

УДК 539.3

М.М. ТКАЧУК

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ВИСОКИХ ТЕХНІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАШИН ВІЙСЬКОВОГО ТА ЦИВІЛЬНОГО ПРИЗНАЧЕННЯ НА ОСНОВІ ДОСЛІДЖЕННЯ МІЦНОСТІ СКЛАДНОПРОФІЛЬНИХ ДЕТАЛЕЙ

З метою забезпечення високих тактико-технічних характеристик машин цивільного та військового призначення необхідно підвищувати міцність найбільш навантажених та відповідальних елементів конструкцій, якими є складнопрофільні деталі у процесі інтенсивних контактних навантажень. Для випадку близької форми поверхонь контактуючих тіл стають важливими чинники, які раніше не враховувалися, зокрема, нелінійна контактна жорсткість поверхневих шарів деталей. Відповідно, в умовах непроникнення контактуючих тіл замість традиційних лінійних компонентів з'являються також нелінійні. Для дослідження контактної взаємодії тіл із урахуванням такого типу обмежень необхідно розробити нові підходи, методи та моделі. Ця проблема вирішується у роботі не тільки для задач аналізу, але й синтезу нових геометричних форм складнопрофільних тіл за критеріями міцності. Завдяки цьому можуть бути розв'язані задачі проектних досліджень перспективних гідропередач танкових трансмісій, модифікації форми робочих поверхонь зубчастих передач та тіл кочення у погонах башт і бойових модулів військових машин. У свою чергу це дасть змогу підвищити міцність та довговічність, а також поліпшити загальні технічні і тактико-технічні характеристики машин цивільного та військового призначення.

Ключові слова: тактико-технічна характеристика, міцність, довговічність, напружено-деформований стан, складнопрофільне тіло, контактна жорсткість

С целью обеспечения высоких тактико-технических характеристик машин гражданского и военного назначения необходимо повышать прочность наиболее нагруженных и ответственных элементов конструкций, каковыми являются сложнопрофильные детали в процессе интенсивных контактных нагрузок. Для случая близких по форме поверхностей контактирующих тел становятся важными факторы, которые ранее не учитывались, в частности, нелинейная контактная жесткость поверхностных слоев деталей. Соответственно, в условиях непроникновения контактирующих тел вместо традиционных линейных компонентов появляются также нелинейные. Для исследования контактного взаимодействия тел с учетом такого типа ограничений необходимо разработать новые подходы, методы и модели. Эта проблема решается в работе не только для задач анализа, но и синтеза новых геометрических форм сложнопрофильных тел по критериям прочности. Благодаря этому могут быть решены задачи проектных исследований перспективных гидротрансмиссий танковых трансмиссий, модификации формы рабочих поверхностей зубчатых передач и тел качения в погонах башен и боевых модулей военных машин. В свою очередь это позволит повысить прочность и долговечность, а также улучшить общие технические и тактико-технические характеристики машин гражданского и военного назначения.

Ключевые слова: тактико-техническая характеристика, прочность, долговечность, напряженно-деформированное состояние, сложнопрофильное тело, контактная жесткость

In order to attain high performance characteristics of military and civil purpose machines one needs to increase strength of the most loaded and crucial structural elements, including complex-shaped parts engaged in intense contact interaction. In case of the close surface geometry of the contacting bodies such previously excluded factors as nonlinear contact flexibility of the surface layers gain importance. Accordingly, the nonlinear terms besides the linear components appear in the impenetration conditions. The analysis of contact interaction with account for this type of constraints requires new approach, methods and models. This problem is solved not only in analysis but for the synthesis of new geometrical forms of complex-shaped bodies according to the strength criteria as well. This allows to justify new design solutions of perspective hydraulic drives in tank transmissions, modification of gear teeth surface geometry and rolling components of turret rings in combat vehicles. This in turn will enhance strength and durability as well as general tactical and technical characteristics of military and civil purpose machines.

Keywords: tactical and technical characteristics, strength, durability, stress-strain state, complex-shaped body, contact stiffness

Вступ. Аналіз результатів, отриманих іншими вітчизняними та закордонними вченими

Актуальність проблеми обумовлена тим, що велика кількість машин військового і цивільного призначення містить елементи, що знаходяться в умовах контактної силової і кінематичної сполучення (спряження). З метою зменшення контактної тиску в цих зонах проектувальники прагнуть виконати спряжені поверхні близької форми або такими, що збігаються. Це, наприклад, "бочкування" робочих поверхонь зубців різних зубчастих передач, модифікація поверхонь роликотпідшипників, модифікація бігових доріжок гідропередач танкових трансмісій і погонів танкових башт, профілювання поршнів двигунів внутрішнього згоряння за висотою і в окружному напрямку, їх корундування або дискретне зміцнення тощо. Традиційні методи моделювання контактної взаємодії призводять в таких випадках або до значних похибок в отриманих результатах, або до надмірно громіздких числових моделей.

Ще одним істотним чинником є недостатньо адекватне моделювання умов контактної сполу-

чення на границях тіл. Найчастіше для цього записується, наприклад, умова непроникнення для гладких тіл в лінеаризованому вигляді. Як один з найбільш адекватних варіантів – врахування шорсткості, яка моделюється, наприклад, вінклеровим шаром, що дає дещо уточнені, але також лінеаризовані умови контактної взаємодії, які є умовами сумісності переміщень. У той же час, сам поверхневий шар шорсткості має в загальному випадку нелінійні властивості в залежності "тиск – переміщення". У результаті отримувані залежності контактної жорсткості (податливості) від тиску, швидкостей, температури, режимів і технологій зміцнення тощо, які базуються на мікромеханічних моделях, стають істотно нелійними. Таким чином, у записі умов контактної взаємодії (непроникнення) з'являються нелінійні доданки, зумовлені нелінійністю фізико-механічних характеристик матеріалів поверхневих шарів. Отже, структурна нелінійність задачі доповнюється фізичною, причому друга присутня у співвідношеннях, що відображають суть першої. Для розв'язання таких задач, що містять нелінійні доданки в умовах контактної взаємодії, необ-

© Ткачук М.М., 2017

хідна розробка нових методів і підходів. Більш того, потрібна розробка нових шляхів розв'язання обернених задач, тобто синтезу геометричної форми профілів поверхонь взаємодіючих тіл, які дають можливість управляти (наприклад, мінімізувати) контактним тиском, напруженнями або іншими характеристиками. Ці обставини формують актуальну наукову проблему розробки нових методів аналізу контактної взаємодії елементів машинобудівних конструкцій з урахуванням не тільки структурної, а й додаткової фізичної нелінійності, а також синтезу геометричної форми поверхонь контактуючих тіл за критеріями контактної міцності.

Вирішення всіх перерахованих проблемних питань повною мірою і в завершеному вигляді до теперішнього часу відсутнє. У свою чергу, потреби машинобудування в розробці методів розв'язання даного типу задач переоцінити важко. У результаті склалося протиріччя між потребами машинобудування, з одного боку, і можливостями механіки, – з іншого. Усунення цього протиріччя передбачає вирішення масштабної науково-практичної проблеми, яка полягає в розробці і реалізації методів розв'язання фізично і структурно нелінійних задач визначення напружено-деформованого стану (НДС) задля забезпечення конструкційної міцності складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій. Це особливо важливо із огляду на те, що подібні елементи зазвичай є тими, що в основному визначають технічні і тактико-технічні характеристики машин військового та цивільного призначення.

Теоретичні розробки, описані у роботі, спираються на значний доробок багатьох вітчизняних та зарубіжних вчених [1-10].

Проблема, що вирішується у роботі – формування нових фізично і структурно нелінійних моделей та методів розв'язання задач аналізу контактної взаємодії, синтезу геометричної форми контактуючих складнопрофільних тіл (СПТ) на основі єдиної системи розв'язувальних рівнянь, а також дослідження впливу чинників форми та властивостей матеріалу контактуючих тіл на розподіл контактного тиску та їхній напружено-деформований стан. При забезпеченні міцності складнопрофільних елементів машин фізична та структурна нелінійності поєднуються у рамках однієї моделі, це дасть можливість розв'язувати складні задачі як аналізу контактної взаємодії, так і синтезу геометричної форми контактуючих тіл. Ця наукова проблема тісно пов'язана із практичною проблемою підвищення міцності складнопрофільних елементів військових та цивільних машин за рахунок обґрунтування їхньої раціональної геометричної форми та властивостей поверхневих шарів деталей з підвищенням зносостійкості та довговічності

Механіка контактної взаємодії отримала значний розвиток як в Україні, так і у світі. Роботи Александра, Галіна, Джонсона, Кравчука є класичними із цього напрямку. Зокрема, останнім часом суттєвий розвиток отримали варіаційні постановки контактних задач [1–3]. Вони базуються на методі варіаційних нерівностей, варіаційному принципі

Калькера, методі граничних інтегральних рівнянь тощо. Для розв'язання системи співвідношень застосовуються методи скінченних елементів (МСЕ) та декомпозиції області [4, 5]. При цьому моделюється як контакт гладких пружних тіл [6], так і нелінійно пружних тіл [7]. Зокрема, досліджується характер пружних властивостей у контакті [8–10], у т.ч. – залежність цих властивостей від форми мікронерівностей та фізико-механічних характеристик матеріалів контактуючих тіл.

Таким чином, спостерігається високий рівень розвитку методів та моделей досліджень механіки контактної взаємодії. Разом із тим для розв'язання виникаючих прикладних задач у багатьох випадках існуючі підходи, методи та моделі напряму непридатні. Особливо це стосується випадку контакту шорстких складнопрофільних тіл із близькою геометричною формою контактуючих поверхонь або при модифікації поверхонь при технологічному зміцненні. У цьому випадку лінеаризовані умови непроникнення контактуючих тіл призводять до значних похибок визначення контактного тиску та, відповідно, напружено-деформованого стану контактуючих тіл. Поява ж нелінійних компонент в умовах непроникнення суттєво ускладнює постановку контактної задачі порівняно з традиційними лінійними постановками.

З іншого боку, для практичних потреб сучасного машинобудування, у першу чергу — бронетанкобудування, енергетичного та транспортного машинобудування, важливо володіти підходами, методами та моделями, які надають можливість розв'язувати обернені задачі. Ці задачі полягають у синтезі геометричної форми та способів обробки поверхонь відповідальних контактуючих складнопрофільних деталей, які визначають міцність, навантажувальну здатність, довговічність та енергетичну ефективність машин, вузлів та агрегатів. На цій основі формуються рекомендації щодо обґрунтування проектно-технологічних рішень, які забезпечують підвищення технічних і тактико-технічних характеристик машин військового та цивільного призначення.

Таким чином, створилося протиріччя між потребами промисловості, з одного боку, та можливостями науки — з іншого. Це протиріччя потребує розвитку застосовуваних підходів, методів та моделей. На вирішення саме цих проблем спрямовано дослідження, що започатковані у цій роботі.

Постановка задачі

За напрямом контактної механіки проведено розробку теоретичних основ аналізу контактної взаємодії тіл довільної форми без обмежень та недоліків, властивих традиційним моделям та методам. За проблемою аналізу НДС складнопрофільних тіл із урахуванням контактної взаємодії запропоновано нові варіанти методу граничних елементів. Розв'язано низку задач, зокрема, здійснено аналіз закономірностей розподілу контактного тиску між тілами при варіюванні геометричної форми їхніх поверхонь та властивостей лінійно пружного поверхневого шару, дослідження міцності елементів гідروпередач танкових

трансмисій, стволів танкових гармат, модифікованих зубчастих передач трансмісії бойових броньованих машин. Обґрунтована геометрична форма контактуючих елементів шахтових конвеєрів, вугільних перевантажувачів. Таким чином, розроблені підвалини нового перспективного наукового напрямку, що має пряме прикладне застосування для потреб промисловості, безпеки та обороноздатності України. Вони викладені у роботах [11-19]. Разом із тим певні аспекти здійснених розробок потребують доповнення та вдосконалення, зокрема, стосовно формування фізично і структурно нелінійних (на противагу лінійним) умов контакту, що дають більш адекватну модель контактної взаємодії, а також щодо нових методів розв'язання задач аналізу НДС та синтезу геометричної форми. На цій основі доцільне проведення додаткових досліджень.

Метою роботи є розроблення теоретичних основ дослідження напружено-деформованого стану та забезпечення міцності шляхом створення і застосування у розрахунковій практиці нелінійних моделей поведінки матеріалу поверхневих шарів контактуючих складнопрофільних деталей машин військового і цивільного призначення на основі нових нелінійних моделей та нових методів досліджень.

Для досягнення поставленої мети в роботі передбачено розв'язання таких завдань досліджень.

1. Розробка нових методів і моделей для опису контактної взаємодії складнопрофільних тіл з урахуванням мікромеханічних властивостей поверхневих шарів матеріалів.

2. Розробка нових методів розв'язання обернених задач синтезу геометричної форми поверхонь взаємодіючих тіл за критерієм забезпечення контактної міцності.

3. Розробка методів і числових алгоритмів на основі запропонованих фізично і структурно нелінійних математичних моделей НДС складнопрофільних тіл, проведення аналізу результатів досліджень та встановлення закономірностей розподілу контактного тиску.

4. Установлення закономірностей залежностей характеристик контактної взаємодії тіл від співвідношення їхньої локальної та глобальної жорсткості.

5. Розробка оптимізаційної постановки для задачі синтезу геометричної форми поверхонь складнопрофільних тіл за критеріями міцності.

6. Розв'язання прикладних задач дослідження напружено-деформованого стану та забезпечення конструкційної міцності елементів машин військового та цивільного призначення.

Основні підходи, методи та моделі

Принциповою новизною підходу, що пропонується у роботі, є формування єдиної системи розв'язувальних рівнянь для аналізу контактної взаємодії та синтезу геометричної форми складнопрофільних елементів машин військового та цивільного призначення, причому із побудовою моделей контактної взаємодії, які поєднують фізичну та структурну нелінійність. Це забезпечує більш адекватне (порівняно

із традиційними підходами, методами і моделями) визначення напружено-деформованого стану контактуючих складнопрофільних тіл, а також формування більш достовірних рекомендацій із формування проектно-технологічних рішень, які, у кінцевому підсумку, забезпечують підвищення технічних і тактико-технічних характеристик машин військового та цивільного призначення. Отже, в теоретичному плані створюється поєднання у єдиних співвідношеннях різних типів нелінійностей та розробляються нові методи досліджень контактної взаємодії. У практичному ж аспекті створюється нова, більш досконала методологія забезпечення міцності елементів машин. Таким чином, більш коректне та адекватне теоретичне підґрунтя, що пропонується до розроблення, дає змогу різко підвищити ефективність розв'язання практичних задач. Крім того, важливою відмінною рисою запропонованого у роботі підходу є те, що він зорієнтований на дослідження широкого класу об'єктів, контактна взаємодія та міцність яких не можуть бути досліджені із застосуванням існуючих традиційних підходів, методів та моделей. На додаток слід зазначити, що між етапами теоретичних розробок та прикладних досліджень передбачається створення власних програмних засобів моделювання на основі дискретизації варіаційних постановок із залученням кусочно-лінійних апроксимацій полів розподілу контактного тиску у сполученні складнопрофільних деталей.

Таким чином, запропонований підхід володіє новизною і в теоретичному плані, і з точки зору програмної реалізації, і з огляду на розширений клас об'єктів для прикладного дослідження.

У ході досліджень розроблені нові методи розв'язання систем нелінійних співвідношень для моделювання контактної взаємодії складнопрофільних тіл із нелінійною контактною жорсткістю поверхневого шару. Ці методи реалізовані у вигляді програмного коду, який є засобом досліджень контактної взаємодії складнопрофільних тіл.

Методологія досліджень полягає у поетапному виконанні етапів від формування системи нелінійних розв'язувальних співвідношень, розробки програмного коду і до проведення багатоваріантних комп'ютерних розрахунків із варіюванням низки параметрів (форма контактуючих поверхонь, залежність контактної жорсткості від тиску тощо).

У результаті установлюються закономірності впливу варійованих параметрів на характеристики контактної міцності складнопрофільних тіл, а також рекомендації щодо обґрунтування технічних рішень задля забезпечення міцності деталей військових та цивільних машин.

Особливості структури та складових проведення досліджень. За структурою дослідження містять: теоретичні розробки; програмну реалізацію створення моделей та методів; числові дослідження контактної міцності при варіюванні окремих геометричних параметрів та фізико-механічних властивостей матеріалів тіл; узагальнення результатів досліджень та формування відповідних рекомендацій.

Основними складовими досліджень є створення нових методів розв'язання фізично і структурно нелі-

нійних рівнянь для моделювання контактної взаємодії складнопрофільних тіл; розробка структури та формування програмного коду для аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл; рекомендації щодо обґрунтування технічних рішень при проектуванні конструкцій військових та цивільних машин за критеріями міцності.

У роботі запропоновано удосконалення теорії контактної взаємодії на основі розвитку варіаційних принципів механіки: варіаційних нерівностей для контакту нелінійно пружних тіл та принципу Калькера. При цьому здійснене суттєве доповнення, яке полягатиме у введенні в систему розв'язувальних співвідношень фізичної нелінійності для опису властивостей поверхневих шарів тіл, що контактують. Задля більш адекватного моделювання НДС контактуючих складнопрофільних тіл створено удосконалену модель контактної взаємодії, яка, на відміну від традиційних, містить у складі умов непроникнення нелінійні компоненти, якими зазвичай нехтують. З метою підвищення ефективності проектно-технологічних рішень для виробів, що складаються з деталей складної форми, змінено концепцію формування задач аналізу НДС та синтезу геометричної форми поверхонь контактуючих тіл. Ця зміна полягає у об'єднанні розв'язувальної системи співвідношень вищезгаданих задач аналізу та синтезу спряжених поверхонь тіл у єдину систему. На основі проведених досліджень будуть встановлені закономірності впливу геометричної форми та пружних властивостей поверхневих шарів складнопрофільних тіл на розподіл контактного тиску та компонент НДС в цих тілах. Аналіз та узагальнення результатів проведених досліджень є основою для напрацювання науково обґрунтованих рекомендацій щодо проектно-технологічних рішень для складнопрофільних елементів машин військового та цивільного призначення, що забезпечують їхню міцність і, як наслідок, підвищені технічні і тактико-технічні характеристики цих виробів.

Виклад основних моделей та методів досліджень

У роботі представлені нові методи і моделі аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл з розділяючим їх нелінійно пружним шаром. При цьому, слідуючи роботі [6], можна виділити два випадки: контакт тел неузгодженої і узгодженої форм. У першому випадку початковий зазор між тілами може бути поданий у вигляді квадратичної форми координат (або іншої функції) в площині, дотичній до точки геометричного контакту тіл (у багатьох випадках може бути застосована модель Герца). У другому випадку має місце збіг (конгруентність) поверхонь контактуючих тіл на деякій ділянці поверхні.

У то же час прагнення до поліпшення функціональних властивостей вузлів машин визначає тенденцію проектування деталей з близькими, але не співпадаючими поверхнями. У цьому випадку не застосовні ні модель Герца, ні Штаермана, ні інші моделі [6]. Більш того, не завжди контактуючі

поверхні можуть бути описані аналітично. Таким чином, на додаток до традиційної класифікації, можна ввести третій тип контактуючих складнопрофільних тел. Він характерний тим, що локалізація контакту в номінальному вихідному стані або лінійна, або точкова. При цьому 1) величини зазорів, 2) пружних переміщень, 3) зближень за рахунок обтискання проміжних шарів – співрозмірні. А, значить, незастосовні моделі і методи, що працюють для двох перших випадків за [6]. Цим і визначається досліджуваний у роботі випадок контакту тіл, названих складнопрофільними.

Для розв'язання задачі про контактну взаємодію в одержуваній системі складнопрофільних тіл залучаються 3 підходи. Перший з них заснований на локальному формулюванні задачі про контакт напівнескінчених тел. Він базується на виконанні умов спільності нормальних переміщень точок поверхні взаємодіючих тіл (рис. 1):

$$u_v^{(1)} + u_v^{(2)} \leq h. \quad (1)$$

Тут $u_v^{(1)}, u_v^{(2)}$ – нормальні переміщення точок поверхні тіл 1 і 2 відповідно, а $h = h_1 + h_2$ – зазор у спряженні контактуючих тіл за нормаллю ($v^{(1)} = -v^{(2)}$).

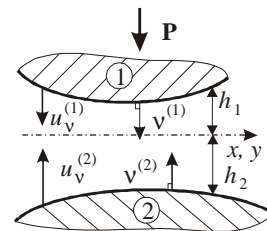


Рисунок 1 – Контактна взаємодія тіл 1 і 2

Подаючи нормальні переміщення точок поверхонь складнопрофільних тіл у вигляді

$$u_v^{(i)} = \delta^{(i)} - w^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

де $\delta^{(i)}$ – зміщення нескінченно віддалених точок тіл 1 і 2, $w^{(i)}$ – розподіл прогинів точок границі напівпростору, викликаний контактним тиском p ,

отримуємо співвідношення, що зв'язує локальне зближення $w = w^{(1)} + w^{(2)}$, загальне зближення тіл $\delta = \delta^{(1)} + \delta^{(2)}$, розподіл зазору h і контактний тиск p (рис. 2):

$$w = \left[\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right] \int_{(S)} \frac{p(\xi, \eta)}{\rho(x, u, \xi, \eta)} d\xi d\eta \leq \delta - h. \quad (3)$$

Це граничне інтегральне рівняння може бути дискретизоване із застосуванням, наприклад, базисних функцій, представлених на рис. 3. Тоді система співвідношень набирає вигляду [21]:

$$\begin{cases} \sum_j C_{i,j} p_j = \delta - h_i, & p_j \geq 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2} c^2 \sum_i p_i = P. \end{cases} \quad (4)$$

Тут C – матриця коефіцієнтів впливу, що визначає переміщення у i -му вузлі сітки дискретизації при дії тиску p_j одиничної величини і з розподілом за базисною функцією, відповідного j -му вузлу (рис. 3), h_i – вузлові зазори.

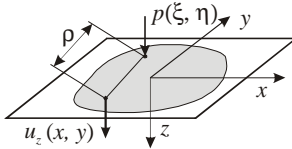
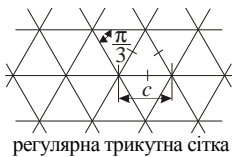
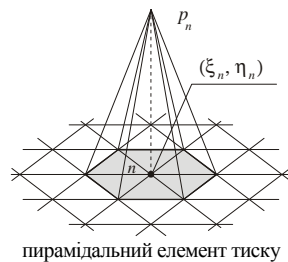


Рисунок 2 – Переміщення точок границі напівпростору під дією нормального зусилля



регулярна трикутна сітка

Рисунок 3 – Пропонована базисна функція



пірамідальний елемент тиску

Якщо між контактуючими тілами знаходиться пружний шар з фізично нелінійними характеристиками

$$w^{(i)} = w^{(i)}(p), i = 3, 4, \quad (5)$$

то у співвідношення (4) увійдуть додаткові складові:

$$\sum_j C_{ij} p_j + w_i^{(3)}(p) + w_i^{(4)}(p) = \delta - h_i. \quad (6)$$

Тут $w_i^{(3)}(p), w_i^{(4)}(p)$ – додаткові прогини за рахунок деформування шарів на поверхнях контактуючих тіл 1 і 2. Це можуть бути, наприклад, шари шорсткості, для яких справедливі співвідношення [20]

$$w = \lambda p^s. \quad (7)$$

Тут λ, p – параметри, які визначаються мікромеханічними характеристиками шорсткості (середня висота виступів шорсткості R_a , фізико-механічні характеристики матеріалу і вид механічної обробки поверхні). Ці параметри можуть бути розраховані на основі статистичних мікромеханічних моделей контакту шорстких тіл або з експериментальних даних [20].

Виходить в загальному випадку нелінійна система рівнянь і нерівностей, відмінною рисою якої є наявність нелінійних доданків в умовах сумісності переміщень. Ця особливість відрізняє створену модель від традиційних [6, 21–23], у яких в лівій частині рівнянь і нерівностей (1) присутні тільки лінійні члени. Структурна нелінійність цих співвідношень, яка обумовлена наявністю умов типу нерівностей, доповнюється також і фізичною. При цьому складові, відповідальні за останню, присутні в співвідношеннях, що описують першу. У результаті отримуємо пов'язані нелінійні умови контактної взаємодії, далі в роботі названі структурно-фізичною нелінійністю.

Таким чином, застосування локальної постановки дало можливість різко розширити коло досліджуваних об'єктів механіки контактної взаємодії за рахунок включення в цей процес, крім гладких тіл [21], і тіл з лінійно-пружним шаром на поверхні [22], також і тіл з нелінійно-пружним проміжним шаром між ними. Важливо, що методологія формування розв'язувальної системи рівнянь залишилася в цілому аналогічною, хоча результат – якісно відмінний. Це дає можливість розглядати випадки контакту гладких тіл і тіл з лінійно-пружним шаром між ними як частинні випадки одержуваних співвідношень.

Постановкою, альтернативною локальній, є варіаційне формулювання контактної задачі. В даному випадку можна розглянути два найбільш перспективних варіанти. Перший варіант впливає з постановок задач про контактну взаємодію пружних тіл на основі теорії варіаційних нерівностей [23–25].

У досліджуваному випадку у ролі такого нелінійного пружного тіла в системі присутній шар, матеріал якого підкоряється закону (7). Перетворивши це співвідношення, контактний тиск p можна надалі трактувати як напруження в тонкому контактному шарі типу вінклерового, а, відповідно, можна змінити підхід теорії варіаційних нерівностей, що зводить вихідну задачу в кінцевому рахунку до мінімізації функціоналу повної внутрішньої енергії досліджуваної системи тіл (включаючи і нелінійний шар):

$$I(u) \rightarrow \min. \quad (8)$$

Тут u – множина розподілів переміщень точок взаємодіючих тіл, в.т.ч і нелінійно-пружного шару.

Застосовуючи до цього функціоналу (8) процедуру дискретизації, наприклад, за методом скінченних елементів, отримуємо у результаті функціонал у вигляді суми квадратичної і лінійної форм, що відповідають за енергію лінійно-пружної частини досліджуваної системи, і нелінійного доданку, відповідного енергії нелінійно-пружного шару:

$$I(u) \approx \frac{1}{2} X^T KX - FX + I^n(X). \quad (9)$$

Процедура лінеаризації отриманого опуклого функціоналу (9) може бути здійснена методами множників Лагранжа [26], штрафу [27], застосуванням інших процедур [25] або шляхом прямої лінеаризації із проекцією на множину обмежень (1). У будь-якому випадку такі відомі методи володіють тим загальним недоліком, що як масив шуканих величин (при застосуванні, наприклад, МСЕ) виступають вузлові переміщення всіх вузлів скінченно-елементної сітки взаємодіючих тіл: і в об'ємі, і на поверхні. Таким чином, при застосуванні ітераційних процедур для розв'язання задачі потрібно оперування з великими масивами вузлових змінних, в той час як в контактних умовах задіяна тільки та частина вузлових переміщень, яка знаходиться в зоні можливого контакту.

Даного недоліку позбавлений підхід, заснований на застосуванні варіаційного принципу Калькера [6]. Він формується щодо шуканого контактного тиску, тобто фізична розмірність задачі знижується на одиницю. У підсумку, розширивши відоме формулювання

принципу Калькера, отримуємо задачу мінімізації функціонала додаткової енергії

$$\begin{aligned} \Phi(p) = & \frac{1}{2} \int_S p(u_{z_1} + u_{z_2}) dS + \\ & + \int_S p(h - \delta) dS + \Phi_n \rightarrow \min \end{aligned} \quad (10)$$

на невід'ємному тиску p . Даний опуклий функціонал складається з суми квадратичної форми тиску і нелінійної частини Φ_n , що відповідає нелінійно-пружному шару. Застосування квадратурних формул [28] переводить задачу (10) до вигляду:

$$Cp + D(p) = \delta - h. \quad (11)$$

Тут C – матриця коефіцієнтів впливу (породжується квадратичною частиною функціоналу), $D(p)$ – компонента, що породжується нелінійною частиною функціоналу, p – масив значень контактної тиску у вузлах квадратурних формул, а δ, h – мають той же сенс, що і у (4).

При застосуванні певного виду квадратурних формул, як це було показано у [21], отримані співвідношення (11) для випадку контакту гладких тіл збігаються із співвідношеннями, отриманими у локальній постановці. У той же час варіаційна постановка дає можливість більш строго обґрунтувати існування, єдиність і збіжність чисельного розв'язку контактної задачі.

З трьох описаних вище підходів як провідний був обраний останній. Це пояснюється тим, що він володіє математичною строгістю, універсальністю і природним переходом до дискретної форми. З іншого боку, порівняно із традиційною скінченно-елементною постановкою різко знижується розмірність масиву шуканих змінних (оскільки як варіювані виступають вузлові значення тиску на сітці, що накинуто тільки на поверхню, а не на весь об'єм, який займає СПТ), і у багатьох випадках це дає можливість підняти оперативність розв'язання задачі аналізу при збереженні точності одержуваних результатів. Така властивість особливо важлива на перших етапах проектних досліджень, коли потрібне проведення великого обсягу різноманітних розрахунків напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл з урахуванням контактної взаємодії.

Метод, заснований на використанні варіаційного принципу Калькера, природно підходить до застосування у випадку контакту напівнескінчених тіл, деформування яких від дії нормального тиску на поверхні мало відрізняється від деформування пружного напівпростору. Одним з обмежень при цьому є вимога значного перевищення габаритів контактуючого тіла над розмірами плями контакту. У той же час при невиконанні цієї вимоги можна адаптувати запропонований метод, замінивши аналітичний розв'язок задачі Бусінеска для напівпростору на функцію Гріна для тіл скінчених розмірів. У дискретному варіанті це означає заміну аналітично обчислюваних компонент матриці коефіцієнтів впливу C на такі, що визна-

чаються чисельно (наприклад, за допомогою МСЕ). При цьому матриця C видозмінюється, проте додаткові операції будуть потрібні тільки на етапі формування системи розв'язувальних рівнянь, не зачіпаючи етапи розв'язання, які формують переважну складову загального обсягу розв'язання задачі.

Отримання розв'язувальних рівнянь типу (11) є тільки початковою частиною поставленої у роботі проблеми. Найважливішим же компонентом є розробка методів розв'язання даної системи співвідношень, принципово відмінністю якої від, наприклад, традиційної системи нелінійних рівнянь, є те, що невідомими є не тільки шукані вузлові змінні, але і склад їх множини, оскільки шуканою є також і область контакту.

Таким чином, застосування традиційних методів розв'язання у даному випадку напряму неприйнятне. З іншого боку, вже існують методи розв'язання подібних задач для гладких тіл і тіл з лінійно-пружними шарами, що продемонстрували працездатність і ефективність [21, 22]. У зв'язку з цим перспективним є розвиток та узагальнення цих методів на досліджуваний випадок.

Зокрема, систему (11) можна подати у вигляді

$$Cp = \delta - [h + D(p)], \quad (12)$$

що дає можливість організувати ітераційний процес уточнення розв'язку, трактуючи останній доданок у (12) як певний додатковий зазор ($s = 0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{cases} p^{(s+1)} = C^{-1}[\delta - \tilde{h}(p^{(s)})]; \\ \tilde{h}(p^{(s)}) = h + D(p^{(s)}). \end{cases} \quad (13)$$

Співвідношення (13) відображають суть методу додаткових зазорів (МДЗ). З іншого боку, систему (11) можна подати у вигляді:

$$[C + \lambda^\wedge(p)]p = \delta - h, \quad (14)$$

де змінна контактна податливість $\lambda^\wedge(p)$ визначається рівністю

$$\lambda^\wedge(p) \cdot p = D(p). \quad (15)$$

Це дає можливість організувати ітераційний процес ($s = 0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{cases} p^{(s+1)} = [C + \lambda^\wedge(p)]^{-1}[\delta - h]; \\ \lambda^\wedge(p) = C + \lambda^\wedge(p^{(s)}). \end{cases} \quad (16)$$

Співвідношення (16) реалізують метод змінних параметрів податливості (МЗПП).

Представлені методи (МДЗ і МЗПП) зводять вихідну структурно-фізично нелінійну задачу до послідовності контактних задач для гладких тіл або тіл з лінійно пружним проміжним шаром між ними. Фізичне трактування цих методів полягає у тому, що розв'язок вихідної задачі збігається з розв'язком задачі для контакту гладких тіл зі спеціально підбраною корекцією профілю поверхні (МДЗ) або з вінклеровим шаром зі спеціально підбраною нерівномірною податливістю (МЗПП).

Крім цих методів, можливе застосування, наприклад, процедур, аналогічних методу Ньютона-Рафсона,

проте доповнених процедурою коригування множини активних обмежень (тобто тих вузлів, у яких виконуються умови контакту).

Також для мінімізації нелінійного функціоналу Калькера на опуклій множині невід'ємного вузлового тиску запропоновано застосовувати релаксаційні методи, що складаються з реалізації алгоритмів для розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь типу методу послідовної верхньої релаксації, доповненого процедурою покрокової проекції поточного наближення розв'язку на обмеження. Запропоновано також нові процедури блокової релаксації з проекцією.

Крім того, були розроблені нові підходи до якісного аналізу і кількісного опису контактної взаємодії складнопрофільних тіл. При цьому відгук картини розподілу контактної тиску на варіювання значущих параметрів, які фігурують у співвідношеннях для опису їх контактної взаємодії, трактується у вигляді двох процесів: зміна форми і розмірів плями контакту, а також зміна форми і розмірів купола розподілу тиску, що спирається на дану область контакту. При цьому можна визначити чутливість зміни контрольованих областей і розподілів на варіювання тих чи інших параметрів. В першу чергу, це дає уявлення про тенденції та інтенсивності зміни розв'язку задач аналізу контактної взаємодії при зміні певних величин. Відповідно, визначається множина параметрів, шляхом варіювання якими в першу чергу доцільно оптимізувати розв'язок задач за тим або іншим критерієм.

В результаті виробляється побудова системи розв'язувальних співвідношень, що описують структурно-фізичну нелінійність в контакті, а також розроблення методів їх вирішення, і, крім того, способів аналізу і оцінки зміни одержуваних рішень при варіюванні вихідних даних. Створені моделі, методи і способи складають теоретичні основи, що лежать в основі наступних досліджень.

Сформульовані фізично-структурно нелінійні співвідношення, а також розроблені методи їх розв'язання, послужили основою для розробки методів розв'язання обернених задач. Зокрема, становить інтерес задача синтезу геометричної форми контактуючих тіл з метою формування заданого розподілу контактної тиску p . В роботі для цього передбачається використовувати ті ж співвідношення (4), (6) і (11), що і для розв'язання задач аналізу.

Дійсно, з формальної точки зору дані співвідношення можна трактувати і як щодо набору шуканих величин (p, δ) при заданих (h, P) , і як навпаки. Таким чином, вдається на єдиній системі співвідношень будувати як розв'язання задач аналізу, так і синтезу.

У той же час пряме задоволення всієї системи сформованих співвідношень не завжди дає прийнятний гладкий розв'язок, у силу чого необхідно звертатися до інших постановок задач синтезу

Слід зазначити, що розглядаючи розподіл зазорів h між контактуючими тілами як формоутворювальну інформацію, її можна також трактувати і як керівну. Керуючи розподілом h , можна впливати на розподіл

контактних зон і контактної тиску в контакті. Однак при цьому виникає проблема апроксимації h з використанням базисних функцій з локальним носієм. У цих випадках спроби локального варіювання зазору призводять, як правило, до негладкої поведінки розв'язку. Це ілюструється, наприклад, варіюванням початкового нульового зазору між плоскими частинами поверхонь контактуючих тіл: тиск у вузлі при такому варіюванні – нульовий в разі зміни зазору "в плюс", номінальний – при відсутності варіювання, різко зростаючий – при зміні зазору "в мінус". Такі "нефізичні" осциляції розподілів p при варіюванні h змушують перейти до альтернативних постановок. Зокрема, в роботі запропоновано проводити варіювання ні h , а p . Навіть якщо варіювати p через вузлові значення в розкладанні функції з локальним негладким носієм, будемо отримувати як реакцію гладку, хоча і нелокальну, зміну зазору h . Таким чином, цей спосіб є кращим (саме завдяки гладкості відгуку) для розв'язання задачі синтезу сприятливого профілю поверхонь контактуючих тіл.

Як критерій при цьому можуть виступати:

$$p_{\max} \rightarrow \min, \sigma \rightarrow \min, w_{\max} \rightarrow \min, \quad (17)$$

де σ – деяка функція компонент напружено-деформованого стану (наприклад, інтенсивність напружень), а w – стискання проміжного шару.

У будь-якому з варіантів отримуємо деяку проблему типу

$$\tau(h(p)) \rightarrow \min, \quad (18)$$

сформульовану, у кінцевому рахунку, "у контактному тиску", а одержувана форма (розподіл h) є "витікаючим" результатом з розв'язку p . Тут τ – деяка функція якості, яка конкретизована з набору (17) або іншим чином визначена, виходячи зі специфіки конкретної розв'язуваної задачі.

Крім методу формування сприятливого вихідного профілю контактуючих тіл, доцільна також і нова постановка задачі про корекцію цього профілю за рахунок додаткового навантаження, яке спеціально підбирається, і, відповідно, зміни початкового зазору внаслідок деформування взаємодіючих тіл. Така постановка викликана тим, що профіль, сприятливий з тієї чи іншої точки зору при одному рівні навантаження, перестає бути таким при його (рівня) зміні. Це – наслідок нелінійності задачі. Крім того, багато конструкцій працюють в умовах високих навантажень, що змінюються, і підібрати загальний сприятливий профіль не завжди уявляється можливим.

В результаті у постановку привноситься додаткове зовнішнє навантаження $F_{\text{кор}}$, і воно визначається за критерієм

$$\tau\{h[p(f, F_{\text{кор}})]\} \rightarrow \min. \quad (19)$$

Таким чином, $F_{\text{кор}} = F_{\text{кор}}(F)$, і різним зовнішнім навантаженням F відповідає різне додаткове навантаження.

Перелічені вище постановки можуть бути узагальнені у двох напрямках. Перший напрямок стосується подвійності системи розв'язувальних рівнянь для аналізу контактної взаємодії (11). Будучи доповнені

інтегральним співвідношенням для вузлових значень контактного тиску $\sqrt{3/2} \cdot c^2 \sum_j p_j = P$, де P – величина зусилля притискання, вони містять:

на зусилля притискання, вони містять:

- фізико-механічні характеристики: "глобальні", що породжуються контактуючими пружними тілами, описуються матрицею коефіцієнтів впливу C , і "локальні", що породжуються нелінійним пружним шаром і описуються оператором D ;
- геометричні характеристики, що відображаються набором вузлових зазорів h ;
- силові характеристики (зусилля притискання P);
- статичні характеристики (розподіл контактного тиску p);
- кинематичні характеристики (зміщення тіла δ).

Пряме формулювання контактної задачі визначає якості заданих масивів $\{h, P\}$, а як шуканих – $\{p, \delta\}$. Формально ці дві постановки рівноправні, і за вихідною системою співвідношень для аналізу контактної взаємодії можна ставити і розв'язувати обернену задачу синтезу геометричної форми, що задовольняє бажаному розподілу контактного тиску.

Другий напрямок полягає у трактуванні всіх вхідних у побудовані розв'язувальні співвідношення не як постійних, а як варіюваних величин і розподілів. Тоді запис цих співвідношень у розгорнутому вигляді –

$$\begin{cases} Cp + D(p) \geq \delta - h; \\ 2P = \sqrt{3} \cdot c^2 \sum_i p_i, \quad p_k \geq 0, \end{cases} \quad (20)$$

і в операторному їх еквіваленті

$$Z(C, D, p, \delta, h, P) \geq 0 \quad (21)$$

дає можливість ставити і розв'язувати низку нових задач:

- 1) визначення чутливості розв'язку задачі аналізу до варіювання властивостей системи, наприклад, C, D, P, h , причому як при малому, так і при значному діапазоні такого варіювання;
- 2) визначення оптимальних значень і розподілів одних величин при варіюванні інших;
- 3) визначення тенденцій зміни розв'язків виникаючих задач при зміні варіюваних величин у певних скінченних діапазонах;
- 4) аналіз впливу стохастичного варіювання параметрів і розподілів, що входять у (21), на параметри і розподіли, що з них одержуються;
- 5) аналіз і виявлення якісних особливостей, що викликаються урахуванням тих чи інших чинників, що вносяться у розрахункову модель досліджуваної системи.

Крім задачі обґрунтування раціональної геометричної форми контактуючих тіл, поставлені і запропоновані підходи до розв'язання задачі корекції умов взаємодії в області контактування тіл шляхом додавання керованого додаткового навантаження. За рахунок дії цього навантаження внаслідок пружної

деформації можливо вплинути на поточну форму профілю контактуючих тіл, а, відповідно, на розподіл зазорів в актуальному стані. Таким чином, створюється механізм "адаптації" умов контактування під рівень навантаження. Це особливо важливо для випадку тіл з частково співпадаючою або близькою формою контактуючих поверхонь, а також при зміні характеру картини визначення контактного тиску з ростом навантаження, наприклад, в разі виходу плями контакту на периферію області можливого контакту. За цих обставин рівень зазорів, реалізованих за рахунок формоутворення поверхонь контактуючих тіл, рівень зміни цих зазорів за рахунок пружної деформації від дії додаткової системи сил, а також рівень переміщень, що викликаються дією сил контактної взаємодії, – всі вони виявляються співмірними. Відповідно, доцільність застосування додаткового керованого навантаження, яке "відслідковує" рівень основного навантаження, зростає порівняно із випадком контакту сильно неузгоджених поверхонь.

З використанням запропонованих постановок розв'язано ряд тестових задач, що продемонструвало, у кінцевому підсумку, можливість і доцільність (а також ефективність) запропонованих методів створення сприятливих профілів поверхонь контактуючих тіл, а також виявлення якісних особливостей і кількісних характеристик зміни розв'язку при випадковому або цілеспрямованому варіюванні властивостей досліджуваної системи взаємодіючих тіл з проміжним нелінійним пружним шаром.

Таким чином, можна зробити наступні висновки.

1. Отримала нове формулювання задача про синтез геометричної форми контактуючих тіл за наявності нелінійно пружного шару між ними на основі єдиної взаємооберненої системи співвідношень для розв'язання задач аналізу та синтезу.
2. Розроблено нові постановки задачі про оптимізацію форми поверхонь контактуючих тіл, сформульовані, на відміну від традиційних, не "у зазорах", а "у контактному тиску". Цим самим вдається уникнути негладкості при розв'язанні поставлених задач.
3. Вперше в загальному вигляді поставлена задача про контактну взаємодію з урахуванням варіювання всіх величин і розподілів, що дає можливість оцінювати тенденції та кількісні характеристики зміни розв'язку при стохастичній, заданій або цілеспрямованій зміні цих величин і розподілів.
4. Запропоновано метод аналізу особливостей при внесенні в систему контактуючих тіл нових елементів або урахуванні нових факторів.
5. Розроблено нову постановку та запропоновано методи розв'язання задачі про корекцію умов контактування за рахунок застосування додаткового керованого навантаження і виникнення у зв'язку з цим додаткових зазорів внаслідок пружних деформацій.

Висновки

Усі одержані результати є науково обґрунтованими та спираються на природні закони та принципи механіки. Створювані моделі базуються на строгих математичних постановках механіки суцільного се-

редовища. Розв'язувальні співвідношення виводяться з загальних варіаційних принципів, які доповнені для нового класу задач. Дискретизація цих співвідношень здійснюватиметься із застосуванням числових методів для рівнянь математичної фізики та теорії апроксимації. Метод розв'язання кінцевих систем співвідношень буде розроблений на основі числових алгоритмів для нелінійних систем рівнянь та нерівностей. Для визначення обґрунтованих проектно-технологічних рішень за критеріями міцності будуть залучені методи опуклого математичного програмування. Сформовані на основі аналізу отриманих результатів рекомендації у ході подальших проектних досліджень впроваджені у нових більш досконалих технічних рішеннях, а весь комплекс теоретичних розробок складає методологічну основу подальших прикладних досліджень.

Список литературы

1. Sysala S. Discretization and numerical realization of contact problems for elastic-perfectly plastic bodies. PART I – discretization, limit analysis / Sysala S. & oth. // ZAMM. – 2015. – Vol. 95. – No. 4. – P. 333–353.
2. Vollebregt E.A.H. 100-fold speed-up of the normal contact problem / E.A.H. Vollebregt // Proceedings of the 9th International CCM WRWS. – China, 2012. – Vol. 96. – P. 201–209.
3. Vollebregt E.A.H. Assessing the accuracy of different simplified frictional rolling contact algorithms / Vollebregt E.A.H. // Vehicle System Dynamics. – 2012. – Vol. 50. – P. 1–17.
4. Popov V. Method of Dimensionality Reduction in Contact Mechanics and Friction / Popov Valentin, Heß Markus. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2016 – 265 p.
5. Дияк І.І. Комбінований алгоритм декомпозиції області та адаптації для розв'язування контактних задач теорії пружності / Дияк І.І. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – Т. 56. – № 4. – С. 96–109.
6. Johnson K.L. Adhesive Contact of Elastic Bodies: The JKR Theory, Encyclopedia of Tribology / K.L. Johnson, J.A. Greenwood. – Publisher Springer US, 2013. – P. 42–49.
7. Мартиняк Р.М. Контакт пружних тіл за наявності нелінійних в'язкопружних поверхневих шарів / Р.М. Мартиняк // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2013. – Т. 56. – № 3. – С. 43–56.
8. Nowell D. Measurement and modelling of interface stiffness in frictional contacts / D. Nowell, D. Mulvihill, H. Brunskill, M. Kartal, R. Dwyer-Joyce // 5th WTC. – 2013. – Iss. 3. – P. 2232–2235.
9. Goltsberg R. A universal model for the load-displacement relation in an elastic coated spherical contact Wear / R. Goltsberg, I. Etsion. – Publisher Elsevier, 2015/1/15. – Vol. 322. – P. 126–132.
10. Scaraggi M. The effect of finite roughness size and bulk thickness on the prediction of rubber friction and contact mechanics / M. Scaraggi, B.N.J. Persson // Proceedings of IME, Part C: JME, 2016/4/21.
11. Tkachuk M. The maximal advance path constraint for the homogenization of materials with random network microstructure / Tkachuk M., Linder C. // Philosophical Magazine. – 2012. – Vol. 92. – Iss. 22. – P. 2779–2808.
12. Tkachuk M.A. Numerical tools for analysis of complex-shaped bodies in mechanical contact / M.A. Tkachuk, N. Skripchenko, A. Grabovskiy, M.M. Tkachuk // Book of Proceedings of the 56th International Conference of Machine Design Departments (ICMD 2015). – P. 393–398.
13. Ткачук Н.Н. Моделирование контактного взаимодействия плоского штампа с полупространством / Ткачук Н.Н., Н.А. Ткачук // КШП. ОМД. – М.: ООО "Тисо Принт", 2012. – №10. – С. 11–17.
14. Чепурной А.Д. Расчетно-экспериментальная идентификация математических и численных моделей элементов сложных механических систем / Чепурной А.Д., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В., Ткачук Н.А. // КШП. ОМД. – М.: ООО "Тисо Принт", 2014. – № 2. – С. 3–9.
15. Ткачук Н.Н. Анализ контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов: модели и разрешающие соотношения. 1. Постановка задачи. 2. Кинематическая модель контакта гладких тел / Ткачук Н.Н., Мовшович И.Я., Ткачук Н.А., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В. // КШП. ОМД. – М.: ООО "Тисо Принт", 2014. – № 3. – С. 3–10.
16. Ткачук Н.Н. Анализ контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов: модели и разрешающие соотношения. 3. Прямой и вариационный методы решения задачи негерцевского нормального контакта гладких тел. 4. Модель контакта шероховатых тел / Н.Н. Ткачук, Мовшович И.Я., Ткачук Н.А., Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В. // КШП. ОМД. – М.: ООО "Тисо Принт", 2014. – № 4. – С. 3–8.
17. Ткачук Н.Н. Многоуровневые модели в задаче анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел: алгоритмы, реализация и анализ применимости / Н.Н. Ткачук, А.Д. Чепурной, Н.Б. Скрипченко, А.В. Литвиненко, Н.А. Ткачук // КШП. ОМД. – М.: ООО "Тисо Принт". – 2014. – №6. – С. 10–16.
18. Ткачук Н.Н. Многоуровневые модели в задаче анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел: алгоритмы, реализация и анализ применимости (продолжение) / Н.Н. Ткачук, А.Д. Чепурной, Н.Б. Скрипченко, А.В. Литвиненко, Н.А. Ткачук // КШП. ОМД. – М.: ООО "Тисо Принт". – 2014. – № 7. – С. 10–20.
19. Ткачук Н.Н. Многоуровневые модели в задаче анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел: алгоритмы, реализация и анализ применимости (окончание) / Н.Н. Ткачук, А.Д. Чепурной, Н.Б. Скрипченко, А.В. Литвиненко, Н.А. Ткачук // КШП. ОМД. – М.: ООО "Тисо Принт". – 2014. – № 8. – С. 6–8.
20. Решетов Д.Н. Точность металлообрабатывающих станков / Решетов Д.Н., Портман В.Т. – М.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
21. Ткачук Н.Н. Анализ контактного взаимодействия сложнопрофильных элементов машиностроительных конструкций с кинематически сопряженными поверхностями: дисс... канд. техн. наук: спец. 05.02.09. – Харьков, 2011. – 203 с.
22. Скрипченко Н.Б. Контактна взаємодія складнопрофільних деталей машинобудівних конструкцій з урахуванням локальної податливості поверхневого шару: автореф. дисс. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.02.09 "Динаміка і прочность машин" / Н.Б. Скрипченко. – Харьков, 2016. – 24 с.
23. Кравчук А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике / А.С. Кравчук. – М.: Изд-во Московской государственной академии приборостроения и информатики, 1997. – 339 с.
24. Гловински Р. Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж.Л. Лионс, Р. Тремольер, перев. с фр. А.С. Кравчука под ред. Б.Е. Победри. – М.: Мир, 1979 – 574 с.
25. Прокопишин И.А. Асимптотический анализ решения теории упругости для трансверсально-изотропного слоя и построение уточненных теорий пластин для контактных задач / Прокопишин И.А., Хлебников Д.Г. // Исследования по теории пластины оболочек. – Казань, 1992. – № 24. – С. 108–113.
26. Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы / Ж. Сеа. – М.: Мир, 1973. – 244 с.
27. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
28. Никольский С. М. Квадратурные формулы / Никольский С. М. – М: Наука, 1974. – 224 с.

Bibliography (transliterated)

1. Sysala S. Discretization and numerical realization of contact problems for elastic-perfectly plastic bodies. PART I – discretization, limit analysis / Sysala S. & oth. // ZAMM. – 2015. – Vol. 95. – No. 4. – P. 333–353.
2. Vollebregt E.A.H. 100-fold speed-up of the normal contact problem / E.A.H. Vollebregt // Proceedings of the 9th International CCM WRWS. – China, 2012. – Vol. 96. – P. 201–209.
3. Vollebregt E.A.H. Assessing the accuracy of different simplified frictional rolling contact algorithms / Vollebregt E.A.H. // Vehicle System Dynamics. – 2012. – Vol. 50. – P. 1–17.
4. Popov V. Method of Dimensionality Reduction in Contact Mechanics and Friction / Popov Valentin, Heß Markus. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2016 – 265 p.
5. Dyyak I.I. Kombinovanyy alhorytm dekompozitsiyi oblasti ta h-adaptatsiyi dlya rozv'yazuvannya kontaktnykh zadach teoryi pruzhnosti / Dyyak I.I. // Mat. metody ta fiz.-mekh. polya. – 2013. – Vol. 56. – No 4. – P. 96–109.
6. Johnson K.L. Adhesive Contact of Elastic Bodies: The JKR Theory, Encyclopedia of Tribology / K.L. Johnson, J.A. Greenwood. – Publisher Springer US, 2013. – P. 42–49.
7. Martynyak R.M. Kontakt pruzhnykh til za nayavnosti nelineynykh vinklerivskykh poverkhnevyykh shariv / R.M. Martynyak // Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polya. – 2013. – Vol. 56. – No 3. – P. 43–56.
8. Nowell D. Measurement and modelling of interface stiffness in

frictional contacts / **D. Nowell, D. Mulvihill, H. Brunskill, M. Kartal, R. Dwyer-Joyce** // 5th WTC. – 2013. – Iss. 3. – P. 2232-2235.

9. **Goltsberg R.** A universal model for the load–displacement relation in an elastic coated spherical contact *Wear* / **R. Goltsberg, I. Etsion**. – Publisher Elsevier, 2015/1/15. – Vol. 322. – P. 126-132.

10. **Scaraggi M.** The effect of finite roughness size and bulk thickness on the prediction of rubber friction and contact mechanics / **M. Scaraggi, B.N.J. Persson** // *Proceedings of IME, Part C: JME*, 2016/4/21.

11. **Tkachuk M.** The maximal advance path constraint for the homogenization of materials with random network microstructure / **Tkachuk M., Linder C.** // *Philosophical Magazine*. – 2012. – Vol. 92. – Iss. 22. – P. 2779-2808.

12. **Tkachuk M.A.** Numerical tools for analysis of complex-shaped bodies in mechanical contact / **M.A. Tkachuk, N. Skripchenko, A. Grabovskiy, M.M. Tkachuk** // *Book of Proceedings of the 56th International Conference of Machine Design Departments (ICMD 2015)*. – P. 393-398.

13. **Tkachuk N.N.** Modelirovanie kontaktnogo vzaimodejstviya ploskogo shtampa s poluprostranstvom / **Tkachuk N.N., N.A. Tkachuk** // *KShP. OMD*. – Moscow: OOO "Tyso Pryn", 2012. – No 10. – P. 11–17.

14. **Chepurnoj A.D.** Raschetno-jeksperimental'naja identifikacija matematicheskikh i chislennykh modelej jelementov slozhnykh mehanicheskikh sistem / **Chepurnoj A.D., Skripchenko N.B., Litvinenko A.V., Tkachuk N.A.** // *KShP. OMD*. – Moscow: OOO "Tiso Print", 2014. – No 2. – P. 3–9.

15. **Tkachuk N.N.** Analiz kontaktnogo vzaimodejstviya gladkih i sherohovatykh tel metodom granichnykh jelementov: modeli i razreshajushhie sootnoshenija. 1. Postanovka zadachi. 2. Kinematicheskaja model' kontakta gladkih tel / **N.N. Tkachuk, Movshovich I.Ja., Tkachuk N.A., Skripchenko N.B., A.V. Litvinenko** // *KShP. OMD*. – Moscow: OOO "Tiso Print", 2014. – No 3. – P. 3–10.

16. **Tkachuk N.N.** Analiz kontaktnogo vzaimodejstviya gladkih i sherohovatykh tel metodom granichnykh jelementov: modeli i razreshajushhie sootnoshenija. 3. Prjamoj i variacijnnyj metody reshenija zadachi negercevsogo normal'nogo kontakta gladkih tel. 4. Model' kontakta sherohovatykh tel / **Tkachuk N.N., Movshovich I.Ja., Tkachuk N.A., Skripchenko N.B., Litvinenko A.V.** // *KShP. OMD*. – Moscow: OOO "Tiso Print", 2014. – No 4. – P. 3–8.

17. **Tkachuk N.N.** Mnogourovnevye modeli v zadache analiza kontaktnogo vzaimodejstviya slozhnoprofil'nykh tel: algoritmy, realizacija i

analiz primenimosti / **N.N. Tkachuk, A.D. Chepurnoj, N.B. Skripchenko, A.V. Litvinenko, N.A. Tkachuk** // *KShP. OMD*. – Moscow: OOO "Tiso Print". – 2014. – No 6. – P. 10–16.

18. **Tkachuk N.N.** Mnogourovnevye modeli v zadache analiza kontaktnogo vzaimodejstviya slozhnoprofil'nykh tel: algoritmy, realizacija i analiz primenimosti (prodolzhenie) / **N.N. Tkachuk, A.D. Chepurnoj, N.B. Skripchenko, A.V. Litvinenko, N.A. Tkachuk** // *KShP. OMD*. – Moscow: OOO "Tiso Print". – 2014. – No 7. – P. 10–20.

19. **Tkachuk N.N.** Mnogourovnevye modeli v zadache analiza kontaktnogo vzaimodejstviya slozhnoprofil'nykh tel: algoritmy, realizacija i analiz primenimosti (okonchanie) / **N.N. Tkachuk, A.D. Chepurnoj, N.B. Skripchenko, A.V. Litvinenko, N.A. Tkachuk** // *KShP. OMD*. – Moscow: OOO "Tiso Print". – 2014. – No 8. – P. 6–8.

20. **Reshetov D.N.** Tochnost' metallorazhushhijh stankov / **Re-shetov D.N., Portman V.T.**. – Moscow: Mashinostroenie, 1986. – 336 p.

21. **Tkachuk N.N.** Analiz kontaktnogo vzaimodejstviya slozhnoprofil'nykh jelementov mashino-stroitel'nykh konstrukcij s kinematicheskimi so-prjazhennymi poverhnostjami: diss... kand. tehn. na-uk: spec. 05.02.09. – Kharkov, 2011. – 203 p.

22. **Skripchenko N.B.** Kontaktna vzaiemodija skladnoprofil'nykh detalei mashynobudivnykh konstruktisii z urakhuvanniam lokalnoi podatlyvosti poverkhnevoho sharu: avtoref. dyss. na zdobuttia nauk. stupenia kand. tekhn. nauk: spets. 05.02.09 "Dynamyka y prochnost mashyn" / **N.B. Skripchenko**. – Kharkov, 2016. – 24 p.

23. **Kravchuk A.S.** Variacijnnye i kva-zivariacijnnye neravenstva v mehanike / **A.S. Kravchuk**. – Moscow: Izd-vo Moskovskoj gosudarstvennoj akademii priborostroe-nija i informatiki, 1997. – 339 p.

24. **Glovinski R.** Chislennoe issledovanie variacijnnykh neravenstv / **R. Glovinski, Zh.L. Lions, R. Tremol'er.**, pe-rev. s fr. **A.S. Kravchuka** pod red. **B.E. Pobedri**. – Moscow: Mir, 1979 – 574 p.

25. **Prokopishin I.A.** Asimptotiche-skij analiz reshenija teorii uprugosti dlja transversal'no-izotropnogo sloja i po-stroenie utochnennykh teorij plastin dlja kontaktnykh zadach / **Prokopishin I.A., Hlebnikov D.G.** // *Issledoavnija po teorii plastini obolochek*. – Kazan', 1992. – No 24. – P.108–113.

26. **Sea Zh.** Optimizacija. Teorija i algoritmy / **Zh. Sea**. – Moscow: Mir, 1973. – 244 p.

27. **Himmel'blau D.** Prikladnoe nelinejnoe programmirovanie / **D. Himmel'blau**. – Moscow: Mir, 1975. – 534 p.

28. **Nikol'skij S. M.** Kvadraturnye formuly / **Nikol'skij S. M.**. – Moscow: Nauka, 1974. – 224 p.

Надійшла (received) 17.10.2016

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Теоретичні основи забезпечення високих технічних характеристик машин військового та цивільного призначення на основі дослідження міцності складнопрофільних деталей / М.М. Ткачук // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: машинознавство та САПР. – Харків: НТУ "ХПІ", 2017. – № 12 (1234). – С. 86-95. – Бібліогр. 28 назв. – ISSN 2079-0775.

Теоретические основы обеспечения высоких технических характеристик машин военного и гражданского назначения на основе исследования прочности сложнопрофильных деталей / Н.Н. Ткачук // Вестник НТУ "ХПИ". Серия: Машиноведение и САПР. – Харьков: НТУ "ХПИ", 2017. – № 12 (1234). – С. 86–95. – Библиогр.: 28 назв. – ISSN 2079-0775.

Theoretical bases of maintenance of high technical characteristics of military and civilian machines on the basis of research of durability of complex profile details / M.M. Tkachuk // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Machines and CAD. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – No 12 (1234). – P. 86–95. – ISSN 2079-0775.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ткачук Микола Миколайович – кандидат технічних наук, НТУ "ХПІ", докторант кафедри "Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин", тел.: (057) 707-69-01; e-mail: mikolei@rambler.ru

Ткачук Николай Николаевич – кандидат технических наук, НТУ "ХПИ", докторант кафедры "Теория и системы автоматизованого проектирования механизмов и машин", тел.: (057) 707-69-01; e-mail: mikolei@rambler.ru

Tkachuk Mykola – Candidate of Technical Sciences (Ph.D.), NTU "KhPI", doctorante of Theory and Systems of Mechanisms and Machines Automated Design Department, tel.: (057) 707-69-01; e-mail: mikolei@rambler.ru