

*А. В. МАРТЫНЕНКО, Н. Н. ТКАЧУК, Н. Б. СКРИПЧЕНКО, Д. В. БИБИК,  
А. В. ТКАЧУК, М. С. САВЕРСКАЯ, В. В. ШЕМАНСКАЯ*

### **НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КОНТАКТИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ ГИДРОПЕРЕДАЧ**

В работе описаны методы анализа напряженно-деформированного состояния элементов радиальных гидропередач с учетом контактного взаимодействия. Предложена вариационная постановка задачи. Разработаны модификации метода граничных элементов. Проведен анализ влияния количества цилиндров на напряженно-деформированное состояние блока цилиндров. Определено влияние профиля беговой дорожки на распределение контактных давлений в сопряжении с шаровым поршнем. Проведено исследование влияния профиля беговой дорожки на характер распределения и величину этих контактных давлений. Полученная база данных служит основой для разработки рекомендаций по обоснованию проектных параметров элементов радиальных гидропередач.

**Ключевые слова:** напряженно-деформированное состояние, контактное взаимодействие, кинематически генерируемая поверхность, радиальная гидропередача, контактное давление

*А. В. МАРТИНЕНКО, М. М. ТКАЧУК, Н. Б. СКРИПЧЕНКО, Д. В. БІБІК,  
Г. В. ТКАЧУК, М. С. САВЕРСЬКА, В. В. ШЕМАНСЬКА*

### **НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН КОНТАКТУЮЧИХ ЕЛЕМЕНТІВ ГІДРОПЕРЕДАЧ**

В роботі описані методи аналізу напружено-деформованого стану елементів радіальних гідропередач з урахуванням контактної взаємодії. Запропонована варіаційна постановка задачі. Розроблені модифікації методу граничних елементів. Проведено аналіз впливу кількості циліндрів на напружено-деформований стан блока циліндрів. Визначено вплив профіля бігової доріжки на розподіл контактної тиску в спряженні з кульовим поршнем. Проведено дослідження впливу профіля бігової доріжки на характер розподілу та величину цього контактної тиску. Отримана база даних служить основою для розробки рекомендацій по обґрунтуванню проектних параметрів елементів радіальних гідропередач.

**Ключові слова:** напружено-деформований стан, контактна взаємодія, кінематично генерована поверхня, радіальна гідропередача, контактний тиск

*A. MARTYNENKO, M. TKACHUK, N. SKRIPCHENKO, D. BIBIK, A. TKACHUK,  
M. SAVERSAYA, V. SHEMANSKAYA*

### **STRESS-STRAIN STATE OF HYDROVOLUMETRIC DRIVES ELEMENTS IN CONTACT**

The work describes methods of analysis of stress-strain state of hydrovolumetric drives elements that are in contact interaction. A variational problem statement is proposed. Modifications of boundary element method are developed. The analysis focused on several structural factors that have the most profound impact on the deformed state of the most loaded elements of the drive. Those include the number of cylinders in the rotor and the geometry of tracks on the internal surface of the stator ring along which the spherical pistons are running. Hydrostatic load from the oil under the piston in any particular cylinder as well as the adjacent cylinders lead to non-uniform radial deformations. The contact size and contact pressure distribution depend on the initial gap between stator surface and the spherical piston. The influence of the running track profile on the contact interaction has been determined by numerical analysis. The acquired database serves for the parameter justification and design recommendation for the radial hydrovolumetric drives.

**Keywords:** stress-strain state, contact interaction, kinematically generated surface, radial hydrovolumetric drive, contact pressure

**Введение.** Контактное взаимодействие сложно-профильных элементов машиностроительных конструкций во многих случаях является фактором, определяющим работоспособность, долговечность, нагрузочную способность и другие характеристики изделия в целом. Примерами могут служить тела качения подшипников, зубья передач с модифицированными рабочими поверхностями, шариковые поршни радиальных гидропередач и многие другие сложнопрофильные тела (СПТ).

Данные СПТ служат для передачи мощности между отдельными частями механизмов и машин. При этом их особенностями является близость геометрической формы рабочих поверхностей контактирующих тел. В силу этого, с одной стороны, могут быть неприменимы гипотезы модели Герца, зачастую лежащие в основе расчетных методик для традиционных вариантов контактирующих тел. С другой стороны, применение численного метода конечных элементов (МКЭ), который стал стандартом в пакете инженерных исследований, может приводить к физически неадекватным картинам распределения контактных давлений. Это обусловлено существенным влиянием погрешностей описания формы контактирующих поверхностей гра-

ниями конечных элементов (КЭ), а также сложностью учета шероховатости, волнистости, напылений, покрытий и влияния других методов обработки поверхностей, по которым происходит контакт СПТ.

Отмеченные особенности формируют актуальную задачу разработки новых методов и средств анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) сложнопрофильных тел с учетом контактного взаимодействия. Решение этой задачи на примере элементов радиальных гидропередач составляет цель и содержание работы.

**Анализ методов исследования контактного взаимодействия элементов машиностроительных конструкций.** Контактное взаимодействие является темой и содержанием исследований многих авторов [1–3]. Сформировано целое направление механики контактного взаимодействия [3, 4]. В последние десятилетия были развиты для этих целей вариационные методы [5–8], различные алгоритмы МКЭ [9–12], а также метод граничных элементов (МГЭ) [13, 14].

Этой тематике, в частности, с учетом ряда новых

факторов, посвящены работы [15–20]. Однако полного решения проблема создания методов и моделей контактного взаимодействия не получила. В частности, как отмечалось выше, зачастую отсутствуют механизмы корректного учета свойств шероховатости и распределения зазора в сопряжении контактирующих поверхностей сложнопрофильных тел. Однако в ряде работ [21–23] предложены новые подходы и модели, учитывающие особенности контактного взаимодействия СПТ. В связи с этим дальнейшие исследования в основном строятся, следуя подходам, методам и моделям, изложенным в этих работах.

**Методы анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел.** Для описания контактного взаимодействия сложнопрофильных тел в отсутствие трения в первом приближении рассматриваются перемещения точек поверхностей и зазор между ними только в одном направлении. На этом основании выводятся кинематические соотношения контакта. Такое упрощение модели нормального контакта основано на пренебрежении изменениями направления векторов нормали поверхностей взаимодействующих тел [23]. Примером является теория Герца, в рамках которой нормальный зазор между поверхностями приближенно представляется квадратичной формой в локальной системе координат, связанной с точкой первоначального касания тел.

В более общем случае приходится учитывать точную форму зазора между телами, для чего вводится система координат, центр которой (точку  $O$ ) традиционно располагают на линии действия прижимающей силы  $P$  (рис. 1). Оси  $z_1$  и  $z_2$  для удобства имеют направление вовнутрь тела (здесь и далее нижний индекс соответствует номеру тела, к которому относится обозначение). В этом случае уравнения каждой из поверхностей можно записать в виде  $z_i = z_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2$ , а зазор вычисляется соответственно как  $h = h(x, y) = z_1(x, y) + z_2(x, y)$ .

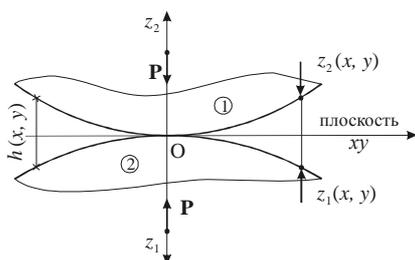


Рис. 1 – Представление локального зазора между контактирующими телами

В деформированном состоянии под действием силы  $P$  оба тела приводятся в контакт по некоторой площадке. При этом перемещение произвольной точки границы  $S_i$  каждого из тел в направлении оси  $z$  складывается из смещения  $\delta_i$ , величина которого отсчитывается в направлении, обратном положительному для

оси  $Oz_i$ , и отклонения  $u_{z_i}$  от первоначальной формы соответствующей поверхности (рис. 2). Первая компонента представляет собой сближение тел и не связана с их деформированием, а вторая отвечает деформациям, вызванным действием искомого контактного давления. Такое разложение традиционно для задач о взаимодействии упругого полупространства с гладким штампом, в которых компонентами сближения  $\delta_i$  являются перемещения бесконечно удаленной точки полупространства или всего жесткого штампа как абсолютно твердого тела.

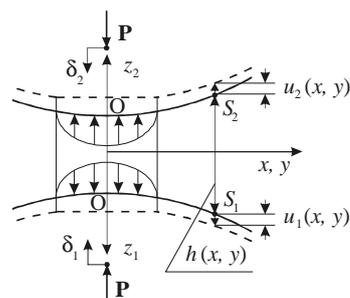


Рис. 2 – Деформация тел и образование контактной площадки под действием нормального усилия

Данное представление вертикальных перемещений в пренебрежении поперечными тангенциальными в плоскости  $Oxy$  приводит к следующей общепринятой записи нелинейных соотношений для нормального контакта:

$$\begin{cases} u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) = \\ = \delta_1 + \delta_2, & S_1(x, y) \text{ и } S_2(x, y) - \text{в контакте;} \\ u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) > \delta_1 + \delta_2, \\ S_1(x, y) \text{ и } S_2(x, y) - \text{вне зоны контакта.} \end{cases} \quad (1)$$

Для упругого полупространства известно интегральное соотношение, устанавливающее связь между давлением и нормальными перемещениями точек его границы (рис. 3) [24]:

$$u_z(x, y) = (1 - \nu^2) / \pi E \iint_S [p(\xi, \eta) / \rho] d\xi d\eta, \quad (2)$$

$$\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

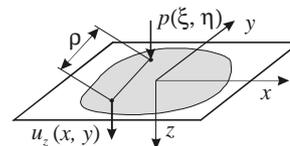


Рис. 3 – Перемещение границы полупространства под действием нормального усилия

Поскольку распределения контактных давлений, действующих на границу обоих взаимодействующих тел, совпадают, то в соотношениях (1) неизвестные

перемещения  $u_{z_1}(x, y)$  и  $u_{z_2}(x, y)$  выражены исключительно через единственную функцию распределения давления, которая в дальнейшем будет искомой:

$$u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) = \left( \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2} \right) \iint_S \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta = \frac{1}{\pi E^*} \iint_S \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta \quad (3)$$

Здесь  $\nu_i, E_i, i=1,2$  – упругие параметры каждого из контактирующих тел. Контактная площадка  $S$  и распределение давлений  $p(\xi, \eta)$ , присутствующие в правой части равенства, являются неизвестными [21].

Для определения контактной площадки и распределения давлений в случае сложной геометрии контактирующих тел, когда контактная задача не имеет аналитического решения в замкнутой форме, привлекают различные численные методы. Среди них для решения задач негерцевского нормального контакта упругих тел рассмотрим те, которые основаны на замене непрерывных распределений усилий набором элементов. Они различаются между собой типом аппроксимации неизвестных контактных давлений и способом учета граничных условий. Здесь будет использовано кусочно-линейное представление распределения усилий, которому отвечают непрерывные и гладкие поверхностные смещения, характерные для контакта сложнопрофильных тел. Искомая функция контактных давлений приближается суперпозицией массива пирамидальных элементарных распределений, вершины которых расположены в узлах регулярной сети шага  $c$ , состоящей из равносторонних треугольников (рис. 4, 5), и при этом полностью определяется дискретным набором узловых значений давлений  $p_n$ :

$$p(\xi, \eta) \cong \sum_n \hat{p}(\xi - \xi_n, \eta - \eta_n) \cdot p_n$$

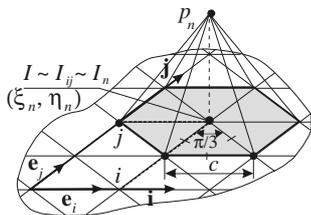


Рис. 4 – Регулярная треугольная сетка и пирамидальный элемент давления

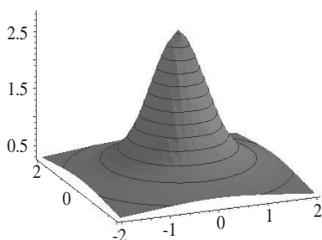


Рис. 5 – Распределение перемещений точек поверхности полупространства от действия давления (см. рис. 4)

На основе вариационного принципа Калькера [8] задача может быть приведена к минимизации функционала

$$\begin{cases} \Phi(p) = \frac{1}{2} \int_S p(u_{z_1} + u_{z_2}) dS + \int_S p(h - \delta) dS \rightarrow \min; \\ p(\xi, \eta) \geq 0 \text{ в } S. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $S$  – некоторая достаточно большая область поверхности полупространства (возможные распределения контактных давлений должны иметь ограниченные носители). С учетом соотношения (3) можно видеть, что минимизируемое выражение является функционалом, зависящим от одной лишь неизвестной функции давления  $p$ . Распределение давления здесь должно удовлетворять неравенству из (4) в слабом смысле.

Приближенное решение этой задачи можно найти, рассматривая значение минимизируемого функционала на конечномерном пространстве, образованном кусочно-линейными распределениями  $p$  на регулярной треугольной сетке. В этом случае  $S$  либо точно, либо приближенно совпадает с областью, покрытой сеткой. Сам функционал при этом принимает вид суммы квадратичной и линейной форм относительно узловых значений давления  $p_n$ . Способ его вычисления зависит от схемы численного интегрирования. Применяя простую квадратурную форму с узлами, совпадающими с узлами используемой сетки:

$$\int_S f g dS = \left[ (\sqrt{3}c^2) / 2 \right] \sum_i f_i g_i, \quad (5)$$

можно прийти к следующей задаче квадратичного программирования, являющейся приближением (4), (5):

$$\begin{cases} \Phi_n(\{p_n\}_{n=1}^N) = \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} c^2 \left[ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N C_{nm} p_n p_m + \sum_{m=1}^N p_m (h_m - \delta) \right] \rightarrow \\ \rightarrow \min; \quad p_m \geq 0, m = 1, N. \end{cases} \quad (6)$$

В итоге разрешающая система соотношений принимает вид:

$$\begin{cases} \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta = 0, \\ \text{узел } J_n \text{ – в контакте;} \\ \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta > 0, \\ \text{узел } J_n \text{ – вне зоны контакта,} \end{cases} \quad (7)$$

где  $\delta = \delta_1 + \delta_2$  – суммарное сближение, а узловое значение первоначального зазора –  $h_n = h(x_n, y_n)$ .

Другим условием является неотрицательность давлений, что накладывает на искомые узловое значения ограничения:

$$p_m \geq 0, m = 1, N. \quad (8)$$

Более того, вне зоны контакта они должны быть нулевыми, так что

$$p_m = 0, J_m - \text{вне зоны контакта.} \quad (9)$$

В условия (1) и их дискретную запись (7) входит сближение тел  $\delta$ , которое в большинстве задач является неизвестным. Возникающую в связи с этим неопределенность можно исключить, добавив в систему разрешающих соотношений уравнение, в котором присутствует величина действующего прижимающего усилия  $P$ . Чаще всего бывает заданным именно оно. Это уравнение получаем интегрированием по элементам кусочно-линейно представленного давления:

$$\sum_m \sqrt{3c^2} p_m / 2 = P. \quad (10)$$

Система соотношений (7)–(9) на практике всегда разрешается единственным образом относительно неизвестных  $\{p_m\}_{m=1}^N$  и  $\delta$ . При их определении наибольшей трудностью является то, что форма и размеры области контакта обычно неизвестны. Поэтому для начала необходимо сделать предположения относительно зоны контакта и того, какие узлы в нее входят. Обычно строят сетку и делают начальное предположение об области контакта таким образом, что они заведомо покрывают истинную область контакта. В ходе последующей итерационной процедуры уточняются как форма пятна контакта, так и значения контактных давлений. На каждом ее шаге имеется множество  $N_c$ , состоящее из индексов  $n_c$  узлов, предположительно входящих в контакт. Для них должны выполняться уравнения из системы (7), а также равенство (10):

$$\begin{cases} \sum_{m_c \in N_c} C_{n,m_c} p_{m_c} - \delta = h_{n_c}, n_c \in N_c; \\ \sum_{m_c \in N_c} \sqrt{3c^2} p_{m_c} / 2 = P. \end{cases} \quad (11)$$

Удовлетворение получаемой системы уравнений и неравенств производится итерационным путем, в результате чего определяются и область контакта, и распределение искомого контактного давления.

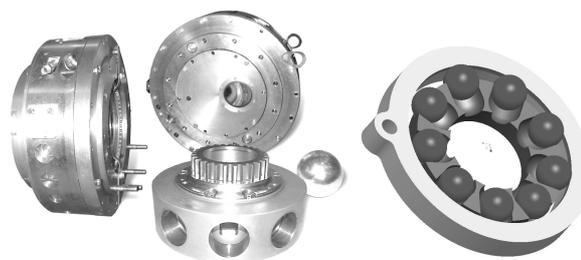
Одной из особенностей и значительных преимуществ предложенной вариационной постановки является адаптированность к учету различных дополнительных факторов. Для этого достаточно пополнить минимизируемый функционал дополнительными слагаемыми, отвечающими за тот или иной фактор. Например, для учета свойств податливого слоя шероховатости требуется дополнить функционал слагаемым энергии, накапливаемой в этом слое при действии контактного давления  $p$ . Далее из условия минимизации в уравнениях совместности перемещений точек контактирующих тел (7) автоматически появляются дополнительные члены, описывающие влияние соответствующего фактора.

Таким образом, применение вариационного принципа Калькера [8] в сочетании с дискретизацией

по МГЭ дает возможность решать широкий класс контактных задач для сложнопрофильных тел. Кроме того, в отдельных случаях удобно также использовать традиционный МКЭ, дополненный параметрическим описанием объекта исследований [25].

Предложенные подходы, методы и модели могут быть использованы для решения задач анализа контактного взаимодействия и напряженно-деформированного состояния элементов радиальной гидропередачи ГОП-900 [26].

**Анализ контактного взаимодействия шарового поршня с беговой дорожкой в радиальной гидропередаче.** Рассматривается радиальная гидрообъемная передача (ГОП) (рис. 6), разработанная в КП "Харьковское конструкторское бюро по машиностроению им. А.А. Морозова". Такие передачи применяются в составе трансмиссий тяжелых гусеничных машин с целью повышения их тактико-технических характеристик. С их помощью на активных режимах движения осуществляется плавная регулировка хода, что повышает маневренность гусеничной машины и ресурс ее силовой установки.



Радиальная гидропередача ГОП-900 (ХКБМ)

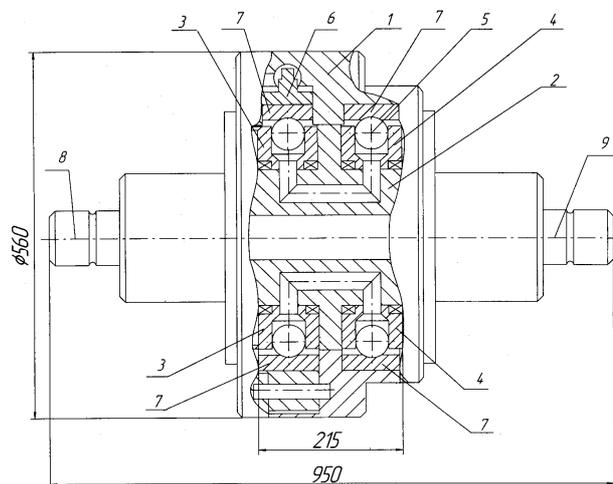


Рис. 6 – Гидропередача ГОП-900 с шариковыми поршнями [26]:

- 1 – корпус; 2 – блок цапфенных распределителей; 3 – блок цилиндров насоса (ротор); 4 – блок цилиндров гидромотора (ротор); 5 – шарик-поршень; 6 – статор насоса; 7 – обоймы (беговые дорожки) насоса и гидромотора;
- 8 и 9 – входной и выходной валы гидропередачи

Подробное описание конструкции ГОП-900 и основные ее характеристики приведены в работе [26].

Передача состоит из двух основных частей: гидронасоса и гидромотора. Их устройство практически не отличается: основными узлами как насоса, так и мотора являются статор и установленный со смещением относительно его центральной оси ротор. В нем имеется 9 радиально расположенных цилиндров, в которых находятся поршни, имеющие форму шара. При вращении ротора эти поршни перекачиваются по цилиндрической поверхности статора, совершая одновременно с этим поступательное движение в цилиндрах. В результате в насосе поршни производят перекачку масла, поступающего в цилиндры, в гидросистему мотора. Создаваемое давление, обратно, приводит в движение поршни гидромотора и вызывает вращение его ротора, передаваемое на выходной вал передачи. Изменение эксцентриситета положения ротора гидронасоса при постоянном значении эксцентриситета гидромотора позволяет непрерывно изменять передаточное отношение такой ГОП.

Следует выделить следующие особенности этой машины, обуславливающие основные трудности ее проектирования и расчета: она предназначена для передачи больших крутящих моментов, в связи с чем вся ее конструкция является высоконагруженной. Радиальные ГОП должны иметь компактные размеры, к ним предъявляются строгие габаритные ограничения, что служит причиной того, что многие их элементы приходится проектировать с минимальными запасами прочности. Кроме этого, указанные выше требования сужают область допустимых значений конструктивных параметров. Это также усложняет задачу обеспечения требуемых характеристик таких передач. Усилия в машине передаются посредством подвижного контакта ее различных элементов, в частности, шариковых поршней и корпусов статоров. В силу конструктивных особенностей передачи ход поршней в цилиндрах относительно мал, а поэтому для обеспечения большой мощности давление перекачиваемого масла должно быть высоким (до 35 МПа). Соответственно, в сопряжении поршней со статором действует значительное прижимающее усилие (до 120 кН). В связи с этим возникает вопрос об определении характера контакта этих деталей, локальных напряжений в его окрестности и параметров, влияющих на них.

Вышеперечисленные факторы и трудности создания передачи ГОП-900 привели к идее придания сложной формы внутренней поверхности корпуса статора, отличной от заложенной первоначально цилиндрической, как способу улучшения условий в контакте статора с поршнем и снижения концентрации напряжений в этих деталях. Благодаря такому конструктивному изменению поршни будут двигаться по беговым дорожкам специальной формы. Это делает возможным создание более благоприятных условий для контакта поршней с корпусом статора. Поверхность беговой дорожки является поверхностью вращения, определяемой в плоскости, проходящей через ось статора, некоторым профилем. Его форма является вариативной, и при проектировании передачи могут быть рассмотрены различные классы профилей. Таким образом, задача анализа взаимодействия поршня ГОП с беговой дорожкой про-

звольно заданного или определяемого набором параметров профиля и локального НДС становится составной частью проектирования данной машины. Ее решение требует обоснованного выбора и рационального применения надлежащих методов и алгоритмов создания расчетных моделей и определения их параметров.

В рамках общей методики предлагается использовать различные средства анализа контактного взаимодействия деталей сложной формы. Правильный выбор подходящего метода на различных этапах проектирования и расчета повышает оперативность и эффективность разрабатываемой специализированной методики анализа и синтеза отдельных машиностроительных конструкций. При его совершении приходится руководствоваться, с одной стороны, требуемыми объемами вычислений и затратами на подготовку моделей, а с другой стороны, – точностью и возможностью определения различных характеристик сложного НДС элементов исследуемых механических систем.

Для оценки контактного взаимодействия поршня гидронасоса или гидромотора с беговой дорожкой на статоре предлагается использовать аналитическое решение Герца, полуаналитический прямой метод решения задачи Синьорини, основанный на семействе точных решений для пирамидального распределения контактного давления (вариант метода граничных интегральных уравнений (МГИУ) – метод граничных элементов) и МКЭ.

Первоначально был рассмотрен следующий класс профилей беговых дорожек на статорном кольце. Для его описания применяется ортогональная система координат, началом отсчета которой является точка  $O$  на поверхности поршня, максимально удаленная от центра статора  $O_{st}$ . Направление оси  $Oz$  этой системы совпадает с направлением радиальной оси статора, соединяющей его центр  $O_{st}$  с центром поршня  $O_p$ . Ось  $Ox$  ортогональна плоскости вращения ротора, в то время как ось  $Oy$  параллельна вектору движения центра поршня по круговой траектории (рис. 7).

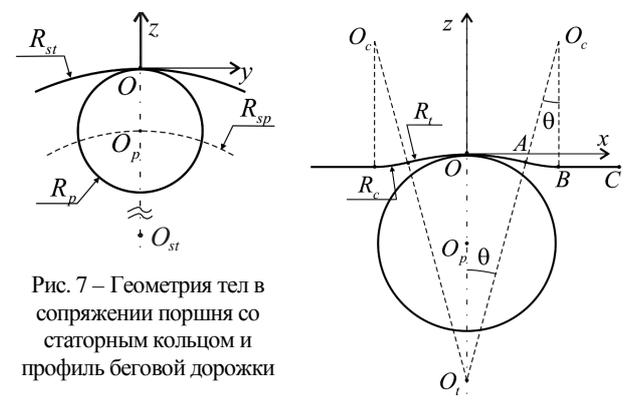


Рис. 7 – Геометрия тел в сопряжении поршня со статорным кольцом и профиль беговой дорожки

Профиль беговой дорожки, определяющий сечение статорного кольца в сечении плоскостью  $Oxz$ , в центральной своей части является дугой с углом раствора  $2\theta$  окружности радиуса  $R_t$  с центром в точке  $O_t$ , расположенной на оси  $Oz$ . Таким образом, сред-

няя часть беговой дорожки представляет собой желоб тороидальной формы, по которому перекатывается поршень при вращении ротора. Радиусы желоба и поршня предполагаются делать близкими для того, чтобы уменьшить первоначальный зазор между поршнем и беговой дорожкой в направлении оси  $Ox$ . Во избежание изломов контактирующих поверхностей, которые приводят к значительной концентрации контактных давлений при переходе от вогнутой части профиля  $OA$  к его горизонтальному участку  $BC$ , профилю придается скругление радиуса  $R_c$  (см. рис. 7). В итоге форма беговой дорожки как поверхности вращения полностью определяется параметрами ее профиля:  $R_t, R_c, \theta$ .

При этом значения части конструктивных параметров являются заданными. Базовые параметры элементов ГОП-900 следующие:  $R_p = 0.03175$  м – радиус поршня,  $R_{sp} = 0.128$  м – радиус круговой траектории центра поршня,  $R_{st} = 0.15975$  м – радиус статорного кольца,  $R_{rot} = 0.145$  м – радиус корпуса ротора,  $\delta = 0.012$  м – максимальный эксцентриситет; упругие постоянные материала поршня и статора:  $E = 200$  ГПа – модуль упругости и  $\nu = 0.3$  – коэффициент Пуассона; параметры нагруженности передачи  $P = 15 \div 120$  кН – прижимающее усилие в сопряжении поршня со статором. Влияние вышеуказанных варьируемых параметров на характер контактного взаимодействия поршня со статорным кольцом в отсутствие трения и локальное НДС демонстрируется ниже результатами расчетов, проведенных различными методами.

В первую очередь представляет интерес выбор радиуса центрального желоба беговой дорожки  $R_t$ . Его значением в первом приближении определяется зазор между поршнем и статором. Действительно, в окрестности точки  $O$  каждое из контактирующих тел приближенно можно представить квадратичными формами (см. рис. 1)

$$\begin{aligned} z_1(x, y) &\cong x^2 / 2R_1^x + y^2 / 2R_1^y; \\ z_2(x, y) &\cong x^2 / 2R_2^x + y^2 / 2R_2^y. \end{aligned} \quad (12)$$

Индексы 1 и 2 соответствуют поверхностям беговой дорожки и поршня соответственно,  $R_1^x = -R_t$ ;  $R_1^y = -R_{st}$ ;  $R_2^x = R_2^y = R_p$  обозначают радиусы их нормальных кривизн в направлениях  $Ox$  и  $Oy$ , являющихся главными. Зазор между поверхностями, соответственно, приближенно описывается квадратичной функцией  $h^{par}(x, y) = x^2 / 2R_{eq}^x + y^2 / 2R_{eq}^y$ , где  $R_{eq}^x = (1/R_1^x + 1/R_2^x)^{-1}$ ;  $R_{eq}^y = (1/R_1^y + 1/R_2^y)^{-1}$  – приведенные радиусы кривизн для пары поверхностей. Такое приближенное представление локальной геометрии полностью согласуется с предположением, в рамках которых построена теория Герца. Используя вышеперечисленные соотношения, можно оценить размеры полуосей эллиптического пятна контакта и зна-

чение максимального контактного давления при заданном значении прижимающего усилия  $P$ .

Предложенный способ оценки контактного взаимодействия поршня со статором, несмотря на простоту сопряженных с ним вычислений, обладает ограниченной областью применимости. Для исследуемого здесь класса профилей наиболее существенное ограничение связано с отличием реальной геометрии тел от приближенного представления (12). С ростом прижимающего усилия пятно контакта расширяется так, что может достичь скругления на участке  $AB$  профиля беговой дорожки. Достижение размера полуоси эллиптической площадки контакта, предсказываемое теорией Герца, в направлении  $Ox$  значений, больших полуширины тороидального сегмента беговой дорожки  $OA$ , можно принять за основной признак, указывающий на неприменимость решения Герца для данных значений геометрических параметров профиля и величины прижимающего усилия

$$a_x(P) \leq R_t \sin \theta. \quad (13)$$

Более того, формула Герца неприменима ни для каких значений усилия  $P$  в случае, когда  $R_t \leq R_p$ . Если радиус желобка  $R_t$  равен радиусу поршня  $R_p$  или оказывается меньше его, то первоначальный контакт поршня со статорным кольцом происходит или по участку кривой линии, или в двух отстоящих точках, соответственно.

Полуаналитический метод применим в большем числе ситуаций и для большей области значений варьируемых параметров. Для него единственным требованием к контактирующим телам является выполнение предположения об эквивалентности деформаций на их поверхности вблизи контакта деформациям границы упругого полупространства. Для рассматриваемого класса профилей это предположение остается справедливым при небольших значениях угла  $\theta$ . В действительности величины раствора дуги желоба дорожки  $\theta$ , которые можно реализовать в ГОП, ограничены малыми значениями. Таким образом, применение данного метода для исследования влияния формы рассматриваемых профилей на характер контактного взаимодействия поршня со статором во всей области допустимых значений варьируемых геометрических параметров является оправданным, что подтверждается ниже представленными результатами, полученными, в частности, другими способами. Их сравнение проведено в рамках исследования поставленного ранее вопроса выбора радиуса  $R_t$  во всем диапазоне его возможных значений.

На рис. 8 представлены величины максимального контактного давления при различных значениях радиуса желоба  $R_t$ , полученные всеми тремя методами. На графике по оси абсцисс отложена безразмерная величина  $(R_t - R_p) / R_p \cdot 100\%$ , отражающая относительную разницу радиусов поршня и центральной части беговой дорожки в процентах. В области значений этой разности, где нарушается неравенство (13) и оценка Герца

теряет свою справедливость, соответствующая кривая переходит из сплошной в прерывистую линию. При варьировании величины  $R_t$  остальные параметры профиля беговой дорожки не изменялись и были приняты следующими:  $R_c = R_p / 2, \theta = \pi / 2$ . Данные зависимости приведены для трех значений прижимающего усилия  $P = 50$  кН, 100 кН и 200 кН.

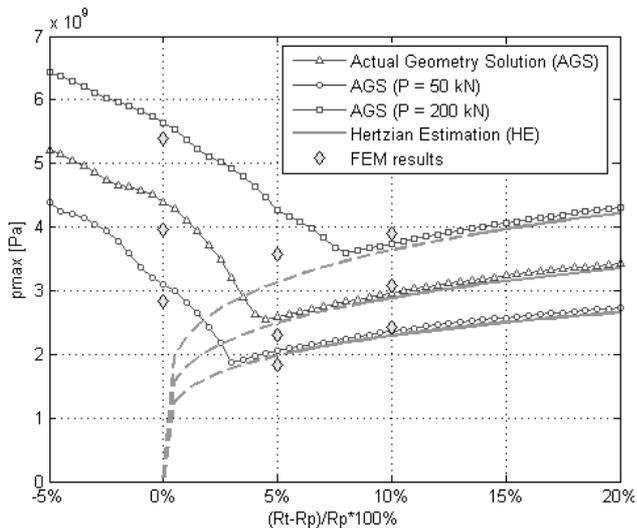


Рис. 8 – Зависимости значений максимальных контактных давлений от относительной разности радиусов желоба и поршня для трех различных нагрузок ("МГИУ-AGS", "ГОП-Н", ANSYS) ( $R_c = R_p / 2, \theta = 15^\circ$ )

Полуаналитический метод граничных уравнений применяется в виде программы "МГИУ", в которой была записана функция зазора между шаром и беговой дорожкой в виде (13). Приведенные на рис. 9 распределения контактных давлений на оси  $Ox$ , полученные полуаналитическим методом для значений  $R_t$ , равных  $0.8 R_p, 0.9 R_p, 1.0 R_p, 1.1 R_p$  и  $1.2 R_p$ , в случае действия прижимающего усилия  $P = 100$  кН, объясняют характер исследуемой зависимости, отображенной на рис. 8. Видно, что по мере приближения радиуса желоба беговой дорожки к радиусу поршня ширина пятна контакта увеличивается, что является следствием уменьшения зазора между их поверхностями. При этом распределение контактных давлений теряет герцевскую форму с выходом пятна контакта на скругления, когда разница между радиусами становится малой. В частности, при совпадающих  $R_p$  и  $R_t$ , для которых теория Герца предсказывает бесконечную ширину зоны контакта, действительное распределение принимает вид, показанный на рис. 9 с двумя пиками давления в местах перехода желоба в скругление. При дальнейшем уменьшении радиуса  $R_t$  величина этих пиковых значений продолжает расти, а давление в центральной части дорожки уменьшается. В конечном итоге пятно контакта раздваивается. Происходит это во всех случаях, когда  $R_t < R_p$  и первоначальный контакт поршня с беговой дорожкой осуществляется в двух

точках, а прижимающее усилие недостаточно велико. Использование профилей с такой конфигурацией контакта лишено смысла, поскольку оно приводит к излишней концентрации напряжений в сопряжении поршня со статором. С другой стороны, придание профилю беговой дорожки статора ГОП в центральной ее части кривизн, достаточно близких к кривизне поверхности поршня, представляется действенным способом понижения контактных давлений (см. рис. 8). При этом величина их концентрации на скруглениях при действии повышенных нагрузок является определяющей при выборе рациональных значений параметров профиля дорожки, в частности, радиуса  $R_t$ .

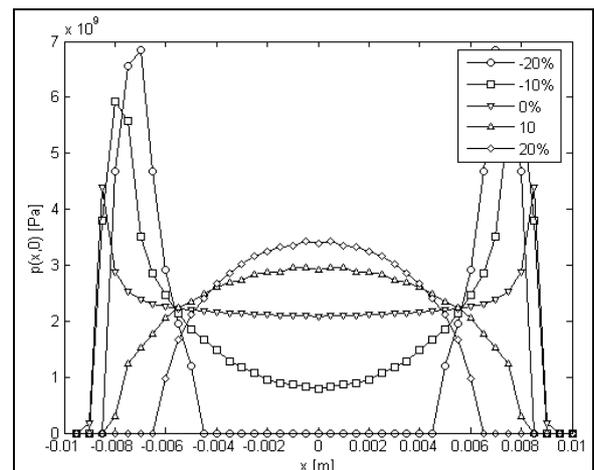


Рис. 9 – Распределения контактных давлений на оси  $Ox$  для значений радиуса желоба, больших и меньших радиуса поршня ("МГИУ")

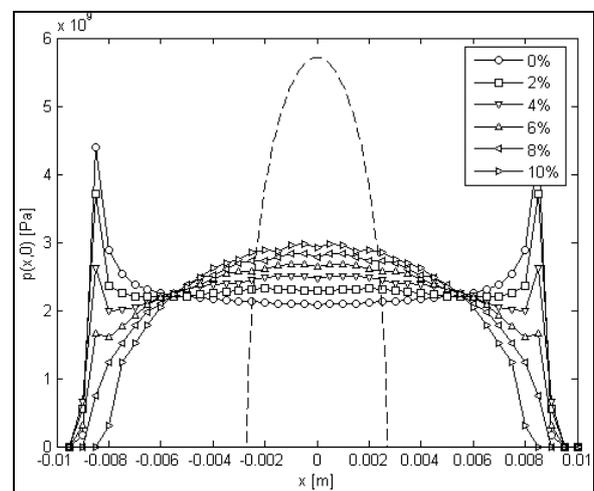


Рис. 10 – Распределения контактных давлений на оси  $Ox$  при малых значениях разности радиусов желоба и поршня в сравнении с аналогичным распределением в случае статорного кольца с цилиндрической поверхностью ("МГИУ")

На рис. 10 приведены распределения контактных давлений в сопряжении поршня со статорным кольцом, пребывающих под действием прижимающего усилия  $P = 100$  кН, для значений относительной разности радиусов  $R_t$  и  $R_p$ , изменяющихся в пределах от

0% до 10%. Видно, что с уменьшением этой разности максимум контактных давлений перемещается из центральной точки пятна контакта к его краям в район скруглений. Тем не менее, даже эта концентрация приводит к возникновению контактных давлений, меньших, чем те, которые имеют место при взаимодействии поршня со статором с цилиндрической внутренней поверхностью. На рис. 10 их распределение для заданного ранее значения  $P$  изображено прерывистой линией. Кроме того, эти пиковые значения контактного давления можно ограничить при известной величине максимального прижимающего усилия, действующего на поршень при работе передачи, соответствующим выбором радиуса желобка дорожки  $R_t$ , используя

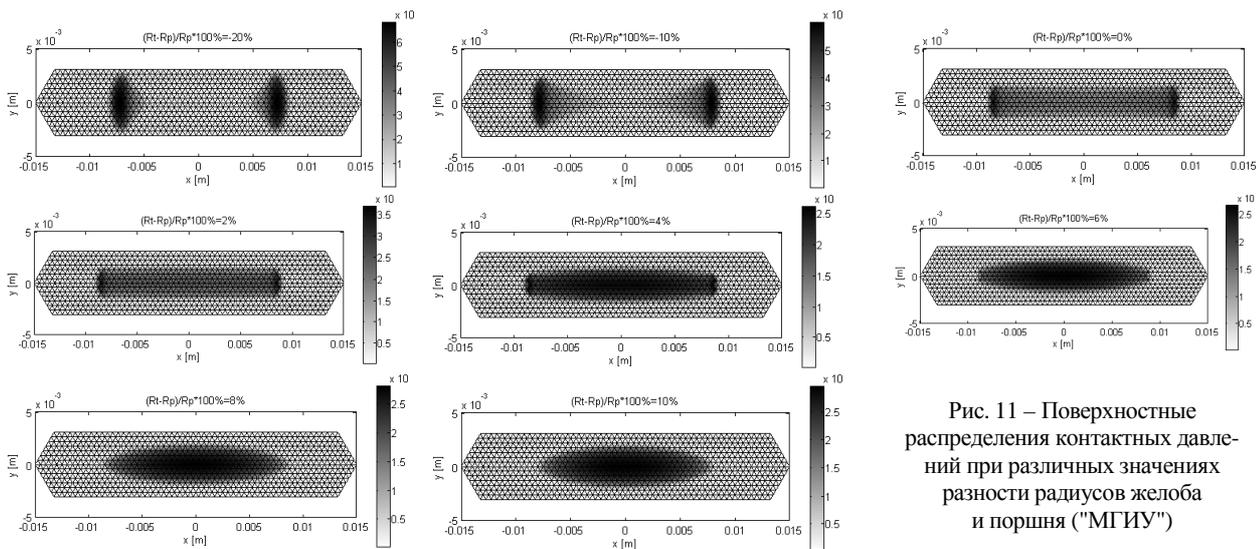


Рис. 11 – Поверхностные распределения контактных давлений при различных значениях разности радиусов желоба и поршня ("МГИУ")

Влияние скруглений сказывается лишь тогда, когда вследствие малой разности между радиусами  $R_t$  и  $R_p$  зазор между поршнем и поверхностью беговой дорожки в направлении оси  $x$  становится настолько малым, что при заданном усилии  $P = 100$  кН, для которого найдены приведенные на рис. 12 распределения, длина вытянутой полуоси пятна контакта превосходит ширину центрального участка беговой дорожки. На рис. 9 верхней границе зоны таких значений относительной разности радиусов для различных значений прижимающих усилий соответствуют точки перехода линии герцевских оценок максимальных контактных давлений из сплошной в прерывистую. Там же видно, что даже в этой зоне для довольно широкого диапазона значений относительной разности радиусов кривая зависимости, предсказанная теорией Герца, хорошо согласуется с более точными оценками, учитывающими реальную геометрию контактирующих тел. Для большого числа пограничных случаев наличие скруглений приводит лишь к малым отклонениям распределения контактного давления от герцевского (см. рис. 11). В остальных ситуациях форма пятна контакта существенно отличается от эллиптической.

Изменение формы контактной площадки с увеличением прижимающего усилия можно проследить на

зависимости типа приведенных на рис. 8.

Полнее оговоренную ранее закономерность раскрывают картины распределений контактных давлений в плоскости  $Oxy$ , приведенные ниже на рис. 11 для набора выбранных значений  $R_t$ . Эта серия поверхностных распределений объединяет в себе результаты, представленные на рис. 9, 10. Ее анализ позволяет определить характер зависимости формы пятна контакта от величины радиуса желобка беговой дорожки и подтверждает сделанные ранее выводы относительно пределов, в которых контакт поршня со статором остается герцевским, а также положения точек максимального контактного давления и его значения.

примере одного частного варианта профиля беговой дорожки с параметрами:

$$R_t = 1,05 R_p, R_c = R_p / 2, \theta = \pi / 12.$$

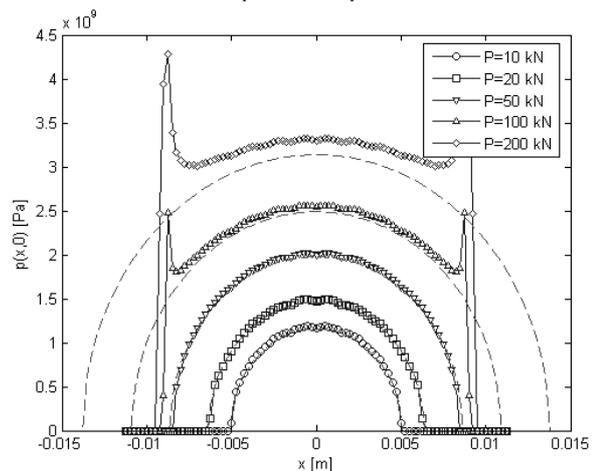


Рис. 12 – Распределения контактных давлений на оси  $Ox$  для различных прижимающих усилий на беговой дорожке с параметрами  $R_t = 1.05R_p$ ,  $R_c = 0.5R_p$ ,  $\theta = 15^\circ$  ("МГИУ")

Распределение контактных давлений на оси  $Ox$  и в контактной плоскости, полученные МГИУ для значений нагрузки, действующей со стороны поршня на

статор, равных 10 кН, 20 кН, 50 кН, 100 кН и 200 кН, приведены на рис. 12, 13. На рис. 13 прерывистыми линиями изображены распределения, предсказываемые для этих величин усилий теорией Герца. Они хорошо согласуются с кривыми, построенными с применением МГИУ, при малых значениях  $P$ . Однако видно, что с распространением контакта на скругления рассчитанные распределения все больше отклоняются от герцевских.

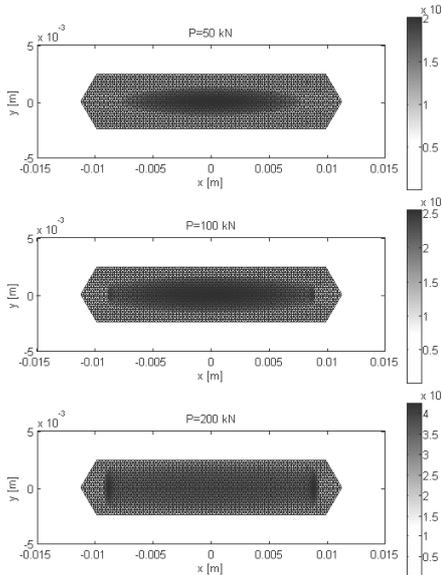


Рис. 13 – Распределения контактных давлений для различных прижимающих усилий на беговой дорожке с параметрами

$$R_t = 1.05R_p, R_c = 0.5R_p, \theta = 15^\circ \text{ ("МГИУ")}$$

Для проверки приведенных выше результатов, полученных исключительно полуаналитическим методом, производится моделирование МКЭ ограниченного набора вариантов ГОП с различными параметрами беговых дорожек. Ниже представлены результаты расчетов, выполненных для уже рассмотренных вариантов профилей, у которых отличие радиуса желоба от радиуса поршня составляет 0%, 5 % и 10 %. Для их получения была построена параметрическая конечно-элементная модель (КЭМ) в САЕ-системе ANSYS Workbench со сгущением сетки в районе контакта (рис. 14). В силу наличия симметрии в системе "поршень – статор" моделировался лишь ее сегмент, ограниченный двумя плоскостями симметрии  $Oxz$  и  $Oyz$ . Размеры контактных элементов и элементов в зоне сгущения были выбраны такими же, что и размеры треугольной сетки, использованной при получении результатов, представленных на рис. 8–13.

Картинки распределения контактных давлений при действии прижимающих усилий 50 кН, 100 кН и 200 кН, полученных для профиля с радиусом центральной части, превышающим радиус поршня на 5%, приводятся на рис. 15. Сравнение их с аналогичными распределениями, определенными полуаналитическим методом (см. рис. 13), показывает хорошее качествен-

ное и количественное совпадение результатов. На рис. 8 представлены значения максимальных контактных давлений для всех трех рассматриваемых вариантов беговой дорожки, полученные с помощью данной параметрической конечно-элементной модели (КЭМ). Они также согласуются с кривыми зависимости значений максимального контактного давления от относительной разности радиусов желоба и поршня, рассчитанными с применением полуаналитического метода, что позволяет сделать вывод о его применимости для анализа контактного взаимодействия ГОП с беговыми дорожками рассмотренного типа.

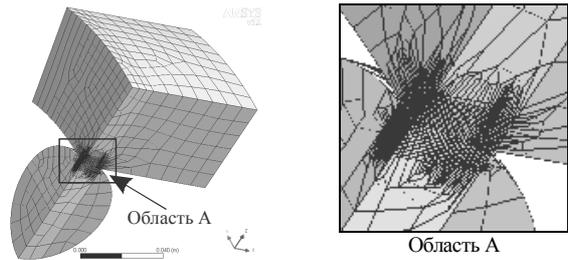


Рис. 14 – Конечно-элементная модель сегмента системы "поршень – статор" со сгущением в районе контакта

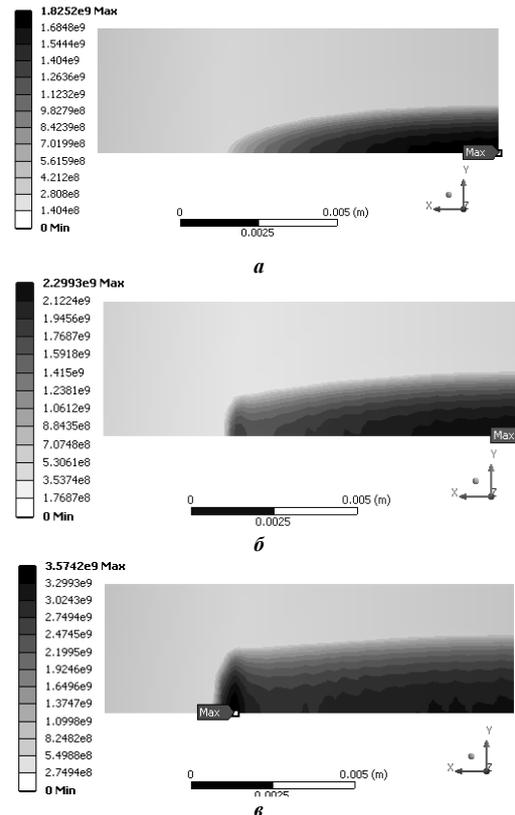


Рис. 15 – Распределения контактных давлений на беговой дорожке статора с радиусом желоба, на 5% превышающим радиус поршня, для значений прижимающего усилия:  $a$  – 50 кН,  $б$  – 100 кН,  $в$  – 200 кН (ANSYS)

Построенная КЭМ служит не только для подтверждения результатов многовариантных расчетов, производимых другими методами, но и для проведения более полного анализа НДС полученных в ходе пара-

метрического поиска вариантов конструкции. Здесь помимо контактных давлений интерес также представляют распределения напряжений и деформаций, а также их концентрация в зоне контакта (рис. 16).

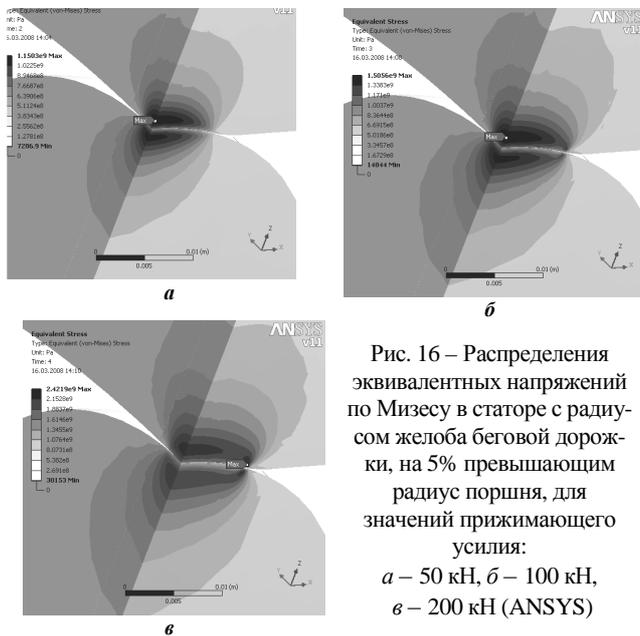


Рис. 16 – Распределения эквивалентных напряжений по Мизесу в статоре с радиусом желоба беговой дорожки, на 5% превышающим радиус поршня, для значений прижимающего усилия:  
а – 50 кН, б – 100 кН, в – 200 кН (ANSYS)

Таким образом, на примере частного класса профилей беговых дорожек было продемонстрировано применение предложенного подхода к синтезу и анализу деталей сложной формы. В его рамках анализ контактного взаимодействия тел различной формы производится несколькими методами с использованием различных компонент специализированного программно-модельного комплекса (СПМК), реализующих полуаналитический метод (программа "МГИУ"), метод Герца ("GOP-H") и МКЭ (ANSYS).

Предварительное их сравнение на серии тестовых задач позволило выделить области и порядок их применения, что дает возможность в дальнейшем обоснованно использовать их как инструмент анализа, встроенный в общий исследовательский цикл при проектировании ГОП с повышенной нагрузочной способностью и долговечностью их подвижных элементов, таких как поршни гидронасоса (ГН) и гидромотора. Вместе с этим рассмотрен ряд частных вопросов выбора параметров беговых дорожек ГОП, в частности, зависимости величины концентрации контактных давлений на ее скруглениях при действии повышенных нагрузок в системе "поршень – статор".

**Моделирование напряженно-деформированного состояния корпуса гидронасоса ГОП-900.** Корпус гидронасоса (КГН) ГОП-900 представляет собой конструкцию сложной формы, подвергающуюся действию целого комплекса силовых факторов: давления рабочей жидкости; центробежных сил; сил контактного взаимодействия шаровых поршней; усилий предварительного натяга втулок; усилий статической разгрузки. Формы и размеры самого корпуса определяются

множеством конструктивных параметров, образующих пространство варьируемых параметров. Кроме того, само силовое воздействие на КГН определяется на основе исследования динамического взаимодействия различных элементов конструкции.

Таким образом, сама "природа" конструкции и специфика решаемой задачи предопределяет необходимость разработки комплексного подхода к ее решению. При этом необходимо провести математическую формализацию численного метода конечных элементов для анализа напряженно-деформированного состояния КГН, разработать математические модели силового взаимодействия элементов конструкции ГОП, а также в конечном итоге построить комплексную функциональную математическую модель для исследования прочности и жесткости корпуса гидронасоса в общем виде.

Анализ силовых потоков в ГОП-900 показывает, что одним из наиболее нагруженных и ответственных элементов данной передачи является корпус гидронасоса. Он непосредственно воспринимает действия крутящего момента, давления в рабочих цилиндрах, силового воздействия шаровых поршней, давления статической разгрузки, усилий в сопряжении со втулкой, а также объемных сил, вызванных высокими частотами вращения входного вала. Ротор испытывает в результате сложное напряженно-деформированное состояние. При этом в каждой точке ротора характер распределения напряжений во времени соответствует асимметричному многоцикловому нагружению. Как раз этой пульсацией напряжений во многом определяется выносливость материала корпуса (блока цилиндров) гидропередачи. Поскольку наиболее высокому уровню эксплуатационных нагрузок соответствуют установившиеся режимы работы ГОП-900 (или сравнительно медленно изменяющиеся), преобладающие нагрузки можно рассматривать как квазистатические.

С учетом того, что блок цилиндров гидронасоса имеет сложную геометрическую форму и сложные законы нагружения, для определения его напряженно-деформированного состояния необходимо привлекать численные методы, в частности, МКЭ.

Соотношения метода конечных элементов в конкретном случае исследования НДС корпуса гидронасоса ГОП-900 необходимо дополнить специфическими соотношениями, которые отображают основные конструктивные, технологические и эксплуатационные параметры: давление рабочей жидкости; действие центробежных сил от вращения блока цилиндров; контактное взаимодействие всех элементов системы "корпус – поршень – статорное колесо"; усилия предварительного натяга втулок в корпусе гидронасоса.

Для определения параметров силового воздействия в исследуемой гидрообъемной передаче можно использовать результаты исследований, описанных в работах [27, 28]. Однако предпочтительным является путь, сочетающий рассмотрение процесса динамического взаимодействия и исследования НДС всех составных частей единого исследовательского процесса в рамках взаимосвязанных математических

моделей. В связи с этим предлагается модель динамического взаимодействия "статор – поршень – цилиндр", естественным образом интегрированная в разрабатываемую комплексную математическую модель для исследования прочности и жесткости корпуса гидронасоса ГОП-900. Ниже приведены методика математического моделирования движения поршня, методика создания семейства параметрических 3D-моделей, а также методика конечно-элементного моделирования НДС корпуса гидронасоса ГОП.

Для исследования НДС корпуса радиальной гидрообъемной передачи [26] как элемента сложной механической системы необходимо определить силы, действующие на одни элементы ГОП со стороны других, в частности, на поршень насоса или мотора, которые непосредственно взаимодействуют с рабочей жидкостью передачи. При решении этой задачи нужно рассмотреть несколько вопросов. Прежде всего, следует определить кинематическое поведение механической системы, описать все возможные режимы работы.

Рассмотрим систему тел, условно изображенную на рис. 17. Поршень (шар на рисунке) может двигаться вдоль образующих цилиндра ротора. При этом ротор вращается вдоль оси, перпендикулярной плоскости рисунка, а поршень прижимается давлением масла к статору. Кроме поступательного, поршень совершает вращательное движение. Силы и параметры движения находятся в предположении, что ротор вращается с постоянной угловой скоростью и эксцентриситет передачи постоянен.

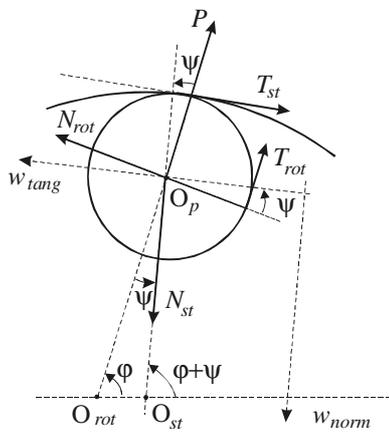


Рис. 17 – Схема действия сил на поршень ГОП:

- $P$  – сила давления масла на поршень;  $T_{st}$  – сила трения поршня о статор;  $T_{rot}$  – сила трения поршня о ротор;
- $N_{st}$  – сила реакции статора;  $N_{rot}$  – сила реакции ротора;
- $O_{st}$  – центр статора;  $O_{rot}$  – центр ротора;
- $O_p$  – центр поршня

Из предположений о движении ротора и устройства передачи (см. рис. 17) вытекает, что  $\varphi = \omega_r \cdot t$ , где  $t$  – время,

$$\sin(\psi) = \frac{\delta \cdot \sin(\varphi)}{R_{sp}} \Rightarrow \psi \approx \frac{\delta \cdot \sin(\varphi)}{R_{sp}} (\delta \ll R_{sp}).$$

Здесь  $\omega_r$  – угловая скорость вращения ротора.

Рассматривая поступательное движение центра поршня по окружности с центром в  $O_{st}$ , приходим к выводу, что оно полностью задается углом  $\varphi$  наклона оси, соединяющей центры ротора и поршня к горизонтали. Угловая скорость и ускорение вращения центра поршня в его движении вокруг  $O_{st}$  равны производным по времени этого угла:

$$\begin{aligned} \omega_p &= \frac{d}{dt}(\varphi + \psi) = \omega_r + \frac{d}{dt}(\arcsin(\frac{\delta \cdot \sin(\varphi)}{R_{sp}})) \approx \\ &\approx \omega_r + \frac{\delta \cdot \omega_r \cdot \cos(\varphi)}{R_{sp}}; \\ \varepsilon_p &= \frac{d^2}{dt^2}(\varphi + \psi) \approx -\frac{\delta \cdot \omega_r^2 \cdot \sin(\varphi)}{R_{sp}}. \end{aligned}$$

Здесь  $\delta$  – расстояние между  $O_{st}$  и  $O_{rot}$  (эксцентриситет);  $R_{sp}$  – расстояние между  $O_{st}$  и  $O_p$ .

Из этих величин по известным соотношениям получаются нормальная и тангенциальная составляющие ускорения поступательного движения поршня. Среди характеристик поступательного движения, которые можно определить из кинематических соотношений, полезной является функция удаления центра поршня от центра ротора

$$\rho = \text{dist}(O_{rot}, O_p) = \sqrt{R^2 + \delta^2 + 2 \cdot \delta \cdot R \cdot \cos(\varphi + \psi)},$$

которая описывает перемещение поршня по цилиндру и, соответственно, высоту нагруженной высоким давлением части цилиндра. Характер зависимости функции хода поршня от значения эксцентриситета представлен на рис. 18.

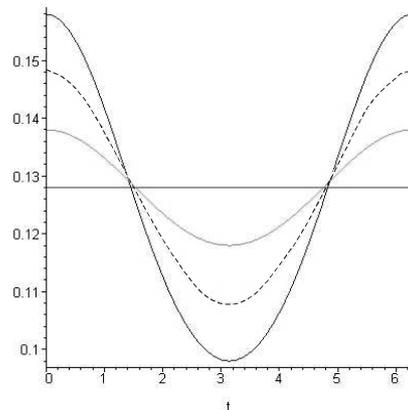


Рис. 18 – Общий вид функции расстояния  $\rho$  от угла при различных значениях эксцентриситета

Поршень также вращается относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка, проходящей

через точку  $O_p$ . Параметры этого движения (угловая скорость  $\omega_{sp}$  и угловое ускорение  $\varepsilon_{sp}$ ) находятся из кинематических соотношений лишь в случае, когда поршень катится по поверхности статора, т.е. точка касания поршня о статор неподвижна относительно статора. В этом случае

$$\omega_{sp} = -\frac{R_{sp}}{R_p} \omega_p, \varepsilon_{sp} = -\frac{R_{sp}}{R_p} \varepsilon_p. \quad (14)$$

При определении параметров возможного проскальзывания в сопряжении поршень-статор приняты следующие предположения: считается, что в моменты времени, соответствующие углу  $\alpha = \varphi + \psi = 90^\circ$ , проскальзывание отсутствует (это обосновано тем, что в этом положении необходимая для удержания от проскальзывания сила наименьшая, а прижимающая сила велика, как это следует из динамического анализа); также предполагается, что при обороте ротора проскальзывание наблюдается не более, чем на одном промежутке, находящемся целиком внутри периода ( $90^\circ - 270^\circ$ ). Кинематика поршня на промежутке проскальзывания непосредственно связана с динамикой исследуемого механизма. Саму же возможность проскальзывания можно оценить в предположении, что оно не наблюдается, сопоставляя результаты с критерием проскальзывания. Ниже приводятся результаты параметрического анализа, проведенного в рамках этой модели.

Прежде, чем решать задачу динамики поршня под действием всех сил, изображенных на рис. 17, можно сделать ее приближение, в котором пренебрегаются силы трения (рис. 19). Вращением поршня вокруг своей оси также пренебрегается, т.к. оно связано с силами трения, исключенными из рассмотрения в этой постановке. В этом случае все силы – центральные по отношению к центру поршня, и неизвестные реакции вычисляются по известным давлению и составляющим ускорения

$$\left. \begin{aligned} N_{st} - N_{rot} \cdot \sin(\psi) - P \cdot \cos(\psi) &= m_p \cdot w_{norm} \\ N_{rot} \cdot \cos(\psi) - P \cdot \sin(\psi) &= m_p \cdot w_{tan} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (15)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_{st} = N_{rot} \cdot \sin(\psi) + P \cdot \cos(\psi) + m_p \cdot w_{norm} \\ N_{rot} = \frac{P \cdot \sin(\psi) + m_p \cdot w_{tan}}{\cos(\psi)}. \end{cases}$$

Если дополнительно пренебречь инерциальными силами, то приближенные выражения для искомых реакций принимают наиболее простой вид:

$$N_{st} = \frac{P}{\cos(\psi)}, \quad N_{rot} = P \cdot \operatorname{tg}(\psi). \quad (16)$$

Эти формулы можно использовать для оценки порядка величины действующих нагрузок в системе. Кроме этого из приближенных выражений (14)–(16) можно получить характер изменения этих нагрузок, а

также оценить их предельные значения.

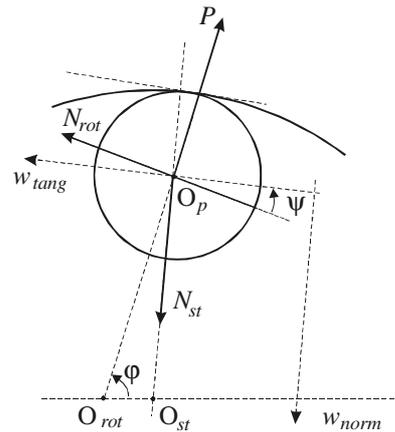


Рис. 19 – Схема сил в приближенной динамической модели

Приведенные выше приближенные формулы вычисления реакций статора и ротора не учитывают многих параметров, влияющих на систему. Учет всех сил, изображенных на рис. 17, и определение трения в системе входит в общую постановку задачи динамики поршня в рамках рассматриваемой физической модели. Для ее решения записывается условие равновесия поршня: равенство нулю моментов и проекций всех сил, в том числе и инерциальных. Силы проектируются на направления нормальной и тангенциальной составляющих ускорения поршня, центр масс которого движется по окружности, концентричной стенке статора. Таким образом, имеется три основных уравнения для сил и моментов:

$$T_{rot} - T_{st} = \frac{\varepsilon_{sp} \cdot I_p}{R_p}, \quad (17)$$

$$N_{st} - N_{rot} \cdot \sin(\psi) - (P + T_{rot}) \cdot \cos(\psi) = m_p \cdot w_{norm}, \quad (18)$$

$$N_{rot} \cdot \cos(\psi) - (P + T_{rot}) \cdot \sin(\psi) - T_{st} = m_p \cdot w_{tan}. \quad (19)$$

Эти соотношения содержат множество неизвестных величин и недостаточны для их определения. Связь между величинами в уравнениях (17)–(19) зависит от типа контакта поршня со статором. Поршень либо катится по поверхности статора, либо проскальзывает, т.е. относительная скорость точки контакта отлична от нуля. Соответственно, рассматриваются два случая:

1) *поршень движется без скольжения.* В этом случае угловое ускорение поршня определяется соотношением (14). Для остальных величин имеем систему линейных уравнений, из которой они вполне легко находятся:

$$N_{rot} = \frac{m_p \cdot w_{tan} - \frac{\varepsilon_{sp} \cdot I_p}{R_p} + P \cdot \sin(\psi)}{\cos(\psi) - \mu_p (\sin(\psi) + 1)}, \quad (20)$$

$$T_{st} = \mu_p \cdot N_{rot} - \frac{\varepsilon_{sp} \cdot I_p}{R_p}, \quad (21)$$

$$N_{st} = m_p \cdot w_{norm} + N_{rot} (\sin(\psi) + \mu_p \cdot \cos(\psi)) + P \cdot \cos(\psi), \quad (22)$$

где  $\mu_p$  – коэффициент трения поршня о ротор.

2) поршень движется, скользя по поверхности статора. В этом случае трение поршня о статор выражается через реакцию:

$$T_{st} = \mu_{st} \cdot N_{st}. \quad (23)$$

где  $\mu_{st}$  – коэффициент трения поршня о статор.

Для остальных неизвестных сил и ускорения имеем:

$$N_{rot} = \frac{\mu_{st} \cdot m_p \cdot w_{norm} + m_p \cdot w_{tan} + P(\mu_{st} \cdot \cos(\psi) + \sin(\psi))}{\cos(\psi) \cdot (1 + \mu_{st} \cdot \mu_p) - \sin(\psi) \cdot (\mu_{st} + \mu_p)}, \quad (24)$$

$$N_{st} = m_p \cdot w_{norm} + N_{rot} (\sin(\psi) + \mu_p \cdot \cos(\psi)) + P \cdot \cos(\psi), \quad (25)$$

$$\varepsilon_{sp} = -\frac{R_p}{I_p} (\mu_p \cdot N_{rot} - \mu_{st} \cdot N_{st}). \quad (26)$$

Критерий того, что поршень движется относительно статора без скольжения, следующий:  $T_{st} < \mu_{st} \cdot N_{st}$ ,  $T_{st}$  – сила трения покоя, определяемая по формуле из первого случая; относительная скорость точки касания со статором равна нулю.

Для того, чтобы определить искомые параметры движения поршня на всем обороте, необходимо отыскать начало скольжения или установить, что его нет. Началом оборота поршня считается момент  $\alpha = 90^\circ$ . Началом скольжения будет первая точка, в которой нарушается критерий. С момента начала скольжения следует, пользуясь формулами (23)–(26), определить угловое ускорение вращения поршня вокруг своей оси, по которому определяется угловая скорость вращения поршня вокруг своей оси. Из последней находится момент остановки скольжения (когда условия критерия станут снова выполняться). Силы реакций и трения вычисляются по формулам (24)–(26) или (23)–(26) в зависимости от принадлежности момента времени найденному интервалу скольжения.

Предложенный подход позволяет в общем случае получать характеристики силового воздействия как функции частоты вращения, рабочего давления, конструктивных характеристик ротора, поршня, статора. В свою очередь полученные характеристики встраиваются в единую параметрическую модель.

Задача повышения тактико-технических характеристик отечественных транспортных средств специального назначения имеет множество аспектов. Одним из наиболее важных направлений при решении данной

актуальной научно-технической проблемы является математическое моделирование физико-механических процессов и напряженно-деформированного состояния элементов радиальной гидрообъемной передачи. Этому посвящены, в частности, работы [29–31]. В то же время этапы моделирования динамических процессов в ГОП и исследования НДС разрознены. В данной работе предлагается подход, позволяющий интегрировать данные этапы в едином процессе моделирования, а также освещены некоторые подходы к исследованию динамики поршня и определения прочностных и жесткостных характеристик корпуса гидронасоса ГОП.

В частности, все геометрические размеры элементов ГОП-900 являются конструктивными параметрами, которые могут быть изменены в процессе проектирования на том или ином шаге. Они (а также технологические, эксплуатационные и другие параметры) определяют параметрическое пространство, каждой точке которого соответствует некоторый набор параметров ротора гидронасоса ГОП-900.

Введя в рассмотрение вектор параметров  $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}^T$ , соответствующих указанным выше для ротора гидронасоса, можно формально записать систему ограничений, накладываемых на параметры  $p_i$  из конструктивных, технологических соображений и эксплуатационных требований:  $G_i(\mathbf{p}) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ ,  $F_j(\mathbf{p}) \geq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Данная система ограничений описывает во введенном параметрическом пространстве некоторую область  $P$ . Для однозначного определения рационального набора параметров  $\mathbf{p}^*$  необходимо сформулировать

- уравнения состояния, описывающие физические процессы в роторе  $S(\mathbf{p}, \mathbf{e}, \mathbf{x}, t) = 0$ , где  $\mathbf{e}$  – вектор физико-механических параметров и эксплуатационных характеристик;  $\mathbf{x}$  – пространственные координаты;  $t$  – время;
- систему ограничений, обусловленных свойствами материала и требованиями, предъявляемыми к исследуемой конструкции;
- целевую функцию, минимизация (максимизация) которой дает значения искомых параметров.

Специфика параметрической модели и исследуемой задачи определения НДС корпуса ротора состоит в том, что проектировщики достаточно стеснены при варьировании конструктивных параметров. Значения параметров  $p_i$  диктуются в основном заданием габаритных ограничений и эксплуатационных требований. Свобода выбора состоит в незначительном варьировании параметров в области их номинальных значений, и, при необходимости, изменении схемы конструктивного исполнения.

При моделировании нагрузок на корпус ротора гидронасоса (рис. 20) были выбраны следующие определяющие параметры: угол поворота ротора  $\varphi$ ; величина давления рабочей жидкости на стороне высокого давления  $p_в$  и на стороне низкого давления  $p_н$ ; ко-

эффицент трения в сопряжении шара с поверхностью цилиндра  $k_{ц}$  и с поверхностью беговой дорожки  $k_{д}$ ; величина натяга  $\Delta_{г}$  в сопряжении распределительная втулка – корпус ротора гидронасоса; величина передаваемого крутящего момента  $M_{кр.}$ ; угловая скорость вращения ротора гидронасоса  $\omega_p$ .

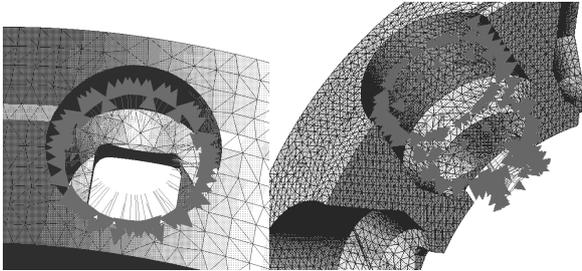


Рис. 20 – Моделирование внутреннего давления на корпус гидронасоса

Выделены следующие составляющие силового воздействия:

$F_1 = F_1(P_g, P_n, \varphi)$  – внутреннее давление  $P_g$  ( $P_n$ ), действующее на каждом из 9 цилиндров (на рис. 20 представлены варианты распределения данных усилий, в зависимости от угла поворота ротора изменяется длина нагруженной части каждого цилиндра; поверхностная нагрузка  $F_1$  соответствует набору узловых усилий, направленных по нормали к нагруженному участку поверхности).

$F_2$  – объемно-массовая нагрузка, обусловленная вращением ротора:  $F_2 = F_2(\omega_p)$

$F_3 = F_3(P_g, P_n, \varphi, K_{ц}, K_{д})$  – усилия сопряжения шаров с цилиндрами (локальная нагрузка, обусловленная данными усилиями, передается по площадкам контакта, которые уточняются в процессе решения соответствующей контактной задачи).

$F_4 = F_4(\Delta_{г})$  – усилие, обусловленное натягом  $\Delta_{г}$  в сопряжении втулка–корпус. Распределение нагрузки может быть получено при исследовании совместного деформирования втулки и корпуса.

$F_5 = F_5(P_g)$  – усилие статической разгрузки (вид распределения данного давления обусловлен конструктивным исполнением сопряжения вал–втулка).

$F_6 = F_6(M_{кр.})$  – крутящий момент, передаваемый через штифты на корпус гидронасоса.

Совокупная нагрузка представляет собой сумму усилий  $F_i$ . Таким образом, построена комплексная математическая модель исследуемого корпуса гидронасоса ГОП-900, объединенная единым параметрическим подходом.

**Численное исследование напряженно-деформированного состояния и выбор рациональных параметров корпуса гидронасоса гидрообъемной передачи.** Численное исследование напряженно-

деформированного состояния корпуса гидронасоса ГОП-900 является одной из составляющих всего комплекса исследований, на основе которых производится обоснованный выбор конструктивной схемы, конструктивных, технологических и эксплуатационных параметров ГОП [28–30].

При этом в силу специфики исследуемой конструкции необходимо рассматривать следующие аспекты проблемы:

- исследовать влияние отдельных силовых факторов на характеристики напряженно-деформированного состояния КГН;
- исследовать НДС корпуса гидронасоса при различных вариантах действия эксплуатационных нагрузок;
- провести исследование взаимного влияния напряженно-деформированного состояния отдельных цилиндров на НДС соседних цилиндров;
- определить влияние конструктивных схем исполнения корпуса гидронасоса на его НДС;
- провести анализ результатов и разработать рекомендации по выбору конструктивных схем и рациональных параметров гидрообъемных передач.

*Комплексный анализ напряженно-деформированного состояния корпуса гидронасоса* производится при помощи различных программных комплексов с использованием конечных элементов призматического и тетраэдрального типов (рис. 21, 22). Корпус гидронасоса представляет собой циклически симметричную конструкцию, находящуюся в условиях несимметричного динамического нагружения. С учетом условий эксплуатации для оценки напряженно-деформированного состояния было решено провести анализ в квазистатической постановке, т.е. рассмотреть статическое нагружение в различных фазах вращения, при этом детально смоделировать распределение нагрузки по цилиндрам насоса. Особое значение придавалось распределению давления масла в цилиндре, которое определяется положением шара в нем. Перемещение шара носит непрерывный характер, а давление при расчете МКЭ задается по стороне конечного элемента. Так как измельчение конечно-элементной сетки приводит к резкому возрастанию размерности модели, смещение шара в цилиндре было разбито на 15 фаз, по  $1,5 \cdot 10^{-2}$  м каждая.

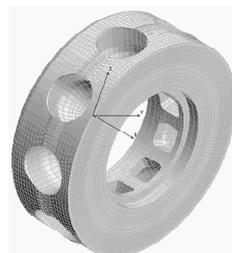


Рис. 21 – Конечно-элементная модель корпуса гидронасоса

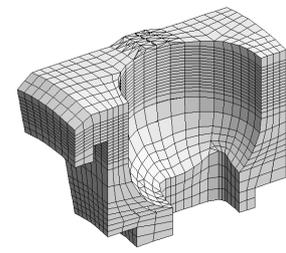


Рис. 22 – Виды конечно-элементной модели одного цилиндра (симметричная часть)

При моделировании условий закрепления вращающегося корпуса необходимо было учесть сложность

нагрузки. Виды нагрузок, действующих на корпус, описаны выше, но при этом необходимо учесть, что внутреннее давление действует на каждой фазе в части цилиндров. Причем их число меняется – 5 или 4. Для оценки характера контакта корпуса с неподвижными элементами осевой части предварительно была решена контактная задача в упрощенной постановке. Рассматривалось плоско-напряженное состояние для радиального сечения корпуса. Результаты расчета показали, что контакт наблюдается только на тех участках корпуса, где действует давление в цилиндрах. Исходя из этого, была принята схема закрепления корпуса, приведенная на рис. 23. По части колеса, контактирующей с осевой частью системы, на участке, соответствующем цилиндрам под давлением, было запрещено радиальное перемещение. По зубчатому зацеплению с подвижной частью системы были запрещены перемещения в плоскости колеса. На линии внешней границы зубчатого зацепления были запрещены все перемещения.

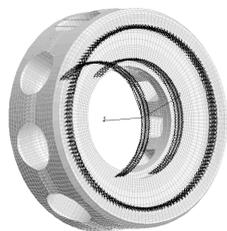


Рис. 23 – Модель закрепления корпуса насоса при действии давления в 5-ти цилиндрах

На корпус гидронасоса действуют три компоненты нагрузки: давление шара на стенку цилиндра, высокое рабочее давление масла в группе цилиндров (5 или 4), центробежная нагрузка при вращении.

Для оценки вклада каждой компоненты была проведена серия расчетов при различных комбинациях нагрузки при максимальных значениях. Давление шара моделировалось сосредоточенной нагрузкой, величины которой приведены в табл. 1. Ниже в таблице приведен характер действующего нагружения и значения максимальных напряжений и перемещений. Как видно, давление шара практически не влияет на максимальные перемещения.

Таблица 1 – Характер действующего нагружения и значения максимальных напряжений и перемещений

№ вар.	$\omega$ , рад/с	Давление $P$ , Н/м <sup>2</sup>	Давление шаров $F$	$\sigma_{\max}$ , Н/м <sup>2</sup>	$\delta_{\max}$ , м
1	314	$35 \cdot 10^6$	есть	$6,98 \cdot 10^8$	$38,4 \cdot 10^{-6}$
2	314	$35 \cdot 10^6$	нет	$2,2 \cdot 10^8$	$38,8 \cdot 10^{-6}$
3	Нет	$35 \cdot 10^6$	нет	$1,88 \cdot 10^8$	$36,0 \cdot 10^{-6}$
4	314	нет	нет	$0,47 \cdot 10^8$	$16,1 \cdot 10^{-6}$

При сравнении диаграмм перемещений, приведенных на рис. 24, а и 24, б, видно, что не меняется и картина распределения перемещений. Но для напряжений данная модель взаимодействия шара со

стенкой является определяющей – величина напряжений при учете сосредоточенной нагрузки более чем в 3 раза выше, чем без нее. Однако на картине напряжений рис. 24, а максимум достигнут практически в одной точке, напряжения в остальной части цилиндра несоизмеримы. Данная картина не может соответствовать реальному НДС и является чисто математической.

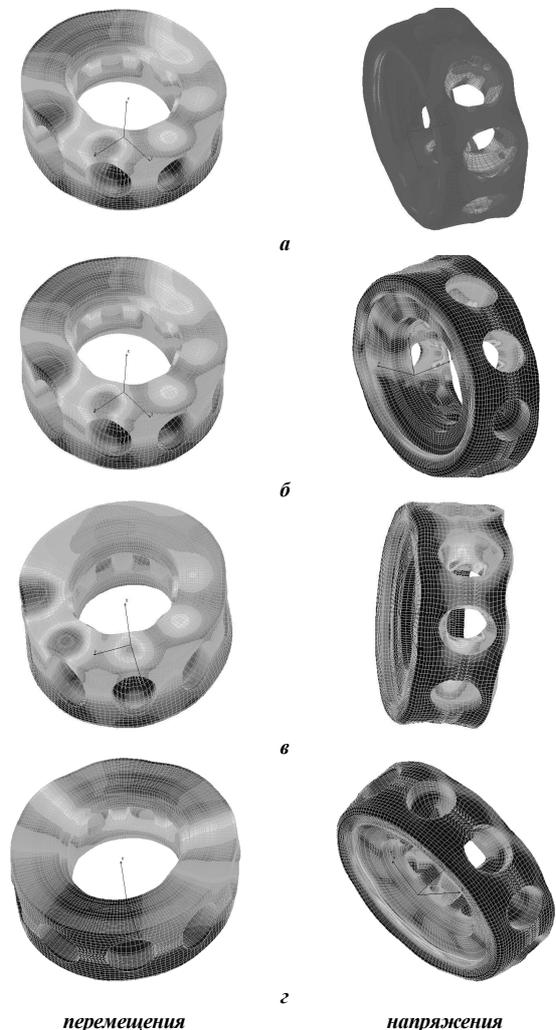


Рис. 24 – Поля перемещений и напряжений: а – при полном нагружении; б – без учета давления шаров; в – при действии только давления масла; г – при действии только центробежной нагрузки

В реальности взаимодействие шара и цилиндра насоса имеет площадку контакта и контактное давление. Данная задача носит нелинейный характер и в настоящей модели реализована не была. Полученный результат можно принять как верхнюю оценку максимально возможных напряжений, а качественную картину распределения напряжений при сосредоточенной нагрузке можно не рассматривать. 3-й и 4-й вариант расчета сделан для анализа вклада давления масла и центробежных сил в результирующую картину НДС.

Сравнение величин максимальных перемещений, приведенных в таблице, показывает, что в данном

случае вклад от центробежных сил незначителен, однако, сравнивая картины перемещений на рис. 24, б–г, видим, что результирующие перемещения являются комбинацией перемещений от этих двух компонент, так как максимумы их находятся на противоположных участках блока цилиндров. Поэтому при другой комбинации величины давления масла и угловой скорости влияние последней может быть определяющей. Сравнивая диаграммы напряжений для этих случаев, видим, что характер картины и величину напряжений определяет давление масла в цилиндрах.

*Анализ напряженно-деформированного состояния корпуса гидронасоса при различных уровнях нагрузки.* Для оценки НДС КГН при различных угловых скоростях вращения, уровнях давления масла, а также величине давления шаров на стенки цилиндра была проведена серия расчетов из 9 вариантов. В основу каждого варианта была взята первая фаза положения шара в цилиндре при варьировании уровнем давления шара на стенку. Величины давления шара на стенку приведены на рис. 25. При этом давление моделировалось сосредоточенной нагрузкой  $F$ , приложенной в центральной точке пятна контакта (см. рис. 22).

Величина смещения шара относительно верхней кромки цилиндра  $\delta$  (см. рис. 21) для каждого варианта приведена на рис. 26. При этом в ней приведены как расчетный вариант смещения, так и реально созданный в конечно-элементной модели. Максимальное отличие между ними не превышает 0,75 мм. Разница определяется минимальным размером стороны КЭ – 1,5 мм.

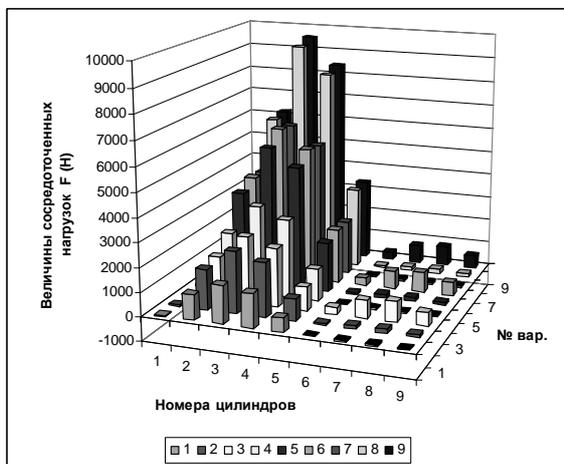


Рис. 25 – Давление шаров на стенки цилиндров, Н

На рис. 26 приведены значения смещений только для 5-ти цилиндров, в которых действовало давление масла на стенки цилиндра.

Величины давления и угловых скоростей приведены в табл. 2. Там же приведены результаты расчета напряжений и перемещений. Значения величин напряжений приведено для интенсивности (по Мизесу). При этом был проведен расчет при учете и без учета сосредоточенной нагрузки для всех вариантов, и напряжения даны для обоих случаев. Надо отметить, что величины напряжений при сосредоточенной нагрузке зна-

чительно завышены, так как в реальности возникает пятно контакта между шаром и стенкой цилиндра. Причем пятно тем больше, чем выше давление шара. Это завышение хорошо видно и по характеру диаграммы напряжений, приведенной на рис. 27. Аналогичные диаграммы были получены и для всех остальных вариантов нагружения.

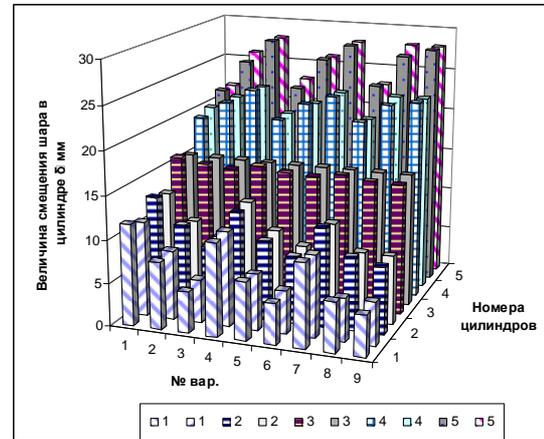


Рис. 26 – Смещение шара в цилиндрах, мкм

Таблица 2 – Величина нагрузки и максимальные значения напряжений и перемещений

№ вар.	$\omega$ , рад/с	Давление $P$ , Н/м <sup>2</sup>	$\sigma_{\max} 10^8$ , Н/м <sup>2</sup>		$\delta_{\max}$ , мкм (без учета F)
			с учетом	без учета	
1	100	$12 \cdot 10^6$	1,2	0,70	10,8
2	200	$12 \cdot 10^6$	1,85	0,77	13,5
3	314	$12 \cdot 10^6$	2,0	0,93	23,5
4	100	$24 \cdot 10^6$	2,75	1,4	21,3
5	200	$24 \cdot 10^6$	4,2	1,45	24,4
6	314	$24 \cdot 10^6$	4,6	1,6	30,3
7	100	$35 \cdot 10^6$	4,6	2,0	32,1
8	200	$35 \cdot 10^6$	6,8	2,1	36,8
9	314	$35 \cdot 10^6$	6,98	2,2	38,8

На рис. 27 приведены диаграммы напряжений и перемещений для случая без учета сосредоточенных нагрузок. Данный случай дает качественную картину НДС, более близкую к реальной. Как видно из диаграмм напряжений, качественная картина напряжений не зависит от комбинации нагрузки, и максимум наблюдается на выходной кромке квадратных отверстий, в месте скруглений углов. Но на характер перемещений комбинация нагружения сказывается значительно. При максимальной угловой скорости  $\omega = 314$  рад/с максимум перемещений наблюдается на ненагруженной давлением масла части колеса насоса (см. диаграммы перемещений, вар. 3, 6 и 9). Только при максимальном давлении на наиболее нагруженном цилиндре насоса (с минимальным смещением шара) достигается равенство перемещений с ненагруженной частью насоса. При минимальной угловой скорости  $\omega = 100$  рад/с, как видно из диаграмм перемещений на рис. 27 (вар. 1, 4, 7), максимум достигается на цилиндре с мини-

мальным смещением шара в точке минимальной толщины боковой стенки. На остальных цилиндрах наблюдаются значительные, но меньшие перемещения, которые убывают в направлении цилиндра с максимальным смещением шара. В остальных вари-

антах картина перемещений носит промежуточный характер (см. рис. 27, вар. 2, 5, 8). Величина перемещений от минимума к максимуму увеличивается в 4 раза, а напряжений – в 3 раза (см. табл. 2).

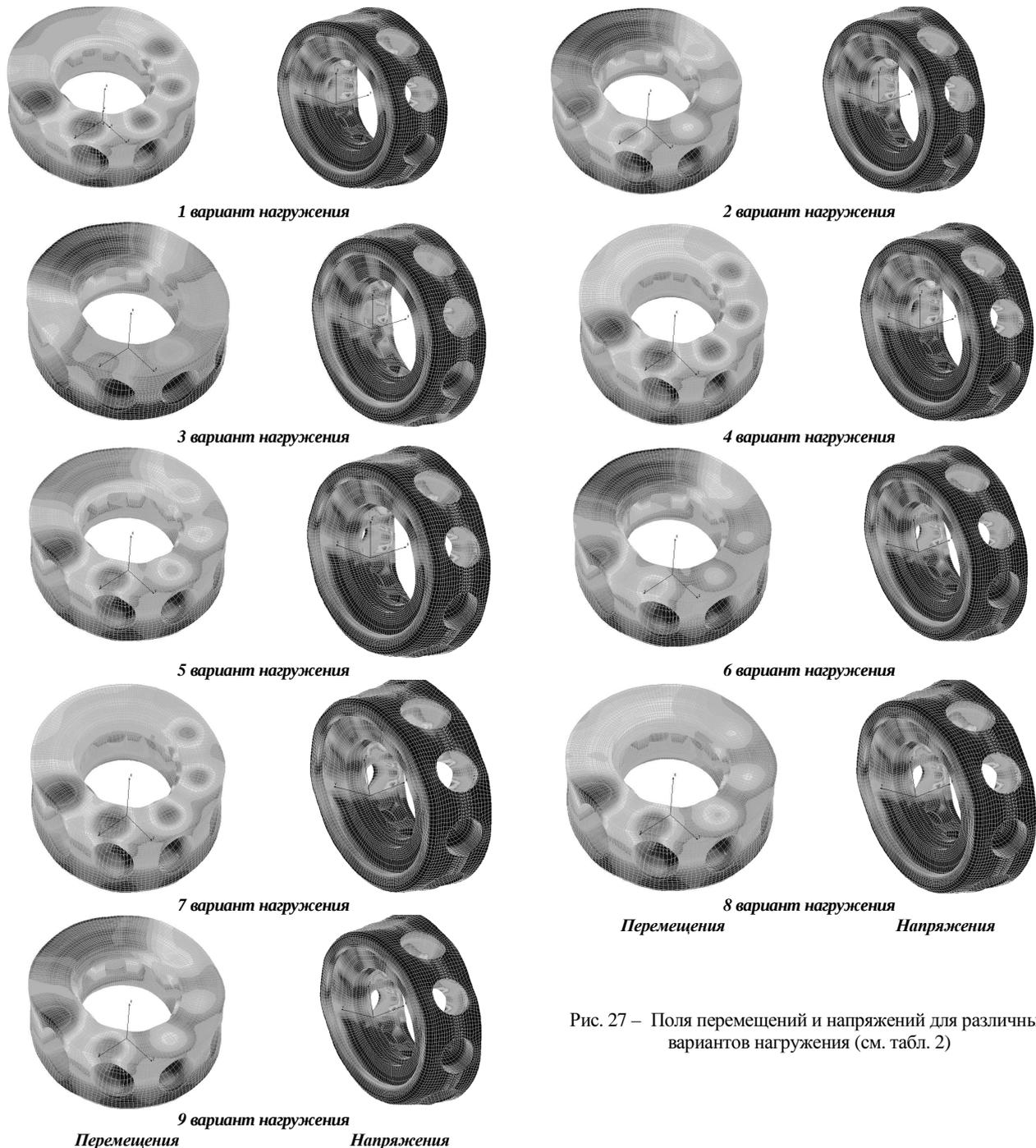


Рис. 27 – Поля перемещений и напряжений для различных вариантов нагружения (см. табл. 2)

Для оценки характера НДС КГН во время движения при постоянной угловой скорости и давлении масла был проведен расчет при различных фазах смещения шара в цилиндре. Так как насос представляет собой циклически симметричную систему (с циклом в  $40^\circ$ ), то при повороте на данный угол характер нагружения будет повторяться. Поэтому периодическая часть движения колеса насоса была разбита на 10 фаз, соот-

ветствующих углу в  $4^\circ$ . Величина смещения шара относительно верхней кромки цилиндра  $\delta$  (см. рис. 21) для каждого варианта приведена на рис. 28.

При этом 1-й вариант рис. 28 соответствует повороту  $0^\circ$ , последний –  $36^\circ$  для 1-го цилиндра, для остальных цилиндров углы поворота отличаются на величину, кратную циклу системы. На рисунке приведены расчетный вариант смещения и реально созданный в

КЭМ только для цилиндров, в которых действовало давление масла на стенки цилиндра. При угле смещения, превышающем  $20^\circ$ , давление действует только в 4-х цилиндрах, а не в 5-ти. Для этих вариантов при расчете менялись граничные условия контакта с неподвижной частью системы.

Величины давления шара на стенку приведены на рис. 29, при этом давление моделировалось сосредоточенной нагрузкой  $F$ , приложенной в центральной точке пятна контакта (см. рис. 21). Как видно из анализа полученных результатов, величины давлений шаров для ненагруженных цилиндров на порядок меньше. Для нагруженных шаров по мере движения давления шаров на стенки становится более равномерным. Величины давления и угловых скоростей приведены в табл. 3, и они постоянны для всех фаз движения колеса насоса. Там же приведены результаты расчета напряжений и перемещений.

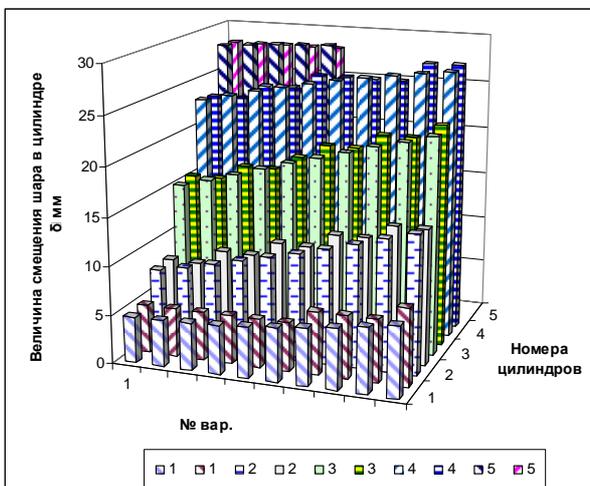


Рис. 28 – Смещение шара в цилиндрах, мкм

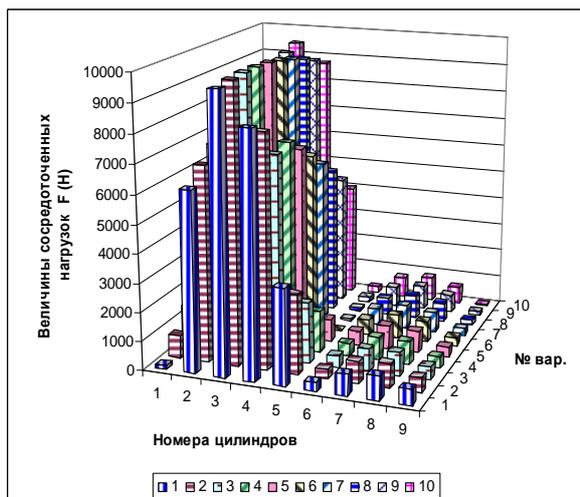


Рис. 29 – Давление шаров на стенки цилиндров, Н

Значения величин напряжений приведено для интенсивности (по Мизесу). При этом был проведен расчет при учете и без учета сосредоточенной нагрузки

для всех вариантов, и напряжения приведены для обоих случаев. Величины напряжений при сосредоточенной нагрузке здесь тоже завышены, так как в реальности возникает пятно контакта между шаром и стенкой цилиндра.

Анализируя величины напряжений, видим, что на разных фазах они практически постоянны. Величины максимальных перемещений меняются слабо, и их уменьшение связано с увеличением смещения шара внутри цилиндра от 1-го варианта к последнему (см. рис. 28).

На рис. 30 приведены диаграммы напряжений и перемещений для случая без учета сосредоточенных нагрузок. Качественная картина напряжений неизменна, и максимум наблюдается на выходной кромке квадратных отверстий в месте скруглений углов. На цилиндрах с минимальным смещением шара наблюдается также увеличение напряжений на внешней (тонкой) стенке цилиндра (см. вар. 2-5). На характер перемещений движение при постоянном нагружении оказывает незначительное влияние. При максимальном нагружении определяющей является угловая скорость, и максимум перемещений наблюдается на ненагруженной давлением масла части колеса насоса и на наиболее нагруженном цилиндре корпуса (с минимальным смещением шара). Однако переход давления масла с 5-ти цилиндров на 4 цилиндра в процессе движения сказывается на характере картины перемещений. Особенно это видно на фазе перехода (см. рис. 24–30, вар. 6). В этом случае наблюдается волна на ненагруженных цилиндрах с максимумом в точках минимальной толщины внешней стенки. На последующих фазах картина распределений становится аналогичной случаю с пятью цилиндрами, но участок максимальных перемещений увеличивается на 1 цилиндр.

Таблица 3 – Величина нагрузки и максимальные значения напряжений и перемещений ( $\omega = 314$  рад/с,  $P = 35 \cdot 10^6$  Н/м<sup>2</sup>)

№ вар.	$\sigma_{\max} \cdot 10^8, \text{Н/м}^2$		$\delta_{\max}, \text{мкм}$ (без учета $F$ )
	$F$		
	с учетом	без учета	
1	6,98	2,20	38,8
2	7,00	2,21	38,6
3	7,12	2,21	38,2
4	7,13	2,21	38,2
5	7,10	2,21	37,6
6	7,00	2,02	36,2
7	7,13	2,02	34,5
8	7,00	2,02	34,4
9	6,90	2,02	34,0
10	7,00	2,02	32,9

По результатам проведенного анализа можно сделать следующие выводы:

- построена геометрическая конечно-элементная модель КЭМ, позволяющая проводить различные исследования НДС, возникающего при его работе;

- получены величины максимальных перемещений и напряжений, дающие предельную оценку возможных их значений;

- получены картины перемещений и напряжений для различных фаз движения колеса насоса при различных типах нагружения;

- максимальные напряжения наблюдаются при сосредоточенной нагрузке от давления шара, однако такое моделирование искажает реальную картину взаимодействия шара с цилиндром насоса. Сравнение величин напряжений от давления шара и масла показало, что первые превышают вторые в 2-3

раза. При реальном контакте шара с цилиндром величины их могут стать соизмеримыми и изменить характер распределения напряжений. Поэтому для получения точной картины НДС необходимо решить дополнительно задачу о контакте шара и поверхности цилиндра. Причем, учитывая неизменный характер картины напряжений от давления масла, данную задачу можно решать для циклически симметричной части насоса. При этом можно ограничиться двумя вариантами расположения шара в цилиндре: в точке минимального и максимального смещения.

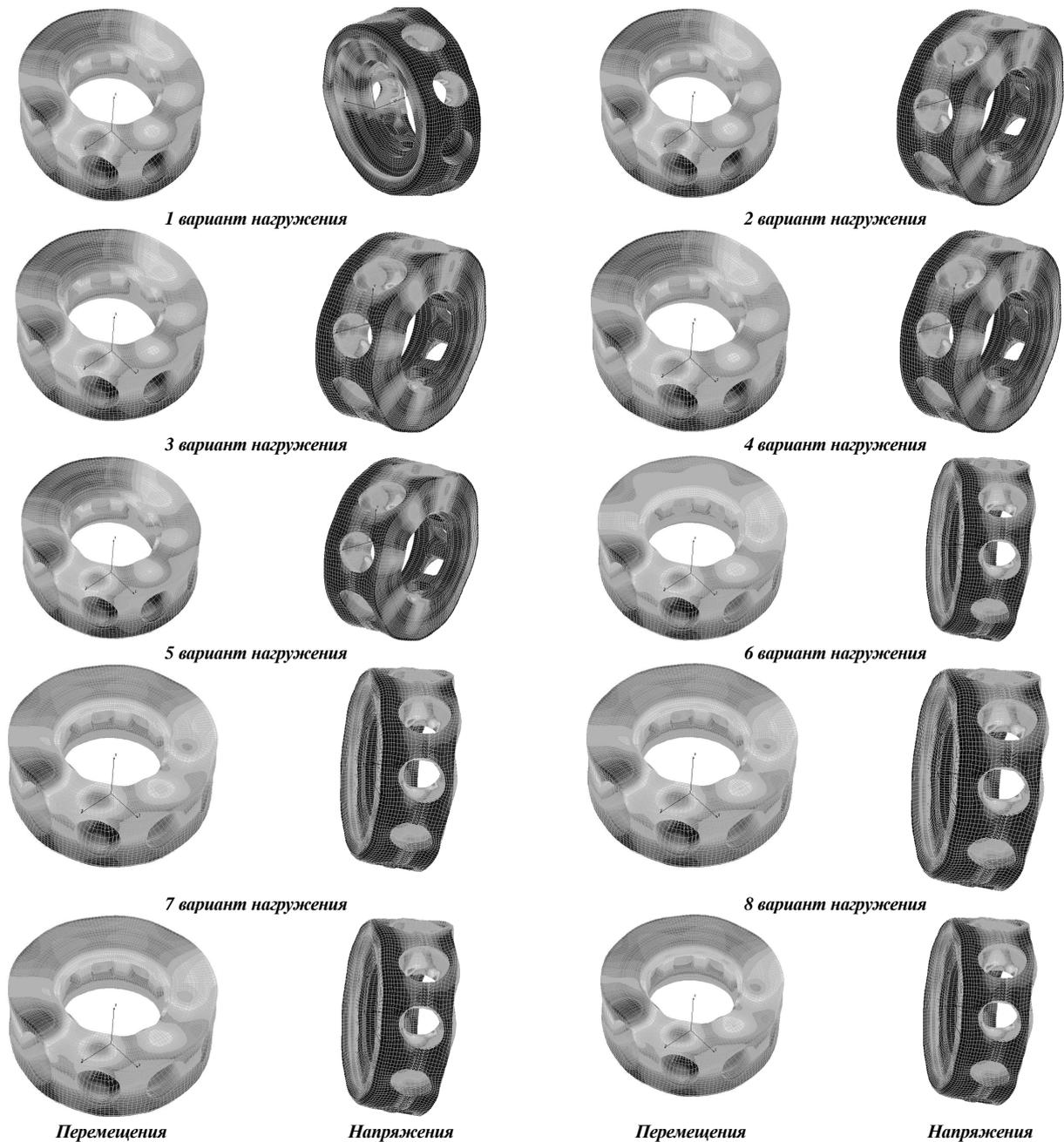


Рис. 30 – Поля перемещений и напряжений для различных вариантов нагружения (см. табл. 1)

Прочностные характеристики КГН, которые в основном определяются уровнем напряжений от дейст-

вия внутреннего давления и центробежных сил, в целом обеспечивают работу материала корпуса в упругой

области (величина напряжений по критерию Мизеса не превышает 225 МПа на всех эксплуатационных режимах). Величина контактных давлений может быть получена при решении контактной задачи о взаимодействии шара с цилиндром в нелинейной постановке, однако их предварительная оценка позволяет говорить о том, что напряжения в корпусе останутся в пределах упругости. В то же время оценку жесткостных характеристик можно в принятой формулировке считать более точной: максимальные перемещения не превышают 40 мкм. Эту величину можно считать предельной при определении изменения величины зазора в сопряжении шар-цилиндр.

Интегральные характеристики напряженно-деформированного состояния КГН ГОП-900 приведены на рис. 31, 32.

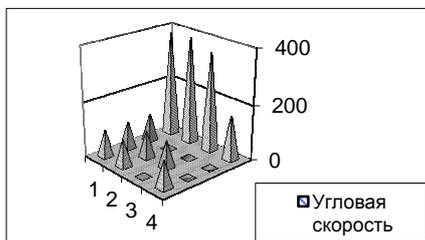


Рис. 31 – Зависимость перемещений от эксплуатационных факторов



Рис. 32 – Зависимость напряжений от эксплуатационных факторов

На основе проведенных исследований напряженно-деформированного состояния корпуса гидронасоса можно сделать следующие основные выводы: в результате радиального деформирования поверхности цилиндров происходит увеличение зазора в сопряжении шар – стенки цилиндра, что благоприятно сказывается на условиях работы этой пары; уровень напряжений в корпусе гидронасоса обеспечивает, по крайней мере, двукратный запас прочности на протяжении всего срока эксплуатации конструкции.

Направления дальнейших исследований обуславливаются следующими обстоятельствами:

- необходимостью уточнения расчетных моделей (например, сопряжение шар – стенки цилиндра гидромотора и гидронасоса);
- изменением габаритов ГОП-900, диктуемые компоновочными решениями (как следствие – ослабление сечений элементов, входящих в состав конструкции);
- изменением габаритов ГОП, диктуемые стремлением за счет уменьшения рабочего объема повысить ее эксплуатационные характеристики (как следствие – изме-

нение размеров, количества цилиндров и т.д.);

- изменением эксплуатационных режимов (скоростей вращения, рабочих давлений, а также их сочетаний);
- заменой материалов отдельных элементов конструкции (материал беговой дорожки, изменение режимов термообработки и т.д.);
- применением новых конструктивных решений (гильзование цилиндров, применение посадок с натягами и т.п.).

Конечной целью работ в данном направлении представляется разработка методов, алгоритмов и создание специализированного программного обеспечения для автоматизированного проектирования ГОП с рациональными характеристиками.

**Взаимное влияние напряженно-деформированного состояния отдельных цилиндров.** Естественным вопросом при исследовании напряженно-деформированного состояния циклически симметричных систем при циклически несимметричных условиях нагружения является способ и возможность вычленения отдельной части конструкции. Это позволяет существенно упростить расчетные схемы, уменьшить размеры конечно-элементной модели и определить качественные особенности напряженно-деформированное состояние корпуса гидронасоса.

На рис. 33–37 приведены результаты исследования напряженно-деформированного состояния корпуса гидронасоса ГОП-900 при варьировании количества цилиндров, нагруженных внутренним давлением 35 МПа, от 1 до 5.

Анализ представленных картин позволяет сделать следующие выводы:

1. Картина деформирования корпуса гидронасоса в зоне нагруженных цилиндров практически не зависит от количества нагруженных цилиндров.
2. Величина максимальных напряжений и также практически не зависит от количества нагруженных цилиндров.
3. Характер изменения зазора при действии нагрузки следующий: первоначально круглый контур цилиндра превращается в овал, вытянутый вдоль оси вращения корпуса, вследствие чего зазор между направляющими и шаровым поршнем увеличивается неравномерно по окружности цилиндра.

Зависимости максимальных напряжений  $\sigma_i^{\max}$  и максимальных результирующих перемещений  $u_{rez}^{\max}$  от внутреннего давления  $q$  следующая:  $\sigma_i^{\max} = k_{\sigma} q$ ,  $u_{rez}^{\max} = k_u q$ , где коэффициенты пропорциональности  $k_{\sigma}$ ,  $k_u$  сведены в табл. 4 и приведены на рис. 38.

Таким образом, давление в цилиндре корпуса гидронасоса оказывает слабое влияние на НДС в соседних цилиндрах, и в первом приближении деформирование цилиндров (а также напряженное состояние в его окрестности) можно рассматривать независимо от других цилиндров.



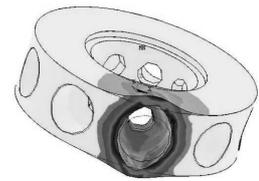
Напряжения  $\sigma_x$



Напряжения  $\sigma_y$



Напряжения  $\sigma_z$



Интенсивность напряжений



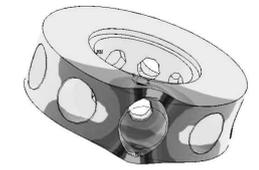
Напряжения  $\tau_{xy}$



Напряжения  $\tau_{yz}$



Напряжения  $\tau_{zx}$



Полные перемещения



Перемещения  $u_x$



Перемещения  $u_y$



Перемещения  $u_z$

Рис. 33 – Картины напряженно-деформированного состояния блока цилиндров: 1 нагруженный цилиндр



Напряжения  $\sigma_x$



Напряжения  $\sigma_y$



Напряжения  $\sigma_z$



Интенсивность напряжений



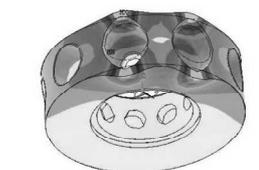
Напряжения  $\tau_{xy}$



Напряжения  $\tau_{yz}$



Напряжения  $\tau_{zx}$



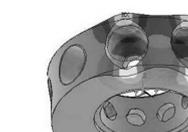
Полные перемещения



Перемещения  $u_x$



Перемещения  $u_y$



Перемещения  $u_z$

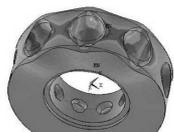
Рис. 34 – Картины напряженно-деформированного состояния блока цилиндров: 2 нагруженных цилиндра



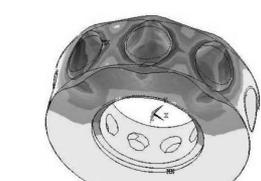
Напряжения  $\sigma_x$



Напряжения  $\sigma_y$



Напряжения  $\sigma_z$



Интенсивность напряжений



Напряжения  $\tau_{xy}$



Напряжения  $\tau_{yz}$



Напряжения  $\tau_{zx}$



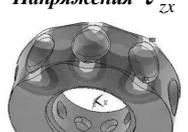
Полные перемещения



Перемещения  $u_x$



Перемещения  $u_y$



Перемещения  $u_z$

Рис. 35 – Картины напряженно-деформированного состояния блока цилиндров: 3 нагруженных цилиндра

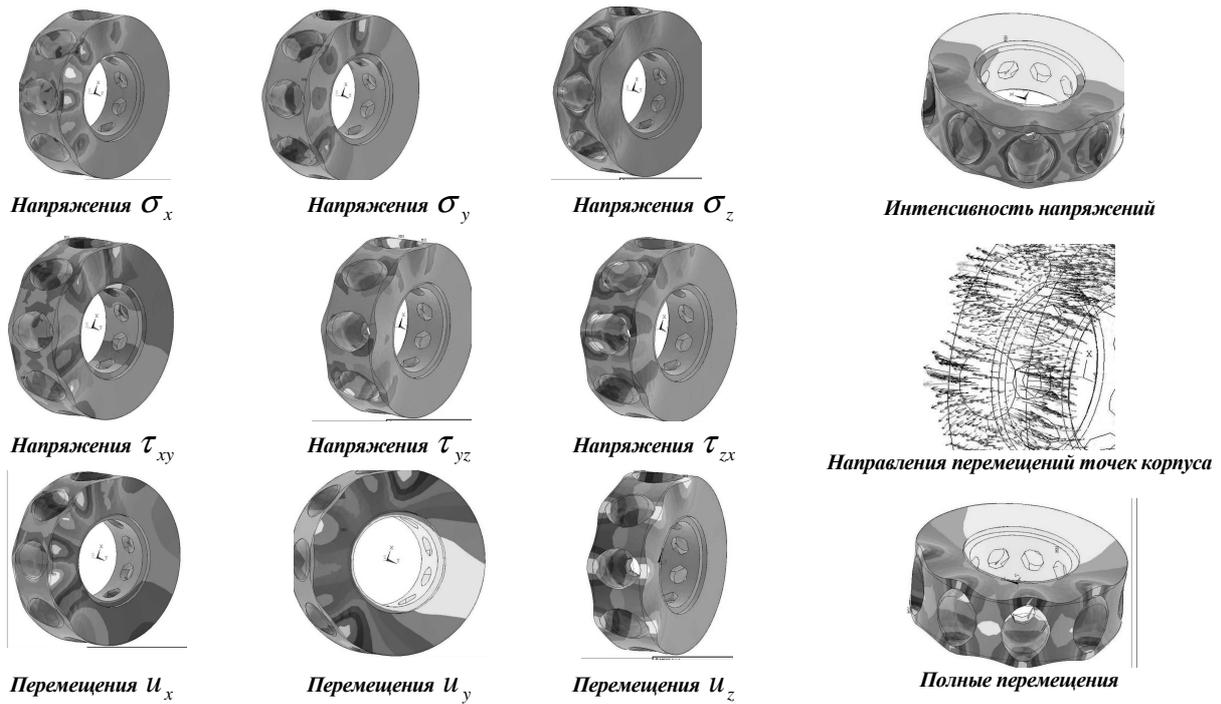


Рис. 36 – Картины напряженно-деформированного состояния блока цилиндров: 4 нагруженных цилиндра

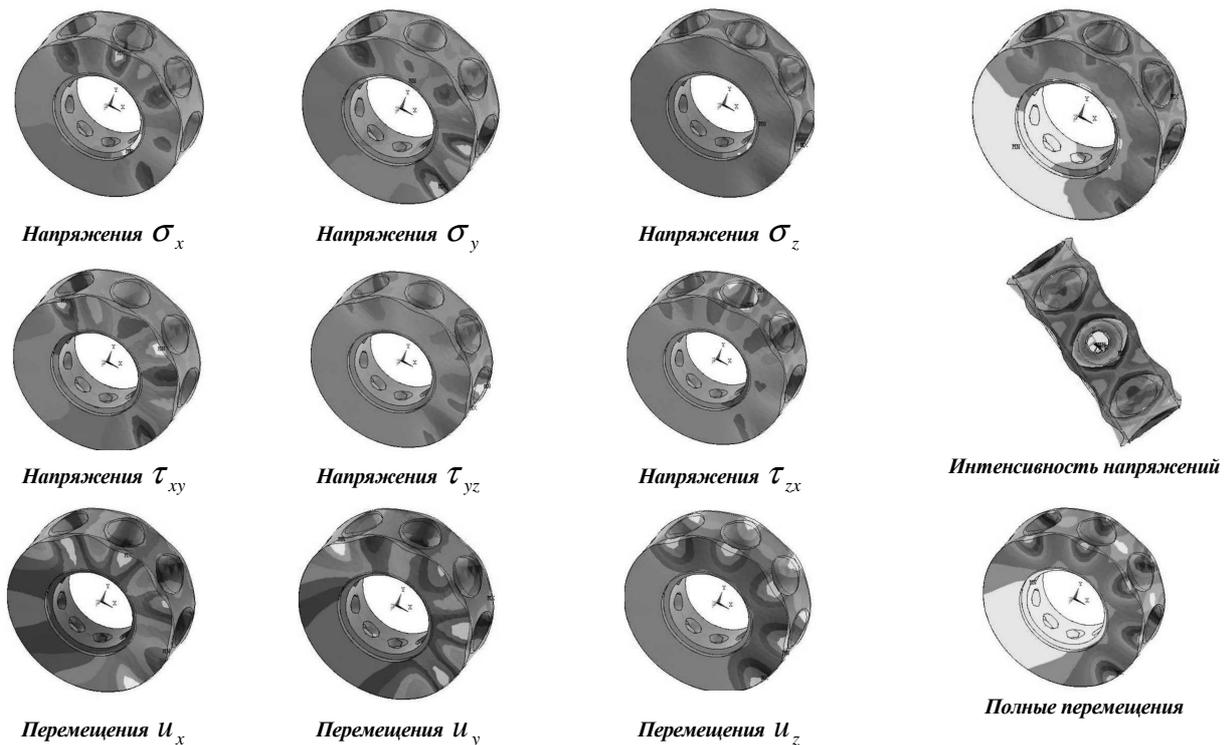


Рис. 37 – Картины напряженно-деформированного состояния блока цилиндров: 5 нагруженных цилиндров

Таблица 4 – Зависимости максимальных напряжений и максимальных полных перемещений от внутреннего давления

Параметры	Количество нагруженных цилиндров				
	1	2	3	4	5
$k_{\sigma}^n$	3,73	3,89	4,05	3,91	4,10
$k_u^{\sigma}$ , мкм/МПа	0,91	0,91	0,94	1,0	0,97
$\sigma^* = k_{\sigma}^n / k_u^{\sigma}$ (sigma)	0,91	0,95	0,99	0,95	1
$u^* = k_u^{\sigma} / k_u^5$ (u)	0,94	0,94	0,97	1,03	1

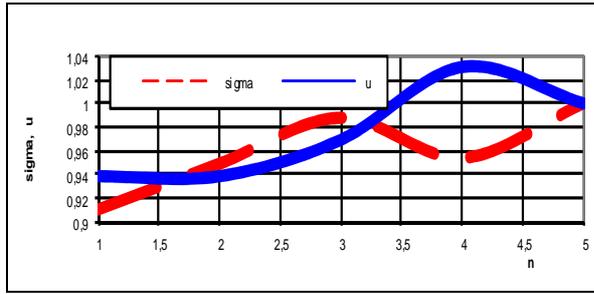


Рис. 38 – Зависимость относительных напряжений и перемещений от количества нагруженных цилиндров

**Влияние конструктивных схем исполнения корпуса гидронасоса на его напряженно-деформированное состояние.** Постоянный процесс улучшения конструкции ГОП-900 связан с устранением различных недостатков, обнаруженных в процессе предварительных испытаний на специальных стендах. Разработанный специализированный программный комплекс "ГОП-НДС" позволяет исследовать влияние качественных изменений конструкций на прочностные и жесткостные характеристики.

В частности, первоочередной интерес представляют определение зависимостей и характеристик напряженно-деформированного состояния от внедрения в корпус гидронасоса и гидромотора ГОП втулок из специальных материалов, количества цилиндров в КГН, влияние сборочных напряжений на напряженно-деформированное состояние корпуса гидронасоса ГОП-900.

*Влияние сборочных напряжений на напряженно-деформированное состояние корпуса гидронасоса ГОП-900.* Ставится задача определения влияния на напряженно-деформированное состояние насоса следующих параметров: величина натяга втулки, при ее посадке в корпус насоса ( $\Delta$ , мкм); свойств материала втулки (модуль упругости материала); угловой скорости вращения корпуса насоса ( $\omega$ ,  $\text{с}^{-1}$ ). Внешний вид модели конструкции, созданной в комплексе Pro/ENGINEER, показан на рис. 39.

Поскольку конструкция является циклично симметричной, производился расчет одной девятой части модели. При расчетах использовался метод конечных элементов, на основе которого работает комплекс ANSYS. Выбор этого метода обусловлен его универсальностью при проведении инженерного анализа и возможностью применения практически для любой задачи. Расчетная конечно-элементная модель, созданная на основе параметрической, представлена на рис. 40.

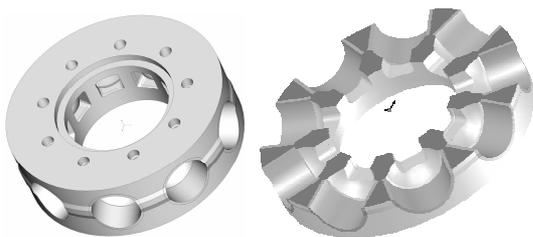


Рис. 39 – Внешний вид и разрез корпуса гидронасоса

со вставленными втулками

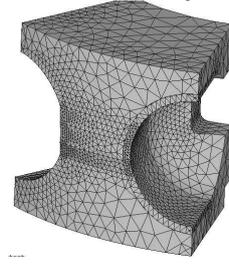


Рис. 40 – Расчетная КЭМ в программе ANSYS

Наглядное представление НДС в виде графиков в двумерном пространстве или сложных поверхностей в пространствах большей размерности позволяет наиболее точно оценить влияние каждого параметра. Поэтому полученные результаты представлены ниже в виде таблиц, рисунков и графиков.

Параметры при проведении расчетов варьировались в следующих пределах: модуль упругости материала втулки: от 0,01 до 1,0 ГПа (диапазон включает свойства различных черных и цветных металлов, а также керамических материалов); величина предварительного натяга: от 50 до 200 микрон; скорость вращения: от 25 до 100  $\text{с}^{-1}$ . Дополнительно втулка нагружалась давлением на внутреннюю поверхность величиной 3,5 МПа. Всего было проведено 3 серии расчетов с варьированием различными параметрами. Общая картина полей перемещений и напряжений модели, характерная для всех расчетов без учета числовых значений, приведена на рис. 41, 42 соответственно.

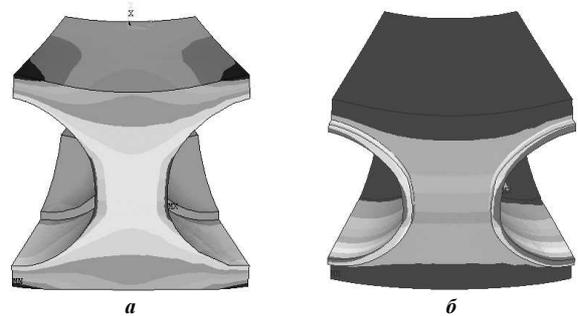


Рис. 41 – Радиальные перемещения модели:  
а – корпус; б – вся модель

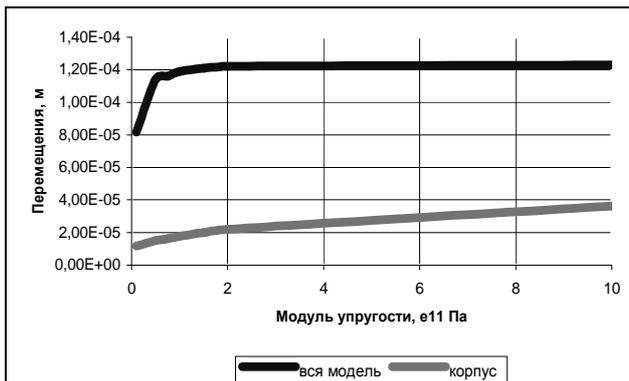


Рис. 42 – Поле напряжений модели

В табл. 5 и на рис. 43, 44 представлены результаты и графики зависимостей перемещений и напряжений в корпусе от модуля упругости материала втулки.

Таблица 5 – Зависимость параметров напряженно-деформированного состояния модуля упругости материала втулки ( $\Delta = 100$  мкм,  $\omega = 50$  с<sup>-1</sup>)

№	$E, 10^{11}$ Па	Радиальные перемещения, мкм		Эквивалентные напряжения, МПа
		вся модель	корпус	
1	0.1	81.7	11.6	327
2	0.5	11.4	14.9	448
3	0.75	11.6	16.2	424
4	1	11.9	17.6	540
5	1.5	12.1	19.9	614
6	2	12.2	22.0	673
7	10	12.3	36.3	269



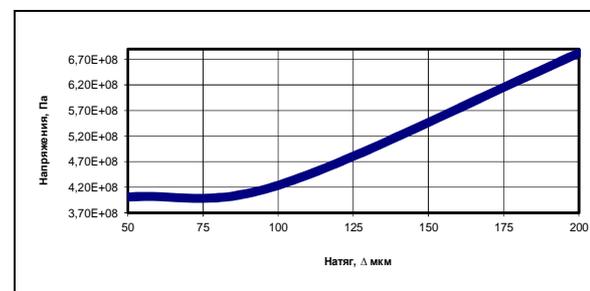
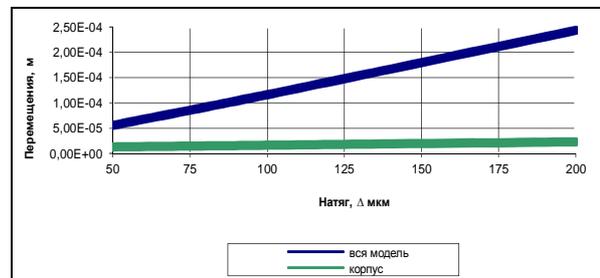
Анализ представленных графиков свидетельствует о том, что наблюдаются 3 различных по характеру участка на каждой кривой соответственно участкам:  $E_b \ll E$ ,  $E_b \approx E$ ,  $E_b \gg E$ , где  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па – модуль упругости материала. Перемещения при существенном возрастании  $E_b$  не меняются, а напряжения растут, что свидетельствует о необходимости применения материала с модулем упругости, не сильно отличающимся от модуля упругости основного материала.

Таблица 6 – Изменение характеристик напряженно-деформированного состояния при варьировании натяга втулки

№	$\Delta$ , мкм	Радиальные перемещения, мкм		Эквивалентные напряжения, МПа
		вся модель	корпус	
1	50	55.4	12.9	401
2	100	116	16.2	424
3	200	243	22.9	682

В табл. 6 и на рис. 45, 46 представлены результа-

ты и графики зависимостей перемещений и напряжений в корпусе от натяга втулки. При анализе полученных результатов, можно сделать следующие выводы: максимальные перемещения зависят практически линейно от величины натяга; при натяге, меньшем 100 мкм, напряжения практически не зависят от его величины; при дальнейшем увеличении натяга напряжения возрастают.



В табл. 7 и на рис. 47, 48 представлены результаты и графики зависимостей перемещений и напряжений в корпусе от угловой скорости вращения. Приведенные графики свидетельствуют о том, что максимальные перемещения зависят от угловой скорости близко к параболическому закону.

Таблица 7 – Зависимость характеристик напряженно-деформированного состояния от угловой скорости вращения

№	$\omega$ , с <sup>-1</sup>	Радиальные перемещения, мкм		Эквивалентные напряжения, МПа
		вся модель	корпус	
1	25	116	15.0	497
2	50	116	16.2	424
3	100	123	21.7	494

При использовании различных материалов для изготовления корпуса гидронасоса и втулок цилиндров можно в 1,5–2,0 раза увеличить запас прочности и в 1,75–2,25 раза – ресурс гидронасоса.

В ходе выполненных исследований влияния конструктивных параметров на напряженно-деформированное состояние гидронасоса гидрообъемной передачи был разработан инструмент параметрического анализа влияния на напряженно-деформированное состояние некоторых конструктивных элементов трансмиссий колесных и гусеничных машин и предложен новый подход, который может быть положен в основу многофакторного анализа и синтеза сложных машиностроительных конструкций.

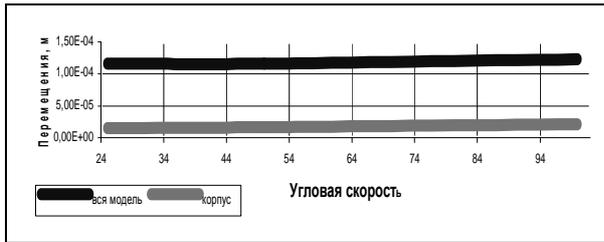


Рис. 47 – Радиальные перемещения в конструкции, м

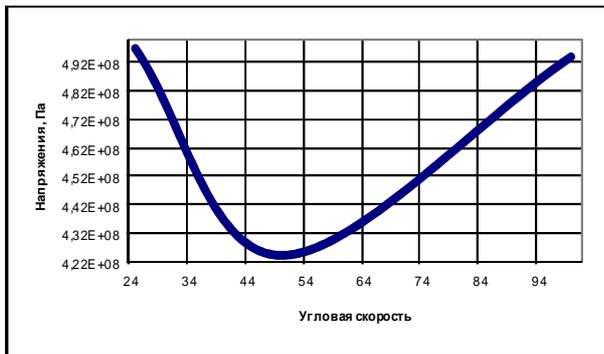


Рис. 48 – Эквивалентные напряжения, Па

Дополнительное исследование напряженно-деформированного состояния было проведено для определения влияния учета контактного сопряжения на НДС блока цилиндров. На рис. 49 приведена конечно-элементная модель, применяемая для исследования контактного взаимодействия шара с цилиндром.

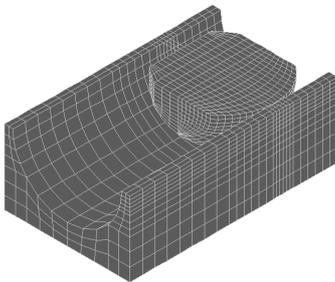


Рис. 49 – Конечно-элементная модель. Общая схема

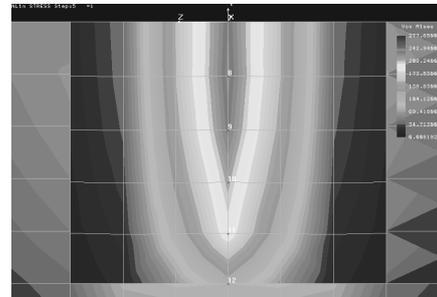
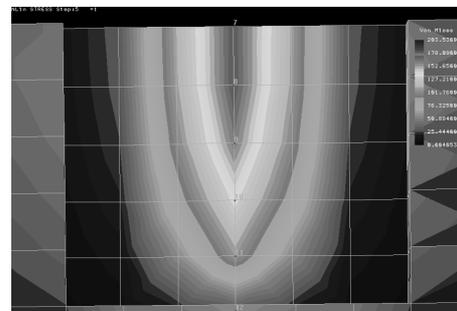
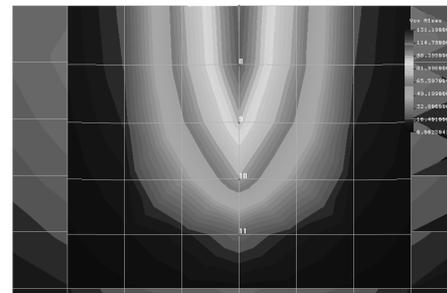
Контактная задача решается итерационным процессом, построенным на основе метода Ньютона-Рафсона. Итерационный процесс строится из предположения того, что на первой итерации контактный элемент имеет два узла и является абсолютно жестким. Далее на итерациях при уточнении зон контакта он сводится к одноузловому элементу.

Цель итерационного процесса – получить реальную зону контакта. Граничными условиями при решении задачи являются условия взаимного непроникновения контактирующих тел. Важную роль играет построение конечно-элементной модели. От модели зависит корректность решения, его точность.

При построении модели было сделано предположение о виде и размере зоны контакта. Исходя из этого предположения, сетка разбиения выбиралась так, чтобы обеспечить совпадение узлов на контактирующих

поверхностях при закрытии контакта. Это условие привело к необходимости дробить объемы на более мелкие для получения приемлемого разбиения.

На рис. 50–52 приведены результаты распределения напряжений в области контакта. Видно, что с ростом усилий прижатия напряжения растут достаточно плавно, при максимальном усилии  $\approx 10$  кН они не превышают 300 МПа.

Рис. 50 – Напряжения при нагрузке  $F_1 = F_{\max} = 9,8$  кНРис. 51 – Напряжения при нагрузке  $F_2 = 6$  кНРис. 52 – Напряжения при нагрузке  $F_3 = 3$  кН

Приведенный анализ позволяет заключить, что качественного изменения картины напряженно-деформированного состояния при учете контактного взаимодействия не происходит, а величина напряжений растет на 25-30 %.

**Влияние количества цилиндров на напряженно-деформированное состояние блока цилиндров гидронасоса.** Количество цилиндров является одним из наиболее существенных факторов, определяющих напряженно-деформированное состояние корпуса гидронасоса. С использованием разработанного программного комплекса "ГОП-НДС" проведены расчеты напряженно-деформированного состояния КГН при различном количестве цилиндров (при условии сохра-

нения их общего рабочего объема).

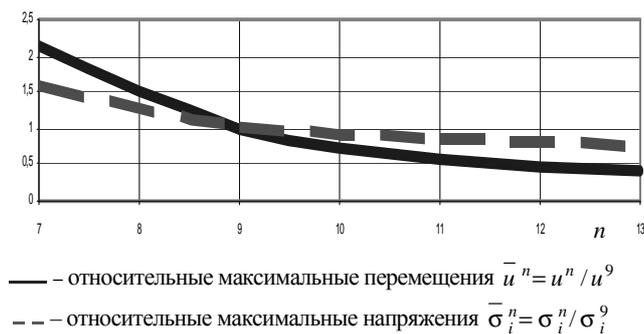


Рис. 53 – Зависимость относительных характеристик НДС корпуса гидронасоса от количества цилиндров

На рис. 53 и в табл. 8 приведены результаты исследований (нагружался 1 цилиндр давлением 35 МПа). Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о том, что рациональным с точки зрения обеспечения прочности и жесткости является количество цилиндров 9 и 11, поскольку увеличение этого количества незначительно снижает напряжения и перемещения, а уменьшение приводит к резкому их росту.

**Рекомендации по выбору конструктивных схем и рациональных параметров гидрообъемных передач.** Комплексный параметрический анализ конструкции корпуса гидронасоса позволяет сделать следующие выводы.

Таблица 8 – Результаты исследования влияния количества цилиндров на НДС корпуса гидронасоса

$n$	Интенсивность напряжений	Полные перемещения	$n$	Интенсивность напряжений	Полные перемещения
7			9		
11			13		

Примечание: базовый вариант блока – с 9-ю цилиндрами

1. Предложенный базовый вариант конструкции корпуса гидронасоса ГОП-900 обеспечивает его прочность во всем диапазоне эксплуатационных нагрузок, в том числе и при наиболее неблагоприятных сочетаниях различных факторов (напряжения – до 300 МПа).

2. В базовом варианте конструкции отмечается рост зазоров в сопряжении цилиндр – поршень в пределах величины номинального зазора (до 40 мкм) за счет упругого деформирования корпуса, что благоприятно сказывается на условии обтекания шарового поршня.

3. Существенное увеличение площади сечения и профиля радиального зазора в сопряжении цилиндр – поршень от упругих деформаций корпуса требует в соотношениях для характеристик ГОП, в которых содержится номинальное значение радиального зазора, внесения соответствующей корректировки.

4. Напряженно-деформированное состояние корпуса гидронасоса ГОП-900 можно рассматривать отдельно для каждого сектора в  $40^\circ$ , поскольку взаимное влияние НДС в цилиндрах не превышает 10%.

5. Рациональные величины натяга в сопряжении цилиндр – поршень находятся в интервале 75–100 мкм, поскольку дальнейшее увеличение натяга приводит к резкому росту напряжений.

6. Рекомендуемое количество цилиндров в корпусе гидронасоса – от 9 до 11. Рост количества цилиндров незначительно снижает напряжения, а уменьшение количества цилиндров от 9 до 7 сразу в 1,5–2,2 раза увеличивает напряжения и перемещения.

7. Сравнительное исследование напряженно-деформированного состояния корпуса гидронасоса ГОП-900 показали практически идентичные картины и характеристики прочности и жесткости при использо-

вании тетраэдральных и призматических конечных элементов. При этом большая точность достигается при применении Solid-элементов высокого порядка.

8. Учет контактного взаимодействия приводит к тому, что уровень максимальных напряжений увеличивается до 30 %, а качественная картина напряженного состояния остается неизменной.

9. Прочность и жесткость исследуемых элементов гидрообъемных передач обеспечивается в рамках базовой схемы конструкции за счет применения различных материалов для изготовления блока цилиндров, втулки, шарового поршня. Таким образом, определяющим в данном случае при выборе материала могут выступать технологические и эксплуатационные требования.

10. Исследование влияния формы беговых дорожек ГОП на величину и распределение контактных давлений продемонстрировало существенное качественное и количественное их изменение при варьировании радиусов скруглений и ширины беговой дорожки. В случае большой ширины дорожки и превышения радиусом ее скругления радиуса шарового поршня наблюдается куполообразное, близкое к герцевскому, распределение контактного давления. При нарушении этих ограничений форма пятна контакта изменяется от единого овала до двух изолированных овалов через промежуточные фигуры. При этом точка первоначального максимума раздваивается, мигрируя на периферию вдоль направления меньшей кривизны беговой дорожки.

11. При исследовании контактного взаимодействия шарового поршня с беговой дорожкой ярко проявились особенности применения моделей разных уровней в рамках единого процесса. Было показано, что аналитический метод Герца, МГИУ и МКЭ имеют перекрывающиеся области применения. Затем модель Герца становится вначале количественно (в рассмотренных случаях – до 3 %), а затем и качественно неприемлемой, после чего становится неприемлемой модель МГЭ. Наиболее универсальной является модель МКЭ. Таким образом, предложенный в работе комплексный подход, объединяющий разноуровневые модели и разнородные методы в СПМК, дает возможность осуществления алгоритма внутреннего контроля их точности, определения уровня адекватности и установления границ применимости.

**Заключение.** В работе предложен перспективный подход к решению связанной задачи исследования НДС с учетом контактного взаимодействия сложнопрофильных тел, который базируется, в отличие от традиционного подхода, на едином описании математической, геометрической и численной моделей. Обосновано использование не одного, а комплекса методов и моделей разного уровня сложности: метод Герца, метод граничных интегральных уравнений и метод конечных элементов в едином пакете. Показано, что метод Герца применим для оценочных расчетов в строго определенном диапазоне, а МГИУ дает приемлемую точность в более широком диапазоне; эталонным же по точности является МКЭ. Исследован контакт тел, форма которых может

быть заранее не определена, как в традиционном случае, а устанавливается в ходе решения специальной задачи их геометрического синтеза по условиям кинематического сопряжения в виде облака связанных точек.

С применением специализированного программно-модельного комплекса решен цикл прикладных задач моделирования напряженно-деформированного состояния с учетом контактного взаимодействия сложнопрофильных тел. Установлены закономерности распределения контактных давлений и контактных зон в сопряжении этих тел. Они во многих случаях резко отличаются от традиционных герцевских распределений. При исследовании контактного взаимодействия шарового поршня с беговой дорожкой статора радиальной гидropередачи определены контактные площадки и давления при варьировании формы ее профиля, выявлены рекомендуемые профили в виде сопряженных дуг окружности радиусом, на 5% большим радиуса шара (при их использовании контактные давления снижаются на 60% по сравнению с первоначально прямолинейным профилем на края); выявлены закономерности изменения контактных площадок при увеличении радиуса поршня: из первоначального овала они превращаются через промежуточные формы в два отдельных овала, смещенных на периферию.

Полученные в ходе многовариантных исследований закономерности деформирования блока цилиндров позволяют обеспечивать изменение зазора в сопряжении "цилиндр – поршень" в пределах 40 мкм в сторону его увеличения, что в целом благоприятно сказывается на условиях работы данной пары.

В работе предложена математическая и численная модели для исследования контактного взаимодействия "цилиндр – поршень" и "втулка – блок цилиндров". Необходимость учета реальных условий сопряжения в этих парах обусловлена тем, что в противном случае допускается погрешность в 1,5-2,5 раза при определении напряжений.

В ходе многовариантных исследований выявлено, что доминирующих силовых факторов, определяющих напряженно-деформированное состояние блока цилиндров, несколько: давление рабочей жидкости, центробежные силы, контактные усилия. При этом все эти факторы обязательно учитывать при создании математических и численных моделей блока цилиндров.

В дальнейшем планируется продолжить исследование напряженно-деформированного состояния элементов гидropередач.

#### Список литературы

1. Александров В.М., Б.Л. Ромалис *Контактные задачи в машиностроении*. М.: Машиностроение, 1986. 176 с.
2. Галин Л.А. *Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости*. М.: Наука, 1980. 303 с.
3. Аргатов И.И., Дмитриев Н.Н. *Основы теории упругого дискретного контакта*. СПб.: Политехника, 2003. 233 с.
4. Джонсон К. *Механика контактного взаимодействия*. М.: Мир, 1989. 509 с.
5. Belytschko Ted, Wing Kam Liu, Brian Moran *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley and Sons, 2000. 804 p.
6. Колтунов М.А., Кравчук А.С., Майборода В.П. *Прикладная*

- механика деформируемого твердого тела. М.: Высш. школа, 1983. 349 с.
7. Hlavacek I., Haslinger J., Necas J. [and oth.] *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1988. 327 p.
  8. Kalker J.J. Variational principles of contact elastostatics. *J. Inst. Math. and Appl.*, 1977, vol. 20, pp. 199–221.
  9. Wriggers P. *Computational Contact Mechanics*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. 518 p.
  10. Wohlmuth B.I. A mortar finite element method using dual spaces for the lagrange multiplier. *SIAM, Journal of Numerical Analysis*, 2000, vol. 38, pp. 989–1012.
  11. Simo J.C., Wriggers P., Taylor R.L. A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1985, vol. 50, pp.163–180.
  12. Fischer K.A., Wriggers P. Mortar based frictional contact formulation for higher order interpolations using the moving friction cone. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, pp. 641–656.
  13. Крауч С., Старфилд А. *Методы граничных элементов в механике твердого тела*. М.: Мир, 1987. 328 с.
  14. Mykola Tkachuk Numerical model for contact with adhesion based on Kalker's variational principle. *7th GACM Colloquium on Computational Mechanics for Young Scientists from Academia and Industry, Stuttgart, 11-13 October 2017*. pp. 190–193.
  15. Pohrt R., Popov Valentin L. Normal contact stiffness of elastic solids with fractal rough surfaces. *Physical Review Letters*, 2012, vol. 108(10), pp.104301
  16. Pohrt R., Popov Valentin L. Contact mechanics of rough spheres: Crossover from fractal to hertzian behavior. *Advances in Tribology*, 2013.
  17. L. Pastewka, N. Prodanov, B. Lorenz, M. H Müser, M. O Robbins, Bo NJ Persson. Finite-size scaling in the interfacial stiffness of rough elastic contacts. *Physical Review E*, 2013, vol. 87(6), pp. 062809
  18. Greenwood J.A., Tripp J.H. The elastic contact of rough spheres *Journal of Applied Mechanics*, 1967, vol. 34, pp. 153.
  19. Pastewka L., Mark O Robbins Contact area of rough spheres: Large scale simulations and simple scaling laws. *Applied Physics Letters*, 2016, vol. 108(22), pp. 221601.
  20. Pohrt R., Popov Valentin L. Contact stiffness of randomly rough surfaces. *Scientific reports*, 2013, vol. 3.
  21. Ткачук Н. Н., Скрипченко Н. Б., Ткачук Н. А. Решение задач о контактном взаимодействии шероховатых тел с применением модели нелинейного винклеровского слоя. *Механіка та машинобудування*, 2016, №1. С. 3–14.
  22. Ткачук Н. Н., Скрипченко Н. Б., Грабовский А. В., Ткачук Н. А. *Контактное взаимодействие сложнопрофильных деталей машиностроительных конструкций с учетом локальной податливости поверхностного слоя*. – Харьков: ФОП Панов А.Н., 2017. 152 с.
  23. Ткачук Н. Н. *Контактное взаимодействие сложнопрофильных элементов машиностроительных конструкций с кинематически сопряженными поверхностями*. Харьков: ФОП Панов А.Н., 2017. 186 с.
  24. Работнов Ю.Н. *Механика деформируемого твердого тела*. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 712 с.
  25. Ткачук Н.А., Грищенко Г.Д., Чепурной А.Д. [и др.] Конечнo-элементные модели элементов сложных механических систем: технология автоматизированной генерации и параметризованного описания. *Механіка та машинобудування*. Харків: НТУ "ХПІ", 2006. № 1. С.57–79.
  26. Аврунин Г.А., Кабаненко И.В., Хавилью В.В. Объемная гидрoпередача с шариковыми поршнями ГОП–900: характеристики и технический уровень. *Механіка та машинобудування*, 2004. №1. С. 14–21.
  27. Аврамов В.П., Самородов В.Б., Кузьминский В.А. К расчету усилий, действующих в гидростатически разгруженном поршне радиально–поршневого гидронасоса. *Проблемы машиностроения*. К., 1981, вып.11. С.51–55.
  28. Ткачук А.В., Ткачук Н.Н. Математическое моделирование динамических процессов и напряженно-деформированного состояния элементов гидрообъемной передачи. *Вісник НТУ "ХПІ"*. – Харків: НТУ "ХПІ", 2003. № 28. С. 9–18.
  29. Ткачук А.В. Влияние эксплуатационных нагрузок на напряженно–деформированное состояние корпуса гидронасоса ГОП. *Вісник НТУ "ХПІ"*. Харьков: НТУ "ХПІ", 2001. №7. С.239–242.
  30. Ткачук А.В. Влияние количества нагруженных цилиндров на напряженно–деформированное состояние корпуса гидронасоса ГОП. *Вісник Інженерної Академії України*. Київ: 2001. № 3 (ч. 2). С.207–213.
  31. Ткачук А.В., Васильев А.Ю., Мартыненко А.В., Веретельник Ю.В. Влияние конструктивных факторов на напряженно–деформированное состояние корпусов гидрообъемных передач. *Механіка та машинобудування*, 2004. № 1. С.78–84.

## References (transliterated)

1. Aleksandrov V.M., Romalis B.L. *Kontaktnye zadachi v mashinostroenii*. М.: Mashinostroenie, 1986. 176 p.
2. Galin L.A. *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti i vjzskouprugosti*. М.: Nauka, 1980. 303 p.
3. Argatov I.I., Dmitriev N.N. *Osnovy teorii uprugogo diskretnogo kontakta*. SPb.: Politehnika, 2003. 233 p.
4. Dzhonson K. *Mehanika kontaktnogo vzaimodejstvija*. М.: Mir, 1989. 509 p.
5. Belytschko Ted, Wing Kam Liu, Brian Moran *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley and Sons, 2000. 804 p.
6. Koltunov M.A., Kravchuk A.S., Majboroda V.P. *Prikladnaja mehanika deformiruemogo tverdogo tela*. М.: Vyssh. shkola, 1983. 349 p.
7. Hlavacek I., Haslinger J., Necas J. [and oth.] *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1988. 327 p.
8. Kalker J.J. Variational principles of contact elastostatics. *J. Inst. Math. and Appl.*, 1977, vol. 20, pp. 199–221.
9. Wriggers P. *Computational Contact Mechanics*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. 518 p.
10. Wohlmuth B.I. A mortar finite element method using dual spaces for the lagrange multiplier. *SIAM, Journal of Numerical Analysis*, 2000, vol. 38, pp. 989–1012.
11. Simo J.C., Wriggers P., Taylor R.L. A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1985, vol. 50, pp.163–180.
12. Fischer K.A., Wriggers P. Mortar based frictional contact formulation for higher order interpolations using the moving friction cone. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, pp. 641–656.
13. Krauch S., Starfild A. *Metody granichnyh jelementov v mehanike tverdogo tela*. М.: Mir, 1987. 328 p.
14. Mykola Tkachuk Numerical model for contact with adhesion based on Kalker's variational principle. *7th GACM Colloquium on Computational Mechanics for Young Scientists from Academia and Industry, Stuttgart, 11-13 October 2017*. pp. 190–193.
15. Pohrt R., Popov Valentin L. Normal contact stiffness of elastic solids with fractal rough surfaces. *Physical Review Letters*, 2012, vol. 108(10), pp.104301
16. Pohrt R., Popov Valentin L. Contact mechanics of rough spheres: Crossover from fractal to hertzian behavior. *Advances in Tribology*, 2013.
17. L. Pastewka, N. Prodanov, B. Lorenz, M. H Müser, M. O Robbins, Bo NJ Persson. Finite-size scaling in the interfacial stiffness of rough elastic contacts. *Physical Review E*, 2013, vol. 87(6), pp. 062809
18. Greenwood J.A., Tripp J.H. The elastic contact of rough spheres *Journal of Applied Mechanics*, 1967, vol. 34, pp. 153.
19. Pastewka L., Mark O Robbins Contact area of rough spheres: Large scale simulations and simple scaling laws. *Applied Physics Letters*, 2016, vol. 108(22), pp. 221601.
20. Pohrt R., Popov Valentin L. Contact stiffness of randomly rough surfaces. *Scientific reports*, 2013, vol. 3.
21. Ткачук Н. Н., Скрипченко Н. Б., Ткачук Н. А. Reshenie zadach o kontaktnom vzaimodejstvii sherohovatyh tel s primeneniem modeli nelinejnogo vinklerovskogo sloja. *Mehanika ta mashinobuduvannja*, 2016, no. 1, pp. 3–14.
22. Tkachuk N.N., Skripchenko N.B., Grabovskij A.V., Tkachuk N.A.

- Kontaktne vzaimodejstvie slozhnoprofil'nyh detalej mashinostroitel'nyh konstrukcij s uchetom lokal'noj podatlivosti poverhnostnogo sloja.* – Khar'kov: FOP Panov A.N., 2017. 152 p.
23. Tkachuk N. N. *Kontaktne vzaimodejstvie slozhnoprofil'nyh jelementov mashinostroitel'nyh konstrukcij s kinematicheskimi sopryazhennymi poverhnostjami.* Khar'kov: FOP Panov A.N., 2017. 186 p.
  24. Rabotnov Ju.N. *Mehanika deformiruemogo tverdogo tela.* M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1988. 712 p.
  25. Tkachuk N.A., Gricenko G.D., Chepurnoj A.D. [i dr.] *Konechno-jelementnye modeli jelementov slozhnyh mehanicheskikh sistem: tehnologija avtomatizirovannoj generacii i parametrizirovannogo opisanija. Mehanika ta mashinobuduvannja.* Kharkiv: NTU "KhPI", 2006, no. 1, pp.57-79.
  26. Avrunin G.A., Kabanenko I.V., Havil'ju V.V. *Ob'emnaja gidroperedacha s sharikovymi porshnjami GOP-900: harakteristiki i tehniceskij uroven'.* *Mehanika ta mashinobuduvannja*, 2004, no. 1, pp.14–21.
  27. Avramov V.P., Samorodov V.B., Kuz'minskij V.A. *K raschetu usilij, dejstvujushchih v gidrostaticheski razgruzhennom porshne radial'no-porshnevoogo gidronasosa. Problemy mashinostroenija.* K., 1981, vol. 11, pp. 51–55.
  28. Tkachuk A.V., Tkachuk N.N. *Matematicheskoe modelirovanie dinamicheskikh processov i naprjazhenno-deformirovannogo sostojanija jelementov gidroob'emnoj peredachi.* *Visnik NTU "KhPI".* Kharkiv: NTU "KhPI", 2003, no. 28, pp. 9–18.
  29. Tkachuk A.V. *Vlijanie jekspluatacionnyh nagruzok na naprjazhenno-deformirovannoe sostojanie korpusa gidronasosa GOP.* *Visnik NTU "KhPI".* Khar'kov: NTU "KhPI", 2001, no. 7, pp. 239–242.
  30. Tkachuk A.V. *Vlijanie kolichestva nagruzhennyh cilindrov na naprjazhenno-deformirovannoe sostojanie korpusa gidronasosa GOP.* *Visnik Inzhenernoї Akademii Ukraїni.* Kiїv: 2001, no. 3 (ch. 2), pp.207–213.
  31. Tkachuk A.V., Vasil'ev A.Ju., Martynenko A.V., Veretel'nik Ju.V. *Vlijanie konstruktivnyh faktorov na naprjazhenno-deformirovannoe sostojanie korpusov gidroob'emnyh peredach.* *Mehanika ta mashinobuduvannja*, 2004, no. 1, pp.78–84.

*Надійшла (received) 03.11.2017*

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Мартиненко Олександр Вікторович (Мартыненко Александр Викторович, Martynenko Oleksandr)** – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", кафедра "Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин", м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0420-0670>. e-mail: [martynenkoav@gmail.com](mailto:martynenkoav@gmail.com)

**Ткачук Микола Миколайович (Ткачук Николай Николаевич, Tkachuk Mykola)** – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", кафедра "Інформаційні технології та системи колісних і гусеничних машин ім. О. О. Морозова", м. Харків, Україна; <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=50562166500>, <https://orcid.org/0000-0002-4753-4267>; e-mail: [m.tkachuk@tmm-sapr.org](mailto:m.tkachuk@tmm-sapr.org).

**Скрипченко Наталія Борисівна (Скрипченко Наталья Борисовна, Skripchenko Nataliia)** – кандидат технічних наук, науковий співробітник, Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", кафедра "Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин", м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5324-9553>. e-mail: [nb\\_natali@mail.ru](mailto:nb_natali@mail.ru)

**Бібік Дмитро Вікторович (Бибик Дмитрий Викторович, Bibik Dmytro)** – начальник відділу Державного концерну "Укроборонпром", м. Київ, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3896-699X>. e-mail: [m.tkachuk@tmm-sapr.org](mailto:m.tkachuk@tmm-sapr.org).

**Ткачук Ганна Володимирівна (Ткачук Анна Владимировна, Tkachuk Ganna)** – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", кафедра "Інформаційні технології та системи колісних і гусеничних машин ім. О. О. Морозова", м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0435-1847>. e-mail: [Annatkachuk2008@rambler.ru](mailto:Annatkachuk2008@rambler.ru)

**Саверська Марія Сергіївна (Саверская Мария Сергеевна, Saverska Mariia)** – аспірант, Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", кафедра "Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин", м. Харків, Україна; e-mail: [m.saverska@tmm-sapr.org](mailto:m.saverska@tmm-sapr.org).

**Шеманська Вікторія Вікторівна (Шеманская Виктория Викторовна, Shemanskaya Viktoriya)** – студентка гр. ТМ-866, Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут"; м. Харків, Україна