstoluckij V.A. Matematicheskoe modelirovanie i analiz processov v shassi kolesnykh i gusenichnykh mashin / V.A. Tolstoluckij; pod red. D.O. Voloncevicha. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2013. – 171 s.
7. Matematicheskoe modelirovanie processov vozmushhennogo dvizheniya agregatov i sistem bronetankovoyi tekhniki: Ucheb. posobie v 2-h t. – Vol. 1. / E.E. Aleksandrov, D.O. Voloncevich, V.V. Dushhenko, V.V. Epifanov, N.V. Kohanovskij. – Kharkov: NTU "KhPI", 2012. – 356 p.
8. Tkachuk N.A. Konechno-jelementnye modeli jelementov slozhnykh mehanicheskikh sistem: tehnologija avtomatizirovannoy generacii i parametrizovannogo opisanija / N.A. Tkachuk, G.D. Gricenko, A.D. Chepurnoj, E.A. Orlov, N.N. Tkachuk // Mehanika ta mashinobuduvannja – Kharkov: NTU "KhPI", 2006. – No 1. – P. 57–79.
9. Lur'e A.I. Teoriya uprugosti / A.I. Lur'e. – Moscow: Nauka, 1970. – 940 p.
10. Glovinski R. Chislennoe issledovanie variacionnykh nera-venstv / Glovinski R., Lions Zh.L., Tremol'er R. – Moscow: Mir, 1979. – 574 p.
11. Marchuk G.I. Metody vychislitel'noj matematiki / G.I. Marchuk. – Moscow: Nauka, 1980. – 536 p.
12. Kravchuk A.S. Variacionnyj metod v kontaktnoj zadache teorii uprugosti. V kn.: Uprugost' i neuprugost' / Kravchuk A.S., Vasil'ev V.A. – Moscow: Nauka, 1978. – P. 23–31.
13. Sea Zh. Optimizacija. Teoriya i algoritmy / Zh. Sea. – Moscow: Mir, 1973. – 244 p.
14. Tihonov A.N. Metody reshenija nekorrektnykh zadach / Tihonov A.N., Arsenin V.Ja. – Moscow: Nauka, 1974. – 224 p.
15. Streng Je. Teoriya metoda konechnykh jelementov / Streng Je., Fiks Dzh. – Moscow: Mir, 1977. – 349 p.
16. Kapustin A.A. Teoriya spekl-interferometricheskikh izmerenij naprjazhenno-deformirovannogo sostojaniya jelementov naturnykh konstrukcij. V kn.: Fizicheskie osnovy golografii / Kapustin A.A. – Leningrad: LJaF, 1979. – P. 137–159.
17. Kapustin A.A. Ispolzovanie metodov golograficheskoy i spekl-interferometrii v zadachah tehnicheskoy diagnostiki jelementov konstrukcij. V kn.: Tezisy dokl. Vsesojuzn. nauchno-tehnicheskoy konferencii "Primenenie lazerov v nauke i teh-nike" / Kapustin A.A., Mazhura S.O. – Leningrad, 1981. – P. 116–118.
18. Vest Ch. Golograficheskaja interferometrija / Ch. Vest. – Moscow: Mir, 1982. – 504 p.
19. Chuban' M.A. Approksimacija poverhnosti otklika dlja ispol'zovaniya v processe parametricheskogo sinteza mashinostroitel'nykh konstrukcij / M.A. Chuban' // Visnik NTU "KhPI". Serija: Transportne mashinobuduvannja. – Kharkov: NTU "KhPI", 2015. – No 43 (1152). – P. 161–164.
20. Karmanov V.G. Matematicheskoe programmirovaniye / V.G. Karmanov. – Moscow: Nauka, 1980. – 536 p.

Поступила (received) 15.01.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Розробка математичного апарата для розв'язання задач розрахунково-експериментального дослідження елементів механічних систем / Ткачук М.А., Хлань О.В., Шейко О.І., Малакей А.М., Набоков А.В., Грабовський А.В., Танченко А.Ю., Васильєв А.Ю., Ткачук Г.В. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: машинознавство та САПР. – Харків : НТУ "ХПІ", 2017. – № 12 (1234). – С. 110–131. – Бібліогр.: 20 назв. – ISSN 2079-0775.

Разработка математического аппарата для решения задач расчетно-экспериментального исследования элементов механических систем / Ткачук Н.А., Хлань А.В., Шейко А.И., Малакей А.Н., Набоков А.В., Грабовский А.В., Танченко А.Ю., Васильев А.Ю., Ткачук А.В. // Вестник НТУ "ХПИ". Серія: Машиноведение и САПР. – Харьков : НТУ "ХПИ", 2017. – № 12 (1234). – С. 110–131. – Бібліогр.: 20 назв. – ISSN 2079-0775.

Development of mathematical apparatus for tasks solving of calculation and experimental research of mechanical systems elements / Tkachuk N.A., Khlan A.V., Sheiko A.I., Malakey A.N., Nabokov A.V., Grabovsky A.V., Tanchenko A.Yu., Vasiliev A.Yu., Tkachuk A.V. // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Engineering and CAD. – Kharkiv : NTU "KhPI", 2017. – № 12 (1234). – P. 110–131. – Bibliogr.: 20. – ISSN 2079-0775.

Відомості про авторів / About the Authors

Ткачук Микола Анатолійович – доктор технічних наук, професор, НТУ "ХПІ", завідувач кафедри "Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин", тел.: (057)7076902; e-mail: tma@tmm-sapr.org.

Ткачук Николай Анатольевич – доктор технических наук, профессор, НТУ "ХПИ", заведующий кафедрой "Теория и системы автоматизированного проектирования механизмов и машин", тел.: (057) 7076902; e-mail: tma@tmm-sapr.org.

Tkachuk Mykola – Doctor of Technical Sciences, Full Professor, NTU "KhPI", Chief of Theory and Systems of Mechanisms and Machines Automated Design Department; tel.: (057)7076902; e-mail: tma@tmm-sapr.org.

Хлань Олександр Володимирович – генеральний директор ДП "Завод ім. В.О. Малишева", Харків, тел. (057) 707-69-02, tma@tmm-sapr.org.

Хлань Александр Владимирович – генеральный директор ГП "Завод им. В.А. Малышева", Харьков, тел. (057) 707-69-02, tma@tmm-sapr.org.

Khlan Oleksandr – General Director at SE "Malyshev Plant", Kharkov; tel.: (057) 7076902

Шейко Александр Иванович – головний інженер, ДП "Завод ім. В.О. Малишева", Харків, тел. (057) 707-69-02.

Шейко Александр Иванович – главный инженер, ГП "Завод им. В.А. Малышева", Харьков, тел. (057) 707-69-02

Sheyko Oleksandr – chief engineer at SE "Malyshev Plant", Kharkov; tel.: (057) 7076902, tma@tmm-sapr.org.

Малакей Андрій Миколайович – заступник генерального директора з якості ДП "Завод ім. Малишева", Харків; тел. (057) 784-40-08, e-mail: kanc@malyshev.kharkov.ua.

Малакей Андрей Николаевич – заместитель генерального директора по качеству ГП "Завод им. Малышева", Харьков; тел. (057) 784-40-08, e-mail: kanc@malyshev.kharkov.ua.

Malakei Andrii – deputy general director for quality at SE "Malyshev Plant", Kharkov; tel.: (057) 784-40-08, e-mail: kanc@malyshev.kharkov.ua.

Набоков Анатолий Владимирович – НТУ "ХПИ", аспирант кафедры "Теория і системи автоматизованого проектування механізмів і машин", тел.: (057) 7076901.

Набоков Анатолий Владимирович – НТУ "ХПИ", аспирант кафедры "Теория и системы автоматизированного проектирования механизмов и машин"; тел.: (057) 7076901.

Nabokov Anatoliy – National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", post-graduate student of Theory and Systems of Mechanisms and Machines Automated Design Department; tel.: (057) 7076901.

Грабовський Андрій Володимирович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, НТУ "ХПИ", старший науковий співробітник кафедри "Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин"; тел.: (057)7076166; e-mail: andrej8383@gmail.com

Grabovskiy Andrey Vladimirovich – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, НТУ "ХПИ", старший научный сотрудник кафедры "Теория и системы автоматизированного проектирования механизмов и машин"; тел.: (057) 7076166; e-mail: andrej8383@gmail.com

Grabovskiy Andrey – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), NTU "KhPI", Senior Researcher of Theory and Systems of Mechanisms and Machines Automated Design Department, tel.: (057)7076166; e-mail: andrej8383@gmail.com

Танченко Андрій Юрійович – кандидат технічних наук, НТУ "ХПИ", докторант кафедри "Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин", Харків; тел.: (057) 707-69-01; e-mail: ATanchenko@tmm-sapr.org.

Танченко Андрей Юрьевич – кандидат технических наук, НТУ "ХПИ", докторант кафедры "Теория и системы автоматизированного проектирования механизмов и машин", Харьков; тел.: (057) 707-69-01; e-mail: ATanchenko@tmm-sapr.org.

Tanchenko Andrii – Candidate of Technical Sciences (Ph.D.), NTU "KhPI", doctorante of Theory and Systems of Mechanisms and Machines Automated Design Department, Kharkiv; tel.: (057) 707-69-01; e-mail: ATanchenko@tmm-sapr.org.

Васильєв Антон Юрійович – кандидат технічних наук, НТУ "ХПИ", докторант кафедри "Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин", Харків; тел.: (057) 707-69-01; e-mail: AVasiliev@tmm-sapr.org.

Васильев Антон Юрьевич – кандидат технических наук, НТУ "ХПИ", докторант кафедры "Теория и системы автоматизированного проектирования механизмов и машин", Харьков; тел.: (057) 707-69-01; e-mail: AVasiliev@tmm-sapr.org.

Vasiliev Anton – Candidate of Technical Sciences (Ph.D.), NTU "KhPI", doctorante of Theory and Systems of Mechanisms and Machines Automated Design Department, Kharkiv; tel.: (057) 707-69-01; e-mail: AVasiliev@tmm-sapr.org.

Ткачук Ганна Володимирівна – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, НТУ "ХПИ", старший науковий співробітник кафедри "Інформаційні технології і системи колісних і гусеничних машин ім. О.О. Морозова", тел.: (057) 707-63-35.

Ткачук Анна Владимировна – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, НТУ "ХПИ", старший научный сотрудник кафедры "Информационные технологии и системы колесных и гусеничных машин им. А.А. Морозова", тел.: (057) 707-63-35.

Tkachuk Ganna – Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, NTU "KhPI", Senior Researcher at Information Technology and Systems of Wheeled and Tracked Machines behalf of A.A. Morozov Department; tel.: (057) 707-63-35