

УДК 539.3

*Н. Б. СКРІПЧЕНКО, М. М. ТКАЧУК, К. Д. НЕДІЛЬКО, Д. В. КИРИЧУК, С. В. БОРИСЕНКО,  
О. І. КАСАЙ*

## КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ СКЛАДНОПРОФІЛЬНИХ ДЕТАЛЕЙ З УРАХУВАННЯМ ЛОКАЛЬНОЇ ПОДАТЛИВОСТІ ПОВЕРХНЕВОГО ШАРУ

Стаття присвячена розробці підходів, методів і моделей для дослідження напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл з урахуванням їхнього контакту по шорстких поверхнях. У роботі розв'язана задача аналізу контактної взаємодії складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій за наявності локальної податливості поверхневого шару. Для цього запропоновано варіант методу граничних рівнянь, в який додана модель пружного проміжного шару за Вінклером. Числова реалізація методу граничних елементів здійснена в спеціалізованому програмно-модельному комплексі. Розв'язано низку прикладних задач аналізу контактної взаємодії, а саме проведено дослідження впливу форми зазору і податливості шорсткого шару на характер розподілів контактної тиску у наступних випадках: контакт прямокутного в плані штампа з округленнями з плоскою поверхнею, спряження підшипника качення з модифікованим дворадіусним роликом, передача зусиль між кульовими поршнями та біговими доріжками в гідрооб'ємній передачі танкової трансмісії. Проведене порівняння отриманих числових результатів досліджень з експериментальними даними.

**Ключові слова:** прикладна теорія пружності, міцність машин, напружено-деформований стан, контактна взаємодія, шорсткість, складнопрофільне тіло, податливість, основа Вінклера, метод граничних інтегральних рівнянь, метод скінченних елементів.

In the present work the contact problem is solved for complex-shaped elements of engineering structures with local compliance of the surface layer. For this purpose a variation to the boundary integral equations method extended with a Winkler-type model of elastic layer is proposed. The resulting approach combines in a unified formulation the "local" and "global" compliance characteristics of the contacting rough bodies. The numerical implementation of the boundary element method is included in a software-and-model complex for analysis of contact interaction of complex-shaped bodies. A number of applied contact problems is solved. Namely, the influence of the gap and rough layer compliance on the contact pressure distribution is studied for the following cases: contact of a rectangular round-end stamp with a flat surface, junction of a rolling bearing and a modified double-radius roller, normal traction between spherical pistons and treadmills of a tank transmission. Numerical results of the research are compared to experimental data. Accuracy and reliability of the proposed methods and models, as well as special-purpose software-and-model complex are confirmed.

**Keywords:** applied theory of elasticity, strength of machines, stress-strain state, contact interaction, roughness, complex-shaped body, compliance, Winkler's foundation, the method of boundary integral equations, the finite element method.

В работе решена задача анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных элементов машиностроительных конструкций при наличии локальной податливости поверхностного слоя. Для этого предложен вариант метода граничных уравнений, в который добавлена модель упругого промежуточного слоя Винклера. Полученный метод исследования контактного взаимодействия объединяет в рамках единых соотношений "локальные" и "глобальные" характеристики податливости контактирующих шероховатых тел. Численная реализация метода граничных элементов осуществлена в специализированном программно-модельном комплексе для исследования контактного взаимодействия сложнопрофильных тел. Решен ряд прикладных задач анализа контактного взаимодействия, а именно проведено исследование влияния формы зазора и податливости шероховатого слоя на характер распределений контактных давлений для следующих случаев: контакт прямоугольного в плане штампа со скруглениями с плоскостью, сопряжение подшипника качения с модифицированным двухрадиусным роликом, передача усилий между шаровыми поршнями и беговыми дорожками в гидрообъемной передаче танковой трансмиссии. Проведено сравнение полученных численных результатов исследований с экспериментальными данными. Подтверждена точность и достоверность предложенных методов и моделей, а также созданного программно-модельного комплекса.

**Ключевые слова:** прикладная теория упругости, прочность машин, напряженно-деформированное состояние, контактное взаимодействие, шероховатость, сложнопрофильных тело, податливость, основание Винклера, метод граничных интегральных уравнений, метод конечных элементов

### Вступ

У більшості машинобудівних конструкцій забезпечення їх функціонування вимагає передачі складних видів руху і значних робочих зусиль за допомогою контакту складнопрофільних деталей (зубчасті зацеплення, підшипники качення, система "колесо-рейка" тощо). У силу цього між контактуючими тілами виникає значний контактний тиск, який у багатьох випадках визначає їхню конструкційну міцність.

Крім того, на жорсткість досліджуваного вузла впливає характер розподілу контактної тиску, обумовлений переміщенням точок взаємодіючих деталей як гладких або шорстких пружних тіл, точністю виготовлення контактуючих деталей та якістю їх обробки, наявністю хвилястості, шорсткості, прокладок, плівок, напилень тощо. Наявність і врахування цих чинників, у свою чергу, тягне за собою, наприклад, забезпечення або незабезпечення точності виконання технологічної або виробничої операції.

Відповідно, при проектуванні елементів машин виникає задача розробки методу визначення напружено-

деформованого стану (НДС) складнопрофільних шорстких тіл з урахуванням контактної взаємодії, який би враховував наявність локальної податливості поверхневого шару спряжених поверхонь деталей. При цьому, властивість локальності для багатьох видів поверхневих шарів з точки зору реакції на контактний тиск таке саме, як для шару шорсткості, відмінність – тільки у величині податливості. У зв'язку з цим доцільно всі типи поверхневих шарів розглядати як шорсткість, а саму величину локальної податливості змінювати в широких межах, тим самим охоплюючи властивості різних шарів.

При розв'язанні задач контактної взаємодії доцільним є урахування розподілу початкового (без навантаження) зазору в спряженні складнопрофільних тіл, що описується многочленом вищого, ніж другий, ступеня (а, значить, і непридатність моделі Герца). Також при дослідженні контакту тіл складної форми виникає необхідність урахування нелокальності зони контакту, що

© Скрипченко Н.Б., Ткачук М.М., Неділько К.Д., Киричук Д.В., Борисенко С.В., Касай О.І., 2016

спричинена сумірністю розміру контактної площадки з площею поверхні взаємодіючих тіл. Крім того, потрібно також прийняти до уваги сумірність переміщень, які викликані пружною деформацією взаємодіючих тіл (викликаних "глобальною" їх податливістю), з одного боку, і викликаних локальною податливістю пружного поверхневого шару, – з іншого.

На теперішній час існує значна кількість методів визначення функцій розподілу контактної тиску в спряженні деталей складної форми. Найчастіше застосовується метод граничних елементів (МГЕ) [1-3] і метод скінченних елементів (МСЕ) [4-5], останній з яких можна трактувати як варіант методу Рітца для прямого розв'язання варіаційних задач, зокрема, теорії пружності. Однак існуючі традиційні методики розв'язання поставлених задач виявляються в даному випадку непридатними через цілу низку обмежень. Ряд важливих чинників або не враховуються в традиційних методиках розв'язання контактних задач, або враховуються за допомогою деяких коефіцієнтів. У свою чергу це може призвести до значних похибок. Таким чином, було поставлено задачу дослідження контактної взаємодії складнопрофільних деталей машинобудівних конструкцій з урахуванням додаткових чинників.

**Постановка задачі**

Для розв'язання даної задачі в роботі за основу прийнятий варіант методу граничних інтегральних рівнянь (МГІР), запропонований в роботі [6]. З одного боку, використання даного методу дозволяє знизити фізичний розмір задачі на одиницю, чим переважає метод скінченних елементів (МСЕ). З іншого боку, він вільний від багатьох обмежень теорії Герца. Відповідно, область його застосовності поширюється на більш широкий клас об'єктів.

Модифікація МГІР для аналізу напружено-деформованого стану з урахуванням контактної взаємодії складнопрофільних гладких і шорстких тіл, які обмежені поверхнями довільної форми, здійснюється в такій послідовності: спочатку формуються рівняння для випадку контакту гладких тіл, а потім вони узагальнюються на випадок шорстких тіл. При цьому для дискретизації граничних інтегральних рівнянь розроблено варіант методу граничних елементів (МГЕ), який враховує шорсткість поверхонь та довільний розподіл початкового зазору між контактуючими тілами.

При дослідженні контакту гладких складнопрофільних тіл аналізуються переміщення точок поверхонь і зазор між ними в нормальному напрямку (рис. 1). Згідно з роботами [7, 8] кінематичні співвідношення контакту записуються (рис. 2):

$$\begin{cases} u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) = \delta_1 + \delta_2, \\ S_1 \text{ і } S_2 - \text{в контакті}; \\ u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) > \delta_1 + \delta_2, \\ S_1 \text{ і } S_2 - \text{поза контактом.} \end{cases} \quad (1)$$

На відміну від традиційних методів знаходження контактної тиску та розмірів контактної площадки за аналітичною моделлю Герца [9,10], у якій зазор між

контактуючими поверхнями має форму параболоїда, у роботі запропоновано використовувати довільний закон розподілу зазору. Зокрема, це важливо для випадків контакту тіл, поверхні яких апроксимуються, наприклад, многочленом не другого, а більш високих ступенів.

Застосовуючи модель пружного напівпростору (рис. 3), переміщення через функцію розподілу тиску  $p(\xi, \eta)$  визначаються залежністю

$$u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) = (\pi E^*)^{-1} \left\{ \iint_S [p(\xi, \eta) / \rho] d\xi d\eta \right\}, \quad (2)$$

де  $E^*$  – зведений модуль пружності двох тіл.

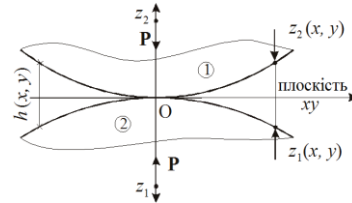


Рис. 1 – Подання локального зазору між контактуючими тілами

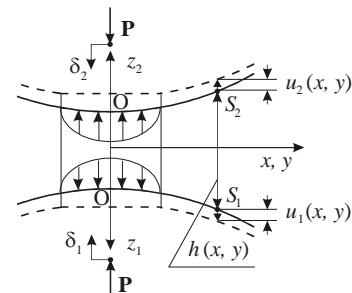


Рис. 2 – Деформація тіл у контакті

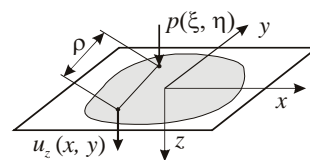


Рис.3 – Переміщення границі напівпростору під дією нормального зусилля

Шукана функція контактної тиску наближається суперпозицією масиву пірамідальних елементарних розподілів, вершини яких розташовані у вузлах регулярної сітки з кроком  $c$ , що складається з рівносторонніх трикутників (рис. 4, 5), і при цьому повністю визначається дискретним набором вузлових значень тиску  $p_n$  ( $n = 1, \dots, N$ ):

$$p(\xi, \eta) \cong \sum_{m=1}^N \hat{p}(\xi - \xi_m, \eta - \eta_m) \cdot p_m; \quad \frac{\sqrt{3}}{2} c^2 \sum_{n=1}^N p_n = P.$$

Використання загальної сітки для пірамідальних елементів тиску і вузлів колокацій дає можливість записати співвідношення МГІР (1) у дискретній формі МГЕ:

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^N C_{nm} p_m + h_n - \delta = 0, \text{ вузол } J_n - \text{в контакті}; \\ \sum_{m=1}^N C_{nm} p_m + h_n - \delta > 0, \text{ вузол } J_n - \text{поза контактом.} \end{cases} \quad (3)$$

Тут заданими є масив зазорів  $h$  і зусилля притиснення  $P$ , а шуканими – контактний тиск  $p_m$  і зближення  $\delta$ .

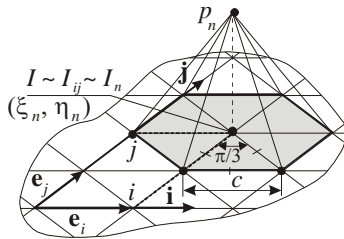


Рис. 4 – Регулярна трикутна сітка та пірамідальний елемент функції тиску

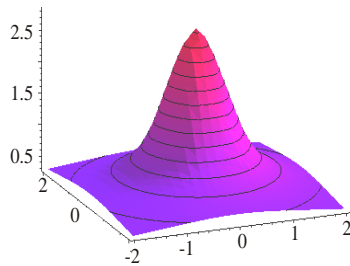


Рис. 5 – Розподіл переміщень точок поверхні напівпростору від дією тиску (див. рис. 4)

Крім того, для розв'язання задачі необхідно задовольнити системі співвідношень (відповідно, умови непроникнення тіл та додатності контактної тиску):

$$\{u - \delta \leq 0, \quad p \geq 0\} \Rightarrow (u - \delta) \cdot p = 0. \quad (4)$$

Розв'язок одержаної визначальної системи рівнянь (3) та нерівностей (4) знаходиться у ході ітераційної процедури. Отже, отримуємо у результаті і зону контакту, і дійсний розподіл контактної тиску.

Особливістю запропонованого методу розв'язання контактних задач є урахування в загальній моделі контактної взаємодії складнопрофільних тіл впливу податливості шорсткого шару. Для цього застосовна у першому наближенні модель пружного шару, жорсткісні властивості якого еквівалентні властивостям шорсткого поверхневого шару.

Досліджуване тіло розглядається як сукупність двох частин:  $\Omega'$  – гладке пружне тіло і  $\Omega^{\wedge}$  – шорсткий шар, що його покриває (рис. 6). При цьому для переміщень  $u_z^{\Sigma}$  точок поверхні  $S^{\wedge}$  існує залежність

$$u_z^{\Sigma} = u'_z + u_z^{\wedge}, \quad (5)$$

де  $u'_z$  – переміщення гладкого тіла, які знаходяться з інтегрального співвідношення (2), а  $u_z^{\wedge}$  – переміщення шорсткого шару.

Для моделювання шорсткого шару застосована модель Вінклера.

$$u_z^{\wedge} = \lambda p, \quad (6)$$

де  $\lambda$  – податливість шару (або сумарно декількох шарів), що залежить від властивостей матеріалу і якості обробки поверхні досліджуваного тіла. Таким чином, система співвідношень для розв'язання контактних задач з урахуванням шорсткого шару має вигляд:

$$\sum_{m=1}^N C_{nm}^{\Sigma} p_m + h_n - \delta = 0, \quad \text{вузол } J_n - \text{в контакті}; \quad (7)$$

$$\sum_{m=1}^N C_{nm}^{\Sigma} p_m + h_n - \delta > 0, \quad \text{вузол } J_n - \text{поза контактом},$$

де коефіцієнти матриці впливу  $C_{nm}^{\Sigma} = C_{nm} + \lambda \delta_{nm}$ .



Рис. 6 – Модель шорсткого складнопрофільного пружного тіла

Отримані співвідношення за структурою аналогічні розв'язувальній системі для гладких тіл, за винятком внесення в матрицю коефіцієнтів впливу додаткових доданків, розташованих на головній її діагоналі. Потрібно відзначити, що представлені співвідношення демонструють, що матриця коефіцієнтів впливу, яка є сумою двох окремих матриць, не може бути в загальному випадку обернена та представлена у вигляді суми двох окремих розв'язків, одержуваних за спрощеними залежностями. Тому, незважаючи на відносну простоту вихідних рівнянь та нерівностей, обернена система співвідношень задовольняється тільки шляхом їх спільного розв'язання, з урахуванням і глобальних, і локальних властивостей податливостей.

Для розв'язання задачі про вплив скінченних розмірів деталей машинобудівних конструкцій на розподіл контактної тиску у роботі проведено аналіз контактної взаємодії близьких параболоїдів з урахуванням скінчених розмірів сполучених тіл. Варійованими параметрами є характерні геометричні розміри спряжених тіл параметри  $\alpha, \beta, \gamma$ , а також величина притисного зусилля – параметр  $f$  (рис. 7):

$$\alpha = R_2 / R_1, \quad \beta = b / R, \quad \gamma = c / R_1, \quad f = F / F_0. \quad (8)$$

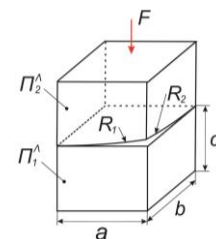


Рис. 7 – Контакт обмежених областей  $\Pi_1^{\wedge}$  та  $\Pi_2^{\wedge}$

Для оцінки впливу варійованих чинників введено параметри  $q = p_{\max} / p_{\max}^H$  ( $p_{\max}$  – розрахункове значення максимального контактної тиску,  $p_{\max}^H$  – відповідний розв'язок для поточної моделі методом Герца), а для оцінки розміру контактних плям –  $\psi = a' / a$  ( $a'$  – дов-

жина напівосі контактної плями).

Отримані залежності, які представлені на рис. 8-10, відображають високий ступінь впливу варійованих чинників (та їх поєднання) на характер розподілу контактної тиску і величину контактних площадок. При цьому проведені дослідження дають змогу створити загальну базу даних, що містить у собі залежності зміни контактних площ та максимального контактної тиску не тільки від одного з параметрів, але і від їх комбінації.

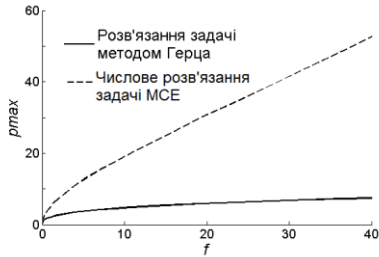


Рис. 8 – Залежність  $p_{max}$  при варіюванні параметра  $f$

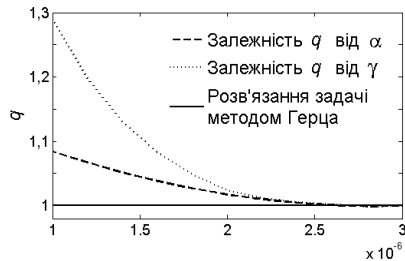


Рис. 9 – Залежність  $q$  при варіюванні площі поверхонь контактуючих тіл та при зміні розміру в плані

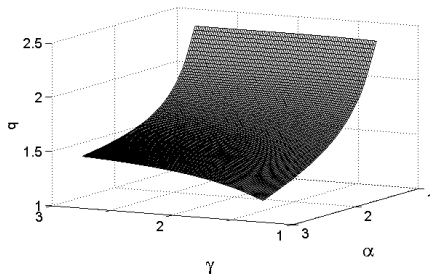


Рисунок 10 – Залежність  $q$  при одночасному варіюванні параметрів  $\alpha, \gamma$

**Числова реалізація методу граничних елементів**

На основі запропонованих моделей та напружено-деформованого стану складнопрофільних шорстких тіл розроблено спеціалізований програмно-модельний комплекс (СПМК) для дослідження контактної взаємодії деталей складної форми. Створений СПМК містить блок введення вихідних даних, якими є зусилля притиснення  $P$ , характеристики матеріалу контактуючих тіл  $E$  і  $\nu$ , кількість граничних елементів  $N$  та їх розмір  $s$ . Також повинні бути задані масив зазорів  $h$  і значення податливості проміжного шару  $\lambda$ . Шуканими величинами є контактний тиск  $p_m$  і зближення  $\delta$ .

Для підтвердження працездатності розробленого СПМК розв'язано низку тестових задач. Проведено аналіз задачі про взаємодію параболоїду з різними радіусами кривизни з напівпростором. На рис. 11, 12 наведено ілюстрації стягування зони контакту до

аналітичного розв'язку методом Герца в ході ітераційного його уточнення та розподіл контактної тиску, який отримано у розробленому СПМК.

Похибка розв'язку при визначенні максимального контактної тиску із зменшенням розміру елементів складає менше одного відсотка вже при  $N=10$  на піввісь контактної плями. Таким чином, показана висока точність розв'язання контактних задач за допомогою створеного програмно-модельного комплексу. Крім того, отримані залежності, які відображають високий ступінь впливу закону розподілу початкового зазору (зокрема, показників ступеня  $K = 1.5$  та  $K = 4$ , для яких І.Я. Штаерманом [11] отримані аналітичні розв'язки задачі), на розподіл контактної тиску. Мова йде про закон розподілу зазору у вигляді

$$h = U \cdot (r/a)^K, \tag{9}$$

де  $U$  – величина підйому поверхні  $h$ ;  
 $a$  – характерний заданий розмір;  
 $K$  – ступень розподілу початкового зазору.

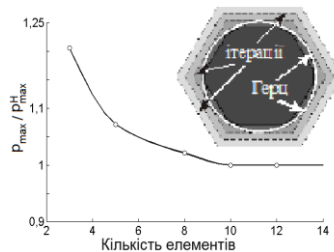


Рис. 11 – Залежність визначення максимального контактної тиску від кількості елементів  $N$

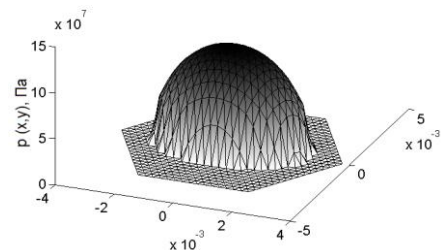


Рис. 12 – Розподіл контактної тиску, отриманий у розробленому СПМК

На рис. 13 представлені розподіли контактної тиску на осі  $Ox$ , які отримано за відомим аналітичним розв'язком та МГЕ. Похибка при визначенні максимального контактної тиску відносно аналітичного розв'язку склала близько 5 %. Потрібно відзначити, що при розв'язанні цих тестових задач основною метою є одержання якісної відповідності між розподілами контактної тиску.

Крім того, проведено порівняння розв'язків контактної задачі з урахуванням контактної податливості методом граничних елементів та МСЕ, похибка становить не більше 3 %, при цьому МГЕ дає можливість значно скоротити час розв'язання задачі порівняно з МСЕ (рис. 14).

Таким чином, отримані результати підтвердили застосовність розробленого спеціалізованого програмно-модельного комплексу, а також його точність і оперативність. Це дозволило перейти до розв'язання низки

прикладних задач аналізу контактної взаємодії складно-профільних деталей з урахуванням локальної податливості поверхневого шару.

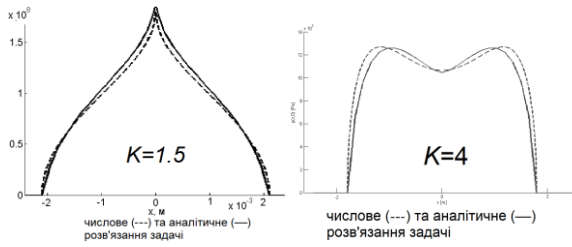


Рис. 13 – Розподіл контактної тиску для різного ступеня розподілу первинного зазору  $K$

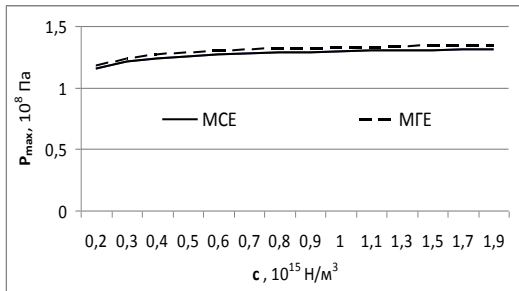


Рис. 14 – Залежність максимального контактної тиску від значення податливості проміжного шару

**Аналіз задач контактної взаємодії реальних машинобудівних конструкцій**

Розв'язана задача дослідження впливу форми зазору і податливості шорсткого шару на характер розподілу контактної тиску. На рис. 15 представлені отримані залежності величини максимального контактної тиску при варіюванні ступеню функції первинного зазору  $K$  і параметра податливості проміжного шару  $\theta$  ( $tg\theta = \lambda/C_{mm}$ ). Показано, що показник  $K$  ступеневої функції розподілу первинного зазору суттєво впливає як на характер розподілу контактної тиску, так і на його максимальні значення. При цьому, чим вище податливість проміжного пружного шару  $\theta$ , тим екстремум стає менш різко виражений порівняно з випадком контакту гладких тіл.

Проведено дослідження контактної взаємодії прямокутного скругленого в плані штамп з напівпростором. Отримані характерні розподіли контактної тиску при варіюванні геометричних розмірів штамп та шорсткості представлені на рис. 16-18. Показано, що в області варіювання відбувається різка зміна як форми розподілу контактної тиску, так і його максимального значення, а також розмірів контактних площадок. Крім того, введено в розгляд пружний вінклерівський шар. Установлено, що урахування шару згладжує розподіл контактної тиску, причому тим більшою мірою, чим вища його податливість.

Проаналізована також контактна взаємодія підшипника кочення з модифікованим дворадіусним роликом. Оскільки ресурс роликового підшипника значною мірою визначається швидкістю зношування поверхонь кочення ролика і підшипникового кільця, то для зменшення швидкості зношення необхідно мінімізувати

контактний тиск між поверхнею ролика і внутрішньою поверхнею підшипника. Проведено аналіз впливу геометрії контактної поверхні ролика на рівномірність розподілу контактної тиску.

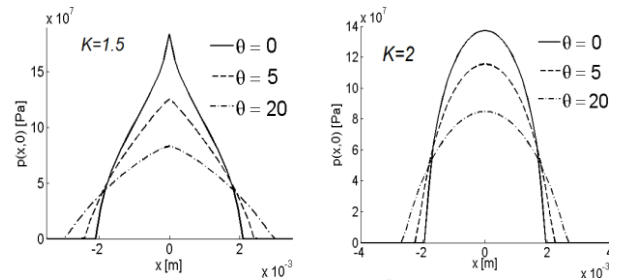


Рис. 15 – Вплив розподілу зазорів в сполученні тіл обертання і податливості пружного шару на характер розподілу контактної тиску

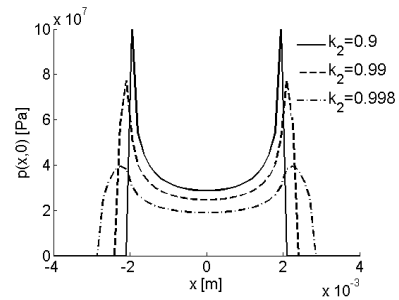
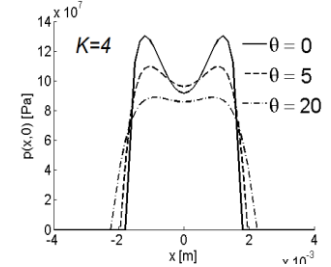


Рис. 16 – Характерні розподіли контактної тиску при варіюванні параметра  $k_2$

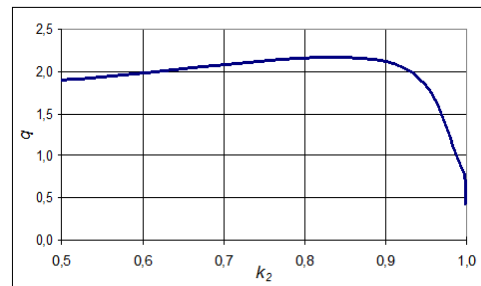
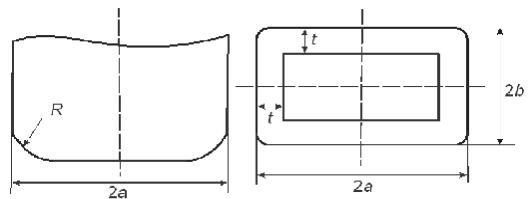


Рис. 17 – Залежність відносного максимального контактної тиску від варіювання параметра  $k_2$

На отриманих картинах розподілу контактної тиску при варіюванні радіусу  $R_2$ , які показані на рис. 19, видно, що у зоні переходу радіусів має місце сплеск контактної тиску, однак за умови постійного значення притисного зусилля можливо досягти вирівнювання форми контактної тиску за рахунок оптимізації гео-

метрії ролика. Також досліджено напружено-деформований стан модифікованого ролика (рис. 20).

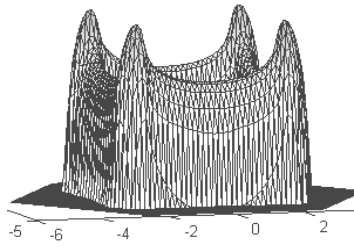


Рис. 18 – Розподіл контактної тиску при  $k_2 = 0.998$

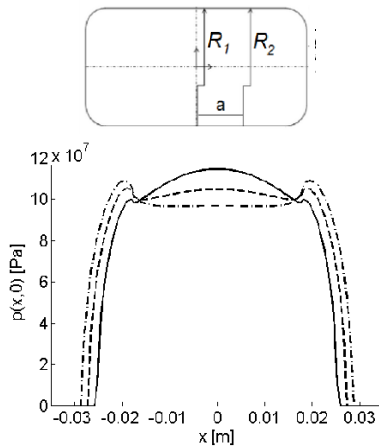


Рис. 19 – Розподіл контактної тиску при варіюванні  $R_2$

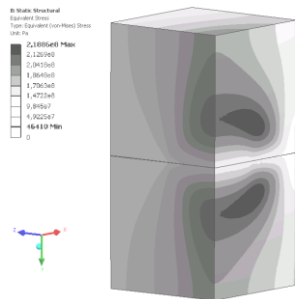


Рис. 20 – НДС дворадіусного ролика: розподіл напружень за Мізесом в центральній зоні контактної плями

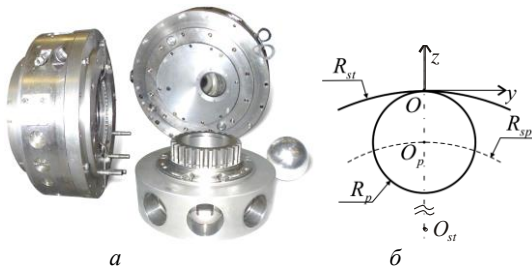


Рис. 21 – Радіальна гідропередача ГОП-900 та профіль бігової доріжки

Однією із прикладних задач контактної взаємодії є дослідження взаємодії кульових поршнів з біговими доріжками в ГОП танкової трансмісії. Проведено аналіз впливу профілю бігових доріжок на кільці статора (рис. 21, а), а також наявності шорсткого шару між контактуючими поверхнями спряжених тіл, на характер

контактних зон і розподіл контактної тиску.

Профіль бігової доріжки в центральній своїй частці є дугою кола радіуса  $R_1$  з кутовою величиною  $2\theta$ . Таким чином, середня частка бігової доріжки є жолобом тороїдальної форми, по якому перекочується поршень при обертанні ротора (рис. 21, б).

Варіювання безрозмірного радіуса бігової доріжки  $\chi$  ( $\chi = ((R_2 - R_1) / R_1) \cdot 100\%$ ) дало змогу встановити, що для випадку, коли радіус кривизни центральної частини доріжки менше радіуса поршня, контакт здійснюється за двома віддаленими майданчиками еліптичної форми. У випадку, коли радіус бігової доріжки перевищує радіус поршня, спостерігається «герцевський» контакт, який порушується, як тільки пляма контакту виходить за межі центральної тороїдальної частини бігової доріжки на перехідну частину профілю.

На рис. 22 показано, що варіювання відносної податливості  $L$  ( $L = \lambda / C_{mm}$ ) істотно впливає і на характер розподілу, і на величину контактної тиску.

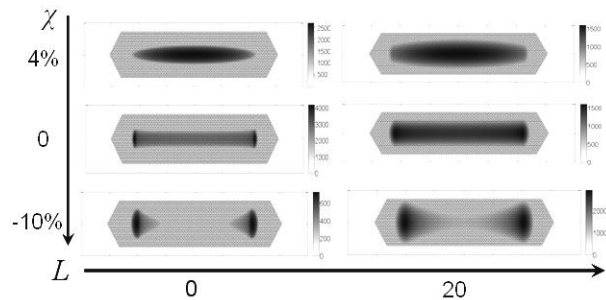


Рис. 22 – Розподіли контактної тиску варіюванні радіусу бігової доріжки  $\chi$  та податливості  $L$

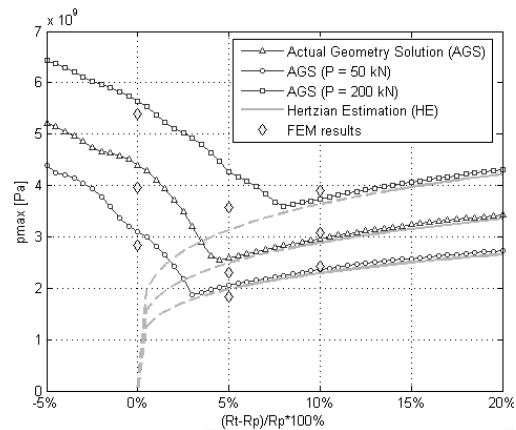


Рис. 23 – Залежності максимального контактної тиску від параметру  $\chi$  для різних навантажень, отримані різними методами

З ростом податливості рівень тиску знижується, розміри контактної плями зростають, а розподіл контактної тиску стає більш гладким. Також отримана діаграма значень максимального контактної тиску, які передбачені теорією Герца та розв'язками МСЕ і МГР, що демонструє межі застосовності цих методів в даному випадку. Зокрема, підтверджено, що МГР є ефективним інструментом аналізу, який поєднує точність (рис. 23) та оперативність, оскільки кількість рівнянь МГР змен-

шується на порядки.

Одержані в ході розв'язання описаних задач результати підтвердили ефективність, точність та адекватність запропонованих підходів, методів і моделей до дослідження НДС складнопрофільних тіл з урахуванням довільної форми зазору між контактуючими тілами та локальної податливості проміжного шару спряжених поверхонь.

### Експериментальне дослідження контактної взаємодії складнопрофільних тіл

Для дослідження контактної взаємодії задіяна технологія контактних відбитків з використанням чутливих плівок фірми Fujifilm. Запропоновано проміжний пружний шар моделювати за допомогою гуми. Для обґрунтування адекватності такого моделювання проведено експеримент, у якому чутливі плівки розташовувались над шаром гуми і під ним, що відображає відповідність запропонованої експериментальної моделі з моделлю основи Вінклера. На рис. 24 представлені контактні відбитки та відповідні їм розшифровки, які отримані під час проведення експерименту. На рис. 25 показані відповідні цим випадкам розподіли контактної взаємодії. Різниця між максимальними значеннями контактної взаємодії, отриманими над шаром і під ним, складала 5 %, а між розмірами одержуваних контактних плям – менше одного відсотка. Таким чином, для проведення експериментів обґрунтовано вибір гуми як матеріалу проміжного пружного шару для зменшення потрібних для експерименту зусиль.

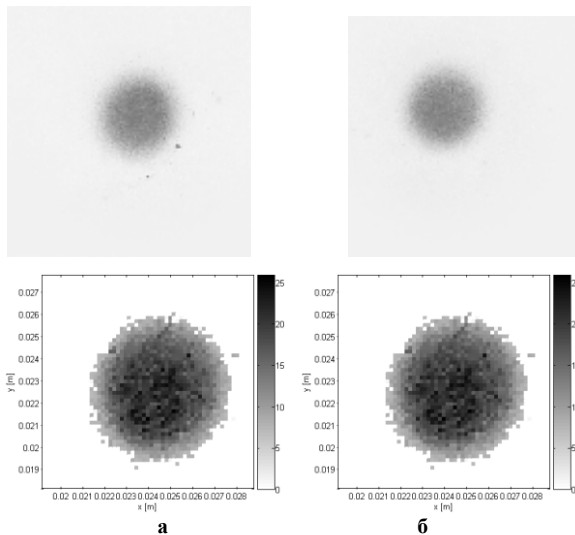


Рис. 24 – Контактні відбитки та результати їх аналізу, які отримано:  
а – над проміжним шаром; б – під проміжним шаром

Проведено експеримент, в ході якого визначалася величина податливості шару гуми. Як макет використано циліндричний пуансон, який вдавлювався в плоску основу за допомогою гвинтової пари, а за допомогою мікрометра визначалися переміщення верхньої площини циліндричного пуансона залежно від прикладеного навантаження. Для моделювання різної податливості шару використовувалося від одного до трьох шарів гуми. Під час експерименту отримано величину податливості  $\lambda$

одного шару гуми, яка дорівнює  $0,77 \cdot 10^{-11}$  м/Па. Порівняння з числовим розв'язком задачі запропонованим у роботі методом урахування наявності проміжного шару (рис. 26) свідчить, що розбіжність результатів складала не більше 10 %.

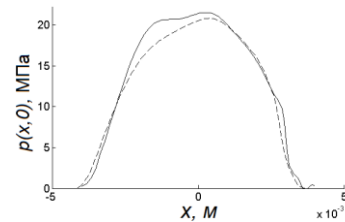


Рис. 25 – Розподіл контактної взаємодії:  
— над проміжним пружним шаром;  
--- під проміжним пружним шаром

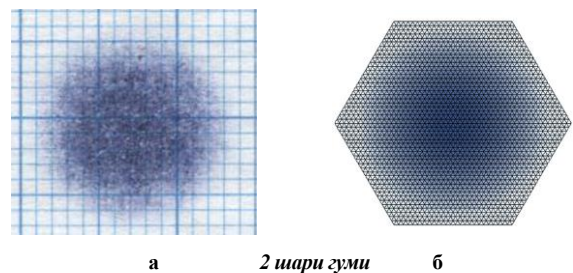


Рис. 26 – Результати дослідження контактної взаємодії:  
а – контактні плями в сполученні кулі з плоским блоком;  
б – відповідні їм числові розв'язки задачі

Отримано ряд контактних відбитків і розподілів контактної взаємодії у спряженні елементів гідрооб'ємної передачі. Проведені комплексні дослідження контактної взаємодії показали повну якісну відповідність прогнозованої розрахунково та зафіксованої експериментально поведінки контактних зон і тиску при варіюванні податливості проміжного шару та притискового зусилля (рис. 27, 28).

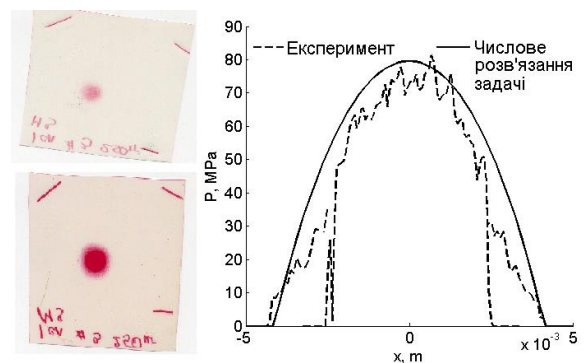


Рис. 27 – Контактні відбитки, отримані під час експерименту, та порівняння розподілень контактної взаємодії, отриманих експериментально та МГЕ

Таким чином, за допомогою експериментальних досліджень продемонстрована адекватність запропонованих методів, достовірність та точність побудованих моделей, одержаних результатів досліджень складнопрофільних тіл з урахуванням податливості поверхневого шару, а також та підтверджені отримані

результати числових досліджень, що проведені в роботі. Виявлена похибка становить близько 10 %, а її вплив на загальний характер розподілу контактного тиску оцінюється як незначний.

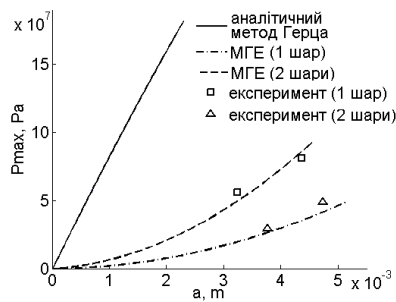


Рис. 28 – Співставлення числових та експериментальних залежностей максимального контактної тиску від розміру контактної плями та податливості проміжного шару

### Висновки

У роботі поставлена та розв'язана задача аналізу контактної взаємодії при різній локалізації контакту, формі контактуючих складнопрофільних тіл і податливості проміжного шару спряжених поверхонь. При цьому отримані наступні наукові результати.

1. Запропоновано використовувати модель Вінклера для моделювання проміжного шару в загальній системі рівнянь методу граничних інтегральних рівнянь. Отримані співвідношення для дослідження контактної взаємодії шорстких складнопрофільних тіл як узагальнення аналітичної системи рівнянь та нерівностей для гладких тіл.

2. Розроблена комплексна математична модель НДС з урахуванням контактної взаємодії реалізована у вигляді спеціалізованого програмно-модельного комплексу на основі методу граничних елементів. Запропоновано співвідношення для урахування величини локальної податливості поверхневого шару та глобальної податливості контактуючих складнопрофільних тіл. В ході розв'язання низки тестових задач підтверджена висока точність та оперативність розробленого спеціалізованого програмно-модельного комплексу (похибка – 3-5 %).

3. Із застосуванням спеціалізованого програмно-модельного комплексу розв'язано низку прикладних задач моделювання НДС з урахуванням контактної взаємодії складнопрофільних тіл. При розв'язанні задачі про взаємодію елементів підшипника кочення з модифікованим роликом встановлено, що максимальний контактний тиск при використанні дворадіусного профілю знижується на 7 % порівняно з однорадіусним. Під час аналізу впливу профілю бігових доріжок ГОП та наявності шорсткого шару на розподіл контактної тиску встановлено, що при зусиллі 100 кН оптимальними параметрами для мінімізації контактної тиску є наступні: радіус бігової доріжки перевищує радіус поршня на 4 %, а шорсткість контактуючих поверхонь відповідає шліфовці. При дослідженні впливу форми розподілу зазору між тілами обертання встановлено, що для випадку розподілу у вигляді ступеневої функції з по-

казником  $1 < K < 2$  у центрі виникає гострий максимум; при  $K = 2$  – еліпсоїдальний розподіл із гладким максимумом; при  $K > 2$  – локальний мінімум. При цьому розміщення податливого шару згладжує екстремуми, знижує максимуми контактної тиску та розширює контактну пляму. Також встановлено, що при скінченних розмірах контактуючих параболоїдів із зростанням притискного зусилля контактний тиск спочатку розподіляється, як у моделі Герца, а потім, коли контактна пляма підступає до границі тіла у плані, перетворюється практично у плато із рівномірним розподілом у середній частині та різким зниженням із наближенням до периферії.

4. Під час експериментального визначення контактних зон і контактної тиску при дослідженні взаємодії кульового поршня з біговою доріжкою гідропередачі підтверджені якісні та кількісні ефекти зміни розподілу контактних зон і тиску при наявності і варіюванні податливості пружного шару між контактуючими тілами (похибка отриманих результатів – близько 10 %).

Таким чином, отримано повне підтвердження адекватності математичних моделей, обґрунтованості вибору методів числових досліджень, відповідності створених моделей, а також достовірності і точності одержаних результатів.

У подальшому передбачається розв'язання низки задач аналізу напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл із урахуванням їхньої контактної взаємодії.

### Список джерел

1. Crouch S.L. Boundary Element Methods in Solid Mechanics: With Applications in Rock Mechanics and Geological Engineering. / S.L. Crouch, A.M. Starfield. – George Allen & Unwin, 1983. – 322 p.
2. Vollebregt E.A.H. 100-fold speed-up of the normal contact problem and other recent developments in "CONTACT" / E.A.H. Vollebregt // Proceedings of the 9th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems. – China, 2012. – Vol. 96. – P. 201–209.
3. Vollebregt E.A.H. Refinement of Kalker's rolling contact model ollebregt. In: Bracciali editor / E.A.H. Vollebregt // Proceedings of the 8th international conference on contact mechanics and wear of rail/wheel systems. – 2009. – P. 149–156.
4. Стренг Э. Теория метода конечных элементов / Стренг Э., Фикс Дж. – М.: Мир, 1977. – 349 с.
5. Norrie D.H. An introduction to finite element analysis / D.H. Norrie and G.De Vries. – Academic Press, London, 1978. – 301 p.
6. Ткачук Н.Н. Анализ контактного взаимодействия сложнопрофильных элементов машиностроительных конструкций с кинематически сопряженными поверхностями: дис. ... канд. техн. наук: спец. 05.02.09. – Харьков, 2011. – 203 с.
7. Ткачук Н. Н, Анализ контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов: модели и разрешающие уравнения / Ткачук Н. Н., Мовшович И. Я., Ткачук Н. А., Скрипченко Н. Б., Литвиненко А. В. // КИШП. ОМД. – М.: ООО „Тисо Принт”, 2014. – № 3 – С. 3-10.
8. Ткачук Н. Н, Анализ контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов: модели и разрешающие уравнения / Ткачук Н. Н., Мовшович И. Я., Ткачук Н. А., Скрипченко Н. Б., Литвиненко А. В. // КИШП. ОМД. – М.: ООО „Тисо Принт”, 2014. – № 4 – С. 3-8.
9. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper / H. Hertz // J. Reine Angew. Math.. – 1881. – Vol. 92. – P. 156-171.
10. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / Джонсон К. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
11. Штаерман М. Я. Контактная задача теории упругости / Штаерман М. Я. – Л.: Гостехиздат, 1949. – 270 с.

### Bibliography (transliterated)



1. **Crouch S.L.** Boundary Element Methods in Solid Mechanics: With Applications in Rock Mechanics and Geological Engineering. / **S.L. Crouch, A.M. Starfield.** – George Allen & Unwin, 1983. – 322 p.
2. **Vollebrecht E.A.H.** 100-fold speed-up of the normal contact problem and other recent developments in "CONTACT" / **E.A.H. Vollebrecht** // Proceedings of the 9th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/ Wheel Systems. – China, 2012. – Vol. 96. – P. 201–209.
3. **Vollebrecht E.A.H.** Refinement of Kalker's rolling contact model ollebrecht. In: Bracciali editor / **E.A.H. Vollebrecht** // Proceedings of the 8th international conference on contact mechanics and wear of rail/wheel systems. – 2009. – P. 149–156.
4. **Streng E.** Teoriya metoda konechnykh elementov / **Streng E., Fiks Dzh.** – М.: Mir, 1977. – 349 p.
5. **Norrie D.H.** An introduction to finite element analysis / **D.H. Norrie, G.De Vries.** – Academic Press, London, 1978. – 301 p.
6. **Tkachuk N.N.** Analiz kontaktного vzaimodeystviya slozhnoprofilnykh elementov mashinostroitelnykh konstruksiy s kinematicheski sopryazhennyimi poverhnostyami: dis. ... kand. tehn.

nauk: spets. 05.02.09. –Kharkov, 2011. – 203 p.

7. **Tkachuk N.N.** Analiz kontaktного vzaimodeystviya gladkih i sherohovatykh tel metodom granichnykh elementov: modeli i razreshayuschie uravneniya / **Tkachuk N.N., Movshovich I.Ya., Tkachuk N.A., Skripchenko N.B., Litvinenko A.V.** // KShP. OMD. – М.: ООО „Tiso Print”, 2014. – No 3 – P. 3-10.
8. **Tkachuk N.N.** Analiz kontaktного vzaimodeystviya gladkih i shegohovatykh tel metodom granichnykh elementov: modeli i razreshayuschie uravneniya / **Tkachuk N.N., Movshovich I.Ya., Tkachuk N.A., Skripchenko N.B., Litvinenko A.V.** // KShP. OMD. – М.: ООО „Tiso Print”, 2014. – No 4 – P. 3-8.
9. **Hertz H.** Über die Berührung fester elastischer Körper / *H. Hertz* // J. Reine Angew. Math.. – 1881. – Vol. 92. – P. 156-171.
10. **Dzhonson K.** Mehanika kontaktного vzaimodeystviya / **Dzhonson K.** – М.: Mir, 1989. – 510 p.
11. **Shtaerman M. Ya.** Kontaktnaya zadacha teorii uprugosti / **Shtaerman M. Ya.** – L.: Gostehizdat, 1949. – 270 p.

*Надійшла (received) 10.10.2016.*

### *Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions*

Контактна взаємодія складнопрофільних деталей з урахуванням локальної податливості поверхневого шару / **Скрипченко Н. Б., Ткачук М.М., Неділько К. Д., Киричук Д.В., Борисенко С.В., Касай О.І.** // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Машинознавство та САПР. – Харків: НТУ "ХПІ", 2016. – № 39 (1211). – С. 93–101. – Бібліогр. 11 назв. – ISSN 2079–0775.

Contact interaction of complex-shaped details with local compliance of the surface layer / **Skripchenko N., Tkachuk M., Nedilko K., Kyrychuk D, Borysenko S., Kasai O.** // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Engineering and CAD. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. – No 39 (1211). – P. 93-101. – ISSN 2079–0775.

Контактное взаимодействие сложнопрофильных деталей с учетом локальной податливости поверхностного слоя / **Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.Н., Неділько К.Д., Киричук Д.В., Борисенко С.В., Касай Е.И.** // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Машиностроение и САПР. – Харьков: НТУ "ХПІ", 2016. – № 39 (1211). – С. 93–101. – ISSN 2079-0775.

### *Відомості про авторів / About the Authors*

**Скрипченко Наталія Борисівна** – кандидат технічних наук, НТУ "ХПІ", молодший науковий співробітник кафедри "Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин", тел.: (057) 707-65-34; e-mail: natalia.skripchenko@ntu.kharkiv.edu.

**Skripchenko Nataliia**– Ph.D., NTU "KhPI", junior researcher at the Department of theory and computer-aided design of mechanisms and machines, tel.: (057) 707-65-34; e-mail: natalia.skripchenko@ntu.kharkiv.edu.

**Ткачук Микола Миколайович** – кандидат технічних наук, НТУ "ХПІ", докторант кафедри "Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин", тел.: (057) 707-69-01; e-mail: mikolei@rambler.ru.

**Tkachuk Mykola**– Ph.D., NTU "KhPI", doctorante at the Department of theory and computer-aided design of mechanisms and machines, tel.: (057) 707-69-01; e-mail: mikolei@rambler.ru.

**Неділько Катерина Дмитрівна** – Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", студент, тел.: (057) 707-69-02; e-mail: tma@tmm-sapr.org.

**Nedilko Katerina**– National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", student, tel.: (057) 707-69-02; e-mail: tma@tmm-sapr.org.

**Киричук Дмитро Валентинович** – Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", студент гр. ТМ-82Б

**Kyrychuk Dmytro**– National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", student of TM-82B group

**Борисенко Сергій Вікторович** – Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", студент гр. ТМ-82Б

**Borysenko Serhii** – National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", student of TM-82B group

**Касай Олена Ігорівна** – Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", студент гр. ТМ-82Б

**Kasai Olena** – National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", student of TM-82B group

