

В. М. БУРЛАЄНКО, Р. КОУХІА, С. Д. ДІМІТРОВА

СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ АКСІАЛЬНО ФУНКЦІОНАЛЬНО ГРАДІЄНТНИХ БАЛОК НЕОДНОРІДНОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

Скінченно-елементний пакет програми Abaqus використовується для моделювання та аналізу власних коливань аксіально-функціонально градієнтних балок неоднорідного поперечного перерізу. Цьому аспекту геометрії приділено значну увагу, оскільки він має суттєвий вплив на поведінку балки як структурного компонента. Підпрограми моделі матеріалу, що визначені користувачем (UMAT), були розроблені уніфіковано для одно- та тривимірних моделей зазначених балок з метою забезпечення чисельної імплементації властивостей функціонально градієнтного матеріалу в межах окремого скінченного елемента. Процедури UMAT програмувалися мовою FORTRAN у середовищі MS Visual Studio та компілювалися з основним пакетом програм за допомогою Intel Fortran Compiler. У процедурах, неоднорідність матеріалу призначалась кожній матеріальній точці інтегрування відповідного стандартного одно- та тривимірного скінченного елемента, що усувало потребу в розробленні градієнтних елементів через визначену користувачем підпрограму елемента. Власні частоти та форми власних коливань одно- та тривимірних аксіально-функціонально градієнтних балок неоднорідного поперечного перерізу були знайдені за допомогою метода Ланцоша в пакеті Abaqus. Було проведено аналіз точності та ефективності запропонованого підходу моделювання, порівнюючи отримані результати з відомими даними з літератури. Презентована техніка моделювання на основі підпрограм матеріалу надає цінні можливості для вчених та інженерів, які займаються динамічним аналізом структурних компонентів, виготовлених з функціонально градієнтних матеріалів та мають змінну форму або геометрію вздовж аксіального напрямку.

Ключові слова: аксіально функціонально градієнтні балки; балки неоднорідного поперечного перерізу; вільні коливання; градієнтний скінчений елемент; визначені користувачем підпрограми в пакеті Abaqus

V. BURLAYENKO, R. KOUHIA, S. DIMITROVA

FINITE ELEMENT MODELLING AND ANALYSIS OF FREE VIBRATIONS OF AXIALLY FUNCTIONALLY GRADED BEAMS WITH NON-UNIFORM CROSS-SECTIONS

The finite element package Abaqus is used for modeling and analysis of free vibrations of axially functional graded beams with non-uniform cross-sections. Considerable attention has been paid to this aspect of the geometry, as it has a significant effect on the behavior of the beam as a structural component. User-defined material model subroutines (UMAT) were developed in a unified way for one- and three-dimensional models of the specified beams to provide numerical implementation of functional material gradients within each finite element. UMAT procedures were programmed in FORTRAN in the MS Visual Studio environment and compiled with the main program package using the Intel Fortran Compiler. In the procedures, material heterogeneity was assigned to each material integration point of appropriate standard one- and three-dimensional finite elements, eliminating the need to design graded finite elements via user-defined element subroutine. Frequencies and mode shapes of free vibrations of one- and three-dimensional axially functional graded beams with non-uniform cross-sections were found using the Lanczos method in Abaqus. An analysis of the accuracy and effectiveness of the proposed modeling approach was carried out, comparing the obtained results with data known in the literature. The presented modeling technique based on user-defined material subroutines provides valuable opportunities for scientists and engineers engaged in the dynamic analysis of structural components made of functionally gradient materials and having variable geometry along the axial direction.

Keywords: axially functionally graded beams; non-uniform cross-section beams; free vibrations; graded finite element; Abaqus user defined subroutines

Вступ. Балки з поперечним перерізом, який змінюється вздовж довжини, широко використовуються в інженерному обладнанні такому, як лопатки турбін, гвинти гелікоптерів та літаків, а також в інших галузях техніки для досягнення оптимальних властивостей при мінімальній вазі. Для них аналіз власних частот і форм є дуже важливим, оскільки неоднорідна форма поперечного перерізу має значний вплив на динамічні характеристики балочних елементів. Тому, для практичних застосувань, було проведено широкий спектр досліджень динаміки балок, охоплюючи різноманітні форми балочних конструкцій [1, 2].

Останнім часом велику увагу привернув новий клас композитних матеріалів, відомих як функціонально градієнтні матеріали (ФГМ). Ці матеріали характеризуються тим, що їх склад безперервно змінюється за заданим напрямом або по всьому об'єму [3]. Поступове змінювання

компонентів матеріалу ефективно вирішує проблему деламінації у з'єднаннях двох різнорідних матеріалів зі значними відмінностями у їх властивостях [4], а також дозволяє пристосовувати властивості матеріалу до конструкційних потреб [5].

Структурний аналіз ФГМ конструкцій повинен забезпечувати моделювання просторової зміни властивостей матеріалу. У випадку коливань аксіально-функціональних градієнтних балок (АФГБ) складність аналізу полягає в наявності змінних коефіцієнтів у керуючих рівняннях балки, що зумовлено залежністю параметрів матеріалу від осової координати. Крім того, площа поперечного перерізу та жорсткість на вигин для балок змінного поперечного перерізу є також функціями координати уздовж довжини балки. З цього приводу

© В. М. Бурлаєнко, Р. Коухіа, С. Д. Дімітрова, 2023

точне розв'язання такого рівняння можна отримати лише для деяких спеціальних типів поперечних перерізів, профілів градації матеріалу та граничних умов. У роботі [6] на основі вибору певного типу поліномів отримано серію аналітичних розв'язків власних коливань та прогину простоопертої АФГБ. Аналітичний розв'язок з використанням функцій Бесселя для задачі про власні коливання АФГБ, що містить як геометричну нерівномірність, так і розподіл маси та жорсткості уздовж довжини, було отримано в [7]. Деякі точні розв'язки задачі про власні коливання АФГМ балок з профілем градієнта матеріалу та параметрами поперечного перерізу, що експоненціально змінюються в осьовому напрямку, були отримані в [8, 9]. В цих роботах використовувалися припущення Ейлера–Бернуллі та Тимошенка, відповідно, щодо кінематики балок. Інший аналітичний розв'язок для знаходження власних частот АФГМ балок Ейлера–Бернуллі було отримано методом перетворених перерізів в [10].

Крім того, були розроблені різні чисельні підходи для подолання обмежень аналітичних розв'язків щодо припущень про неоднорідності матеріалу та геометрії. Автори в [11] досліджували власні коливання балок з аксіальною градацією матеріалу та нерівномірним поперечним перерізом шляхом перетворення основного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами в інтегральні рівняння Фредгольма. В [12] за допомогою вейвлетів Хаара було розраховано власні частоти АФГМ балок з різними граничними умовами та параметрами поперечного перерізу. Метод диференціальних квадратур було застосовано для дослідження власних коливань АФГМ двотаврових балок в [13]. Аналіз власних коливань АФГМ балок Ейлера–Бернуллі зі змінним поперечним перерізом, виконаний методом диференціального перетворення, проведено в [14, 15].

В контексті методу скінченних елементів (МСЕ), який є потужним інструментом для розв'язання мультифізичних задач, зазвичай використовуються скінченні елементи з постійними властивостями матеріалу в області дискретизації. Це призводить до необхідності розділення ФГМ на декілька шарів з різними, але однорідними властивостями, для задання градієнта матеріалу. Така техніка викликає складність при дискретизації на етапі визначення скінченно-елементної сітки і призводить до збільшення обчислювальних витрат через збільшення кількості невідомих. Альтернативою є використання градієнтних скінченних елементів (ГСЕ), які дозволяють реалізувати зміну властивостей матеріалу без поширеної дискретизації. Існують дві поширені схеми розробки ГСЕ. Перший підхід пропонує апроксимацію просторово розподілених констант матеріалу за допомогою інтерполяційних функцій, ідентичних тим, що використовуються для поля переміщень – ізопараметричні або вузлові ГСЕ [16]. Другий підхід використовує ідею реалізації профілів матеріалу шляхом безпосереднього призначення властивостей матеріалу в точках інтегрування елемента під час аналізу – ГСЕ на основі точок

інтегрування [17].

Використання комерційних або відкритих скінченно елементних пакетів стає все більш популярним у дослідженнях. Проте більшість з них не мають вбудованих градієнтних скінченних елементів для моделювання ФГМ конструкцій. Це призводить до необхідності додаткових маніпуляцій для введення градієнтів матеріалу у скінченно-елементну модель. Наприклад, автори в [18] використовували лінійну зміну пружних констант у елементах коду ANSYS, визначаючи необхідні температурно-залежні властивості матеріалу у вузлах. У роботах [19, 20] для статичних і динамічних проблем були розроблені ізопараметричні ГСЕ за допомогою визначеної користувачем підпрограми елемента UEL у пакеті Abaqus. Для аналізу руйнування, власних коливань та термомеханічних проблем у роботах [21–23], була використана визначена користувачем підпрограма матеріалу UMAT у пакеті Abaqus. Ця підпрограма дозволяла враховувати неоднорідності матеріалу в точках інтегрування одно-, дво- та тривимірних елементів. Варто відзначити, що у цих дослідженнях розглядалася лише постійна форма поперечного перерізу ФГМ балок та пластин.

У цій статті ми маємо на меті дослідити проблему власних коливань аксіально-функціонально градієнтних балок змінного поперечного перерізу, використовуючи пакет Abaqus. Щоб досягти цієї мети, властивості АФГМ імплементуються у відповідні одно- та тривимірні елементи Abaqus за допомогою підпрограм моделі матеріалу UMAT. Ці підпрограми, на відміну від попередніх розроблених в [21, 23], модифіковані для аналізу власних коливань саме АФГМ балок змінної геометрії. Отримані результати з одно- та тривимірних чисельних розрахунків порівнюються між собою та з даними, що доступні в літературі, щоб оцінити точність кожної чисельної моделі.

Постановка задачі. Аксіально функціонально градієнтна балка довжини L зі змінними розмірами прямокутного поперечного перерізу $b(x) \times h(x)$ показана на рис. 1 разом із системою координат.

Вважається, що розміри поперечного перерізу змінюються симетрично відносно середньої лінії ($z = 0$) балки. Ширина і товщина балки як функції x -координати можуть бути представлені співвідношеннями:

$$b(x) = b_0(1 - c_b x/L)^m, \quad h(x) = h_0(1 - c_h x/L)^n, \quad (1)$$

де $c_b = 1 - b_1/b_0$ і $c_h = 1 - h_1/h_0$ – коефіцієнти конусності ширини та висоти, відповідно.

Варто зазначити, що якщо $c_b = c_h = 0$, балка буде однорідною; якщо $c_b \neq 0$ і $c_h = 0$, балка буде звужуватися за шириною, але матиме постійну висоту; якщо $c_b = 0$ і $c_h \neq 0$, балка буде звужуватися за висотою, але матиме постійну ширину; а якщо $c_b \neq 0$ і $c_h \neq 0$, балка буде подвійно звуженою. Коефіцієнти m і n дозволяють врахувати

довільну зміну геометричних параметрів вздовж поздовжнього напрямку балки.

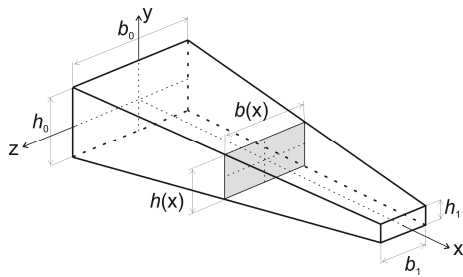


Рисунок 1 – АФГМ балка змінного поперечного перерізу

З (1) випливає, що площа поперечного перерізу $A(x)$ і момент інерції $I(x)$ змінюються вздовж довжини балки наступним чином:

$$\begin{aligned} A(x) &= A_0(1 - c_b x/L)^m(1 - c_h x/L)^n \\ I(x) &= I_0(1 - c_b x/L)^m(1 - c_h x/L)^{3n}, \end{aligned} \quad (2)$$

де A_0 і I_0 – площа і момент інерції прямокутного перерізу, відповідно, при $x=0$.

Також припустимо, що модуль пружності $E(x)$ і густина $\rho(x)$ матеріалу балки, зображеної на малюнку, змінюються відносно поздовжнього напрямку вздовж вісі Ox за поліноміальним законом:

$$P(x) = P_0 \sum_{j=0}^k \left(\frac{x}{L} \right)^j, \quad (3)$$

де $P(x)$ – будь-яка з фізичних сталих матеріалу балки, а P_0 – її значення при $x=0$. Коефіцієнт Пуассона ν вважаємо сталим.

Нехай функціонально градієнтний матеріал балки є лінійно ізотропним. Відповідно до теорії пружності, сформулюємо рівняння стану в матричній формі:

$$\{\sigma\} = \lambda(x) \text{tr}\{\epsilon\}[I] + 2\mu(x)\{\epsilon\}, \quad (4)$$

де $\lambda(x)$ і $\mu(x)$ – сталі Ляме, які є функціями осової координати x , $[I]$ – одинична матриця, $\{\sigma\}$ і $\{\epsilon\}$ – вектори напруження та деформації, відповідно.

Розмір векторів і їх компоненти в (4) залежать від розмірності задачі та припущень, які застосовуються до моделювання балки. Вектори одновимірної моделі, яка будується на припущеннях теорії балки Тимошенко, складаються з двох компонент, а у випадку тривимірної моделі балки у векторах існують всі шість компонент.

Скінченно-елементне формулювання. Скінченно-елементне формулювання, що лежить в основі чисельного аналізу, базується на динамічному принципі віртуальної роботи, який можна представити у вигляді:

$$\int_{\Omega} (\{\sigma\}^T \nabla \{\delta u\} + \rho(x) \{\ddot{u}\} \{\delta u\}) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \{p\} \{\delta u\} = 0, \quad (5)$$

де $\{\ddot{u}\}$ і $\{u\}$ – вектори прискорення та переміщення балки, яка займає у просторі область Ω , а $\{p\}$ – вектор сили, що задана на поверхні області балки $\partial\Omega$.

Скінченно-елементний розв'язок рівняння (5) полягає в заміні невідомої функціональної множини $(\{u\}, \Omega)$ дискретною підмножиною $(\{u^h\}, \Omega^h)$. Ця підмножина утворюється дискретизацією області Ω скінченними елементами, які з'єднані між собою у вузлових точках так, що $\Omega \cong \Omega^h = \bigcup_{e=1}^N \Omega^e$. При цьому, поле переміщення в елементі визначається:

$$\{u^h\} = \sum_{i=1}^{n^e} [N]_i \{U\}_i, \quad (6)$$

де n^e – кількість вузлів елемента Ω^e , $\{U\}$ – значення $\{u^h\}$ у вузлі i та $[N]$ – функція форми елемента. За допомогою цієї процедури інтерполяції генерується скінченний набір вузлових невідомих. Дискретна форма (5) в межах елемента визначається системою рівнянь:

$$[M^e] \{\ddot{U}^e\} + [K^e] \{U^e\} = \{F^e\}, \quad (7)$$

де $[M^e]$, $[K^e]$ і $\{F^e\}$ – матриці маси й жорсткості та вектор зусиль, відповідно, які обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} [M^e] &= \int_{\Omega^e} [N]^T \rho(x) [N] d\Omega; \\ [K^e] &= \int_{\Omega^e} [B]^T [D(x)] [B] d\Omega; \\ \{F^e\} &= \int_{\partial\Omega^e} [N]^T \{p\} d\partial\Omega, \end{aligned} \quad (8)$$

де $[D(x)]$ – матриця матеріальних сталих (3), і $[B]$ позначає матрицю градієнтів функцій форми.

Нарешті, локальні матриці та вектори елементів збираються у відповідні глобальні для побудови глобальної дискретної системи керуючих рівнянь. У випадку аналізу власних коливань без демпфування ця система зводиться до проблеми власних значень та форм, яка записується у вигляді:

$$\left([K] - \omega^2 [M] \right) \{\Phi\} = 0, \quad (9)$$

де ω – незатухаюча кругова частота, а $\{\Phi\}$ – вектор вузлових переміщень коливань, що відповідає кожному ω .

Градієнтний скінченний елемент. Визначена користувачем підпрограма матеріалу UMAT у кодї Abaqus використовується для задання властивостей АФГМ скінченним елементам, які використовуються в частотному аналізі (9). Метою UMAT є надання Abaqus нового тензора напружень $\{\sigma + \Delta\sigma\}$, який оновлюється відповідно до визначеного користувачем закону стану матеріалу та матеріальній матриці Якобі $C = \partial\Delta\sigma/\partial\Delta\epsilon$ [24].

Після впровадження в пакет Abaqus підпрограма викликається та виконується в кожній точці інтегрування елемента, оновлюючи необхідні значення напружень та деформацій поточної задачі.

У випадку АФГМ, x -координата матеріальних точок використовується для обчислення ефективних властивостей матеріалу за формулою (3). Таким чином, вказуючи компоненти тензора напруження та матриці Якобі безпосередньо в точках інтегрування, властивості АФГМ, що змінюються в залежності від x -координати, призначаються скінченно елементній моделі під час обчислення матриць мас та жорсткості (8) за квадратурами Гауса. Останні, в залежності від типу скінченного елемента, мають певну форму для одновимірних

$$[K^e] = \sum_{r=1}^{n_r} ([B]^T [D(x)] [B] J)_{,r} w_r$$

та тривимірних елементів

$$[K^e] = \sum_{p=1}^{n_p} \sum_{q=1}^{n_q} \sum_{r=1}^{n_r} ([B]^T [D(x)] [B] J)_{,r,q,p} w_r w_q w_p, \quad (10)$$

де індекси p, q і r відносяться до точок інтегрування по області елемента, $|J|$ є визначником матриці геометричних перетворень Якобі, а w_p, w_q і w_r є ваговими коефіцієнтами Гауса. Елементи матриці сталих матеріалу $[D(x)]$ для 1D і 3D елементів можна знайти в роботах [21] і [23], відповідно.

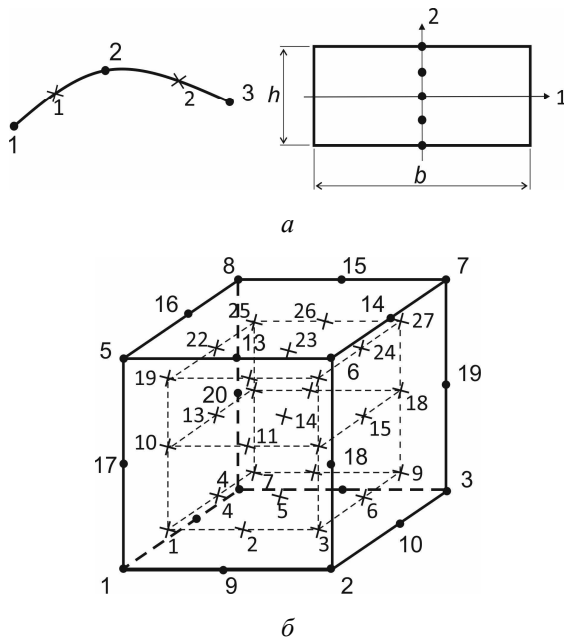


Рисунок 2 – Скінченні елементи:
 а – 3-вузловий елемент балки з 5-точковою схемою інтегрування; б – 20-вузловий тривимірний елемент з 3×3×3 точковою схемою інтегрування

У поточному дослідженні описана вище процедура призначення матеріального градієнта елементам в програмі Abaqus була застосована для двох типів скінченних елементів: тривузлого балочного елемента другого порядку (рис. 2, а) з 2 ступенями вільності на вузол, який базується на теорії балки Тимошенка, та двадцятивузлового

тривимірного елемента другого порядку (рис. 2, б) з 6 ступенями вільності на вузол, які позначаються як B22 та C3D20, відповідно [24].

Також треба зазначити, що на відміну від суцільних тривимірних елементів C3D20, у визначенні властивостей одновимірного елемента B22, окрім вищезазначеної процедури присвоєння функційно градієнтних властивостей, додатково необхідно визначити жорсткість на зсув. Поперечну жорсткість на зсув у перерізі балки в напрямку α розраховують за допомогою формули:

$$K_{\alpha\alpha} = k G_{eff} A, \quad (11)$$

де G_{eff} – ефективний модуль зсуву, A – площа поперечного перерізу балки, а k – коефіцієнт зсуву.

Коефіцієнт зсуву для прямокутного поперечного перерізу балки, виготовленої з однорідного матеріалу, становить 0.85, як було визначено в [24]. У розрахунках використовується зазначене значення коефіцієнта зсуву на основі припущення про незначну неоднорідність АФГМ, що може бути апроксимована лінійною функцією.

Оскільки балка має змінну площу поперечного перерізу вздовж її довжини, для визначення її площі A вихідна балка змінного перерізу замінюється на еквівалентну східчасту модель з декількома секціями $L = \{L_1 L_2, L_2 L_3, \dots, L_{n-1} L_n\}$. В межах кожної секції $L_{i-1} L_i$ площа поперечного перерізу визначається як

$$A_i^* = \frac{h_i + h_{i-1}}{2} \cdot \frac{b_i + b_{i-1}}{2}, \quad (12)$$

де h_{i-1}, b_{i-1} – висота і ширина прямокутного перерізу при $x = L_{i-1}$, а h_i, b_i – при $x = L_i$.

Ефективний модуль зсуву отримано аналітичним інтегруванням його фактичного розподілу по довжині балки (3). Таким чином, для кожної окремої секції $L_{i-1} L_i$ АФГМ балки змінного поперечного перерізу ефективний модуль розраховується за формулою:

$$G_{eff} = \frac{G_0}{2L} \left\{ \frac{12L^3 \delta_1 + 6L^2 \delta_2 - [6L^2 \delta_2 + 4L\delta_3] (c_b + c_h)}{6L^2 \delta_1 - 3L\delta_2 (c_b + c_h) + 2\delta_3 c_b c_h} + \frac{[4L\delta_3 + 3\delta_4] c_b c_h}{6L^2 \delta_1 - 3L\delta_2 (c_b + c_h) + 2\delta_3 c_b c_h} \right\}, \quad (13)$$

де G_0 – модуль зсуву при $x=0$ та $\delta_1 = L_i - L_{i-1}$,

$$\delta_2 = L_i^2 - L_{i-1}^2, \delta_3 = L_i^3 - L_{i-1}^3, \delta_4 = L_i^4 - L_{i-1}^4.$$

У пакеті програм Abaqus при аналізі власних коливань наразі неможливо обчислювати матрицю мас за визначеним користувачем законом змінювання густини. Більшість доступних в Abaqus

елементів використовують формулювання матриці зосереджених мас, де маса кожного вузла обчислюється шляхом множення густини, яка є сталою в межах елемента, на відповідну частину об'єму елемента, пов'язаного з цим вузлом [24]. Тому матрицю мас елемента в (8) пропонується сформулювати з використанням еквівалентної густини, що є усередненим значенням фактичного її розподілу в об'ємі балки, як описано в [23]. Таким чином, еквівалентна густина АФГБ зі змінним перерізом знаходиться за наступною формулою:

$$\rho_{eff} = \rho_0 \frac{11/6 - 13/12(c_b + c_h) + 47/60 c_b c_h}{1 - 1/2(c_b + c_h) + 1/3 c_b c_h}, \quad (14)$$

де ρ_0 – густина балки при $x = 0$.

Уніфіковані для одно- та тривимірних елементів підпрограми UMAT програмувалися мовою FORTRAN у середовищі MS Visual Studio та компілювалися з основним пакетом програм Abaqus за допомогою Intel Fortran Compiler для забезпечення їх сумісності. Частотний аналіз або задача на власні значення (9) в програмі Abaqus розв'язувалась методом Ланцоша [24].

Чисельні розрахунки. Для порівняння результатів розрахунків з даними, відомими у літературі, ми використовуємо матеріал із функціонально градієнтними властивостями, що відповідають закону (3). Згідно з цим законом, припускається, що мають місце такі градієнтні зміни: $E(x) = E_0 \sum_{j=0}^1 (x/L)^j$ і $\rho(x) = \rho_0 \sum_{j=0}^2 (x/L)^j$, а відповідні значення сталих при $x = 0$ представлені в табл. 1.

Таблиця 1 – Механічні параметри АФГБ

E_0 , ГПа	ρ_0 , кг/м ³	ν
1	1000	0.0

Таблиця 2 – Безрозмірні власні частоти $\bar{\omega}_n$ АФГБ з граничними умовами С-С.

c_h	c_b	0.0		0.2		0.4		0.6		0.8	
		$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_3$
0.0	1D	2.7978	46.3878	3.0220	47.7111	3.1273	51.0262	3.4041	52.9453	3.9092	55.6577
	3D	2.7978	49.3877	2.9192	50.2468	3.0860	51.3934	3.3349	53.0666	3.7665	56.2061
	[14]	2.4256	55.1800	2.6054	55.5337	2.8510	56.0230	3.2140	56.8000	3.8310	58.4350
0.2	1D	2.9110	45.1754	3.1396	47.1880	3.4501	48.2342	3.7033	49.7203	4.1464	52.2144
	3D	2.9192	46.2769	3.1548	47.1049	3.3281	48.1995	3.5860	49.7791	4.0308	52.5054
	[14]	2.5051	50.0491	2.6863	50.3934	2.9336	50.8645	3.2993	51.6029	3.9219	53.1332
0.4	1D	3.0679	42.9895	3.3018	43.7239	3.6189	44.6800	4.0797	46.0171	4.4303	48.2411
	3D	3.0860	42.8128	3.3281	43.5957	3.6581	44.6246	3.8625	45.3416	4.3859	48.6117
	[14]	2.6155	44.6181	2.7987	44.9504	3.0486	45.4003	3.4181	46.0957	4.0471	47.5129
0.6	1D	3.3032	38.9226	3.5441	39.5670	3.8691	40.3949	4.3384	41.5415	5.0953	43.4260
	3D	3.3349	38.8568	3.5861	39.5808	3.9266	40.5231	4.4240	41.8567	4.8993	44.1257
	[14]	2.7835	38.7446	2.9699	39.0605	3.2237	39.4844	3.5985	40.1304	4.2355	41.4236
0.8	1D	3.7084	33.5962	3.9595	34.1204	4.2941	34.7796	4.7711	35.6733	5.5259	37.1179
	3D	3.7665	34.1356	4.0308	34.7727	4.3859	35.5936	4.8993	36.7472	5.7341	38.7148
	[14]	3.0871	32.1309	3.2794	32.4229	3.5401	32.8123	3.9232	33.3986	4.5695	34.5521

Також приймається, що балка має довжину $L = 1$ м та розміри її початкового перерізу (при $x = 0$) $b_0 = h_0 = 10^{-2}$ м, який звужується лінійно за формулою (1), тобто $m = n = 1$. Коефіцієнти конусності та граничні умови вважаються довільними та будуть уточнені пізніше.

У табл. 2–4 наведено порівняння першої і третьої безрозмірних власних частот

$$\bar{\omega}_n^2 = \omega_n^2 \frac{\rho_0 A L^4}{E_0 I},$$

які були розраховані за допомогою

розроблених ГСЕ з використанням елементів B22 і C3D20 з бібліотеки пакета Abaqus та які наведені в роботі [14].

У розрахунках використовуються різні граничні умови для балки. Зокрема, розглянуті такі умови: консольна балка (С-С), жорстко закріплена (С-С) та вільно закріплена (Р-Р) на обох кінцях балки. Для побудови широкого набору балок з різним ступенем зміни геометрії їх поперечного перерізу використовувалися різні коефіцієнти конусності ширини та висоти. Одновимірна скінченно-елементна модель складалася з 10 секцій, кожна містила 5 елементів балки і загальна кількість ступенів вільності становила 603.

Порівнюючи результати в табл. 2–4, можна побачити, що вони є дуже добре узгодженими між одно- та тривимірними моделями, а також мають задовільну збіжність з референтними значеннями. Відносна похибка між скінченно-елементними та референтними результатами не перевершує 20%. Така різниця між ними зумовлена спрощеним формулюванням матриці мас для скінченно-елементної моделі, що базується на усередненому за об'ємом значенні густини матеріалу. Дане усереднення може впливати на точність результатів, особливо зі збільшенням номера моди. В результаті дослідження встановлено, що градієнтні скінченні елементи забезпечують достатній рівень точності для інженерних розрахунків та є дуже ефективними порівняно зі звичайними одно- та тривимірними елементами, які вимагають використання пошарових

Таблиця 3 – Безрозмірні власні частоти $\bar{\omega}_n$ АФГБ з граничними умовами С-С.

c_h	c_b	0.0		0.2		0.4		0.6		0.8	
		$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_3$
0.0	1D	18.9344	89.8242	19.0564	90.6590	19.1728	91.7363	19.2317	92.8795	19.1108	94.1889
	3D	18.9393	89.9246	19.0824	90.7805	19.2157	91.8091	19.2975	93.0319	19.1634	94.2582
	[14]	20.4721	110.947	20.4150	110.862	20.2880	110.671	20.0190	110.250	19.3850	109.142
0.2	1D	17.3108	83.9525	17.4573	84.7735	17.6011	85.7642	17.7130	86.9628	17.6707	88.2861
	3D	17.3094	84.0253	17.4726	84.8740	17.6330	85.8855	17.7563	87.0910	17.6974	88.3138
	[14]	18.2170	99.1734	18.1996	99.1474	18.1286	99.0414	17.9437	98.7543	17.4566	97.9046
0.4	1D	15.5597	77.0936	15.7277	77.8973	15.9024	78.8776	16.0565	80.0554	16.0849	81.4133
	3D	15.5178	77.0936	15.6983	77.9180	15.8850	78.8984	15.7870	78.7529	16.0686	81.2505
	[14]	15.8282	86.6272	15.8498	86.6608	15.8350	86.6414	15.7367	86.4932	15.4025	85.9176
0.6	1D	13.6122	68.9876	13.7951	69.7774	13.9894	70.7335	14.1734	71.9078	14.2555	73.3143
	3D	13.4812	68.6343	13.6770	69.4137	13.8872	70.3317	14.0927	71.4194	14.1969	72.5522
	[14]	13.2293	72.8740	13.2896	72.9681	13.3319	73.0382	13.3238	73.0375	13.1529	72.7615
0.8	1D	11.2334	59.0283	11.4121	59.7662	11.6037	60.6564	11.7925	61.7615	11.9058	63.1229
	3D	10.9777	57.3759	11.1846	58.0653	11.4170	58.8759	11.6678	59.8458	11.8812	60.9439
	[14]	10.2235	56.8109	10.3229	56.9674	10.4255	57.1341	10.5168	57.2991	10.5339	57.3787

Таблиця 4 – Безрозмірні власні частоти $\bar{\omega}_n$ АФГБ з граничними умовами Р-Р.

c_h	c_b	0.0		0.2		0.4		0.6		0.8	
		$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_3$
0.0	1D	8.7316	71.2496	8.8296	71.9633	8.9440	72.9020	9.0735	74.1352	9.2041	75.8500
	3D	8.7316	71.2462	8.8303	71.9667	8.9443	72.9089	9.0732	74.1803	9.2038	75.9677
	[14]	9.0286	81.7318	9.0600	81.6850	9.0870	81.6450	9.0990	81.6240	9.0690	81.6390
0.2	1D	8.0090	65.9634	8.0838	66.6459	8.1673	67.5188	8.2560	68.6966	8.3249	70.3109
	3D	7.9830	65.9634	8.0575	66.6563	8.1403	67.5465	8.2279	68.7486	8.2983	70.4183
	[14]	8.1341	73.1138	8.1462	73.0959	8.1498	73.0903	8.1336	73.1116	8.0646	73.1855
0.4	1D	7.2043	60.0433	7.2521	60.6841	7.3013	61.5121	7.3425	62.6136	7.3401	64.1205
	3D	7.1468	60.0156	7.1946	60.6668	7.2434	61.4982	7.1655	61.5813	7.2878	64.1240
	[14]	7.1531	63.9942	7.1455	64.0054	7.1254	64.0350	7.0794	64.1007	6.9703	64.2374
0.6	1D	6.2579	53.2952	6.2742	53.8945	6.2818	54.6601	6.2655	55.6785	6.1762	57.0745
	3D	6.1706	53.1047	6.1883	53.6936	6.1980	54.4418	6.1865	55.4256	6.1128	56.7662
	[14]	6.0357	54.0921	6.0082	54.1330	5.9638	54.1992	5.8868	54.3126	5.7351	54.5207
0.8	1D	4.9880	45.0645	4.9634	45.5911	4.9170	46.2562	4.8265	47.1361	4.6253	48.3485
	3D	4.9121	44.4375	4.8937	44.9398	4.8570	45.5668	4.7836	46.3913	4.6204	47.5309
	[14]	4.6520	42.8742	4.6046	42.7677	4.5355	42.8742	4.4264	43.0436	4.2283	43.3451

моделей. Крім того, одновимірна модель має додаткову перевагу у мінімальних обчислювальних витратах.

На рис. 3, як приклад, демонструються власні форми поперечних коливань, які відповідають першим трьом власним частотам консольної АФГБ з трьома типами перерізів: $c_h = 0$, $c_b = 0.8$ (випадок 1); $c_h = 0.8$, $c_b = 0.0$ (випадок 2) і $c_h = 0.8$, $c_b = 0.8$ (випадок 3). Приклади крутильних і поздовжніх форм власних коливань зазначених балок змінного поперечного перерізу також проілюстровано на рис. 4 для всіх трьох випадків.

Висновки. У цьому дослідженні було виконано скінченно-елементне моделювання та аналіз власних коливань аксіально функціонально градієнтних балок змінного прямокутного поперечного перерізу. Для цього в пакеті Abaqus було розроблено підпрограму моделі матеріалу UMAT, яка разом з процедурою усереднення густини матеріалу балки забезпечує практичний і уніфікований спосіб

призначення градієнтних властивостей неоднорідного матеріалу, що змінюються залежно від осової координати для скінченних елементів балки одновимірної моделі та гексагональних елементів тривимірної моделі.

Результати розрахунків показали, що розроблені градієнтні скінченні елементи здатні аналізувати модальну динаміку АФГМ балок з довільними аксіальними градієнтами матеріалу, різними граничними умовами та коефіцієнтами конусності. Отримані результати демонструють достатню точність навіть при використанні обмеженої кількості елементів. Таким чином, розроблені градієнтні скінченні елементи демонструють високий потенціал для успішного моделювання та аналізу АФГМ зі змінними перерізами, наприклад таких, що є частинами складних конструкцій.

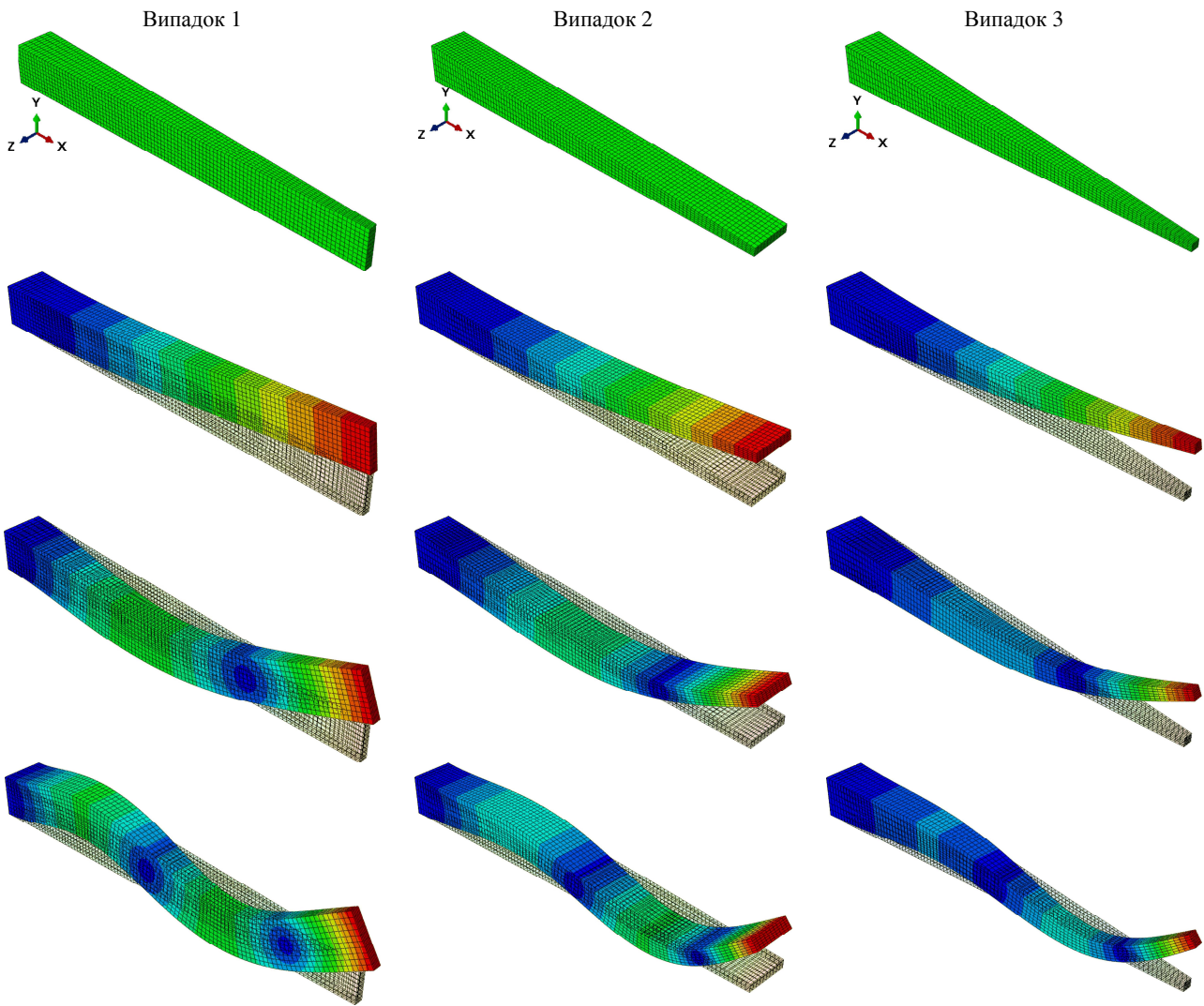


Рисунок 3 – Власні форми поперечних коливань, які відповідають першим трьом власним частотам консольної АФГБ

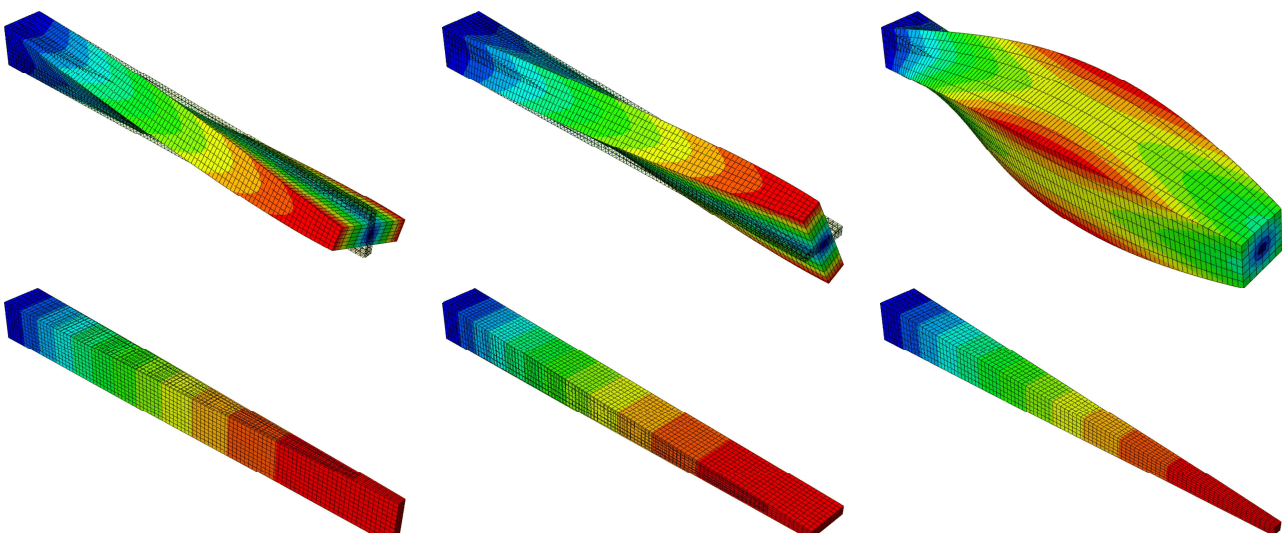


Рисунок 4 – Власні форми крутильних і поздовжніх коливань консольної АФГБ

Список літератури

1. Atkin E.H. Tapered beams: suggested solutions for some typical aircraft cases. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*. 1938, vol. 10 No. 11, pp. 347-351. doi: 10.1108/eb030395
2. Скорук Л.М., Сібіковський О.В. Розрахунок та моделювання поперечника каркасу з залізобетонними балками змінного поперечного перерізу. *Екологічні науки*. 2018, том. 2, № 20. С. 45-52.

3. Koizumi M. FGM activities in Japan. 1997, *Composites Part B: Engineering*. 1997, vol. 28, no. 1-2. P. 1-4. doi: 10.1016/S1359-8368(96)00016-9
4. Burlayenko, V.N., Sadowski, T. Dynamic analysis of debonded sandwich plates with flexible core – Numerical aspects and simulation. In: Altenbach, H., Eremeyev, V. (eds) Shell-like Structures. *Advanced Structured Materials*. 2011, vol. 15. P. 415-440. Springer, Berlin, Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-642-21855-2_27
5. El-Galy I.M., Saleh B.I., Ahmed, M.H. Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view. *SN Appl. Sci.* 2019, vol. 1. P. 1-23. doi: 10.1007/s42452-019-1413-4
6. Elishakoff I., Guédé Z. Analytical polynomial solutions for vibrating axially graded beams. *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2004, vol. 11. P. 517-533. doi: 10.1080/15376490490452669
7. Li Q.S. A new exact approach for determining natural frequencies and mode shapes of non-uniform shear beams with arbitrary distribution of mass or stiffness. 2000, *Int. J. Solids Struct.*, vol. 37. P. 5123-5141. doi: 10.1016/S0020-7683(99)00201-2
8. Li X.F., Kang Y.A., Wu J.X. Exact frequency equations of free vibration of exponentially functionally graded beams. *Appl. Acoust.* 2013, vol. 74, no. 3. P. 413-420. doi: 10.1016/j.apacoust.2012.08.003
9. Tang A.Y., Wu J.X., Li X.F., Lee K.Y. Exact frequency equations of free vibration of exponentially non-uniform functionally graded Timoshenko beams. 2014, *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 89. P. 1-11. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2014.08.017
10. Chen W.R., Chang H. Closed-form solutions for free vibration frequencies of functionally graded Euler-Bernoulli beams. 2017, *Mech. Compos. Mater.*, vol. 53. P. 79-98. doi: 10.1007/s11029-017-9642-3
11. Huang Y., Li X.-F. A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section., *J. Sound Vib.* 2010, vol. 329. P. 2291-2303. doi: 10.1016/j.jsv.2009.12.029
12. Hein H., Feklistova L. Free vibrations of non-uniform and axially functionally graded beams using Haar wavelets. *Eng. Struct.* 2011, vol. 33, P. 3696-3701. doi: 10.1016/j.engstruct.2011.08.006
13. Soltani M., Asgarian B. Lateral-torsional stability analysis of a simply supported axially functionally graded beam with a tapered I-section. *Mech. Compos. Mater.* 2020, vol. 56, P. 39-54. doi: 10.1007/s11029-020-09859-5
14. Shahba A., Rajasekaran S. Free vibration and stability of tapered Euler-Bernoulli beams made of axially functionally graded materials. *Applied Mathematical Modelling*. 2012, vol. 36, no. 7. P. 3094-3111. doi: 10.1016/j.apm.2011.09.073
15. Ghazaryan D., Burlayenko V.N., Avetisyan A., Bhaskar A. Free vibration analysis of functionally graded beams with non-uniform cross-section using the differential transform method. *J. Eng. Math.* 2018, vol. 110, no.1. P. 97-121. doi: 10.1007/s10665-017-9937-3
16. Kim J.-H., Paulino G. H. Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials. *J. Appl. Mech.* 2002, vol. 69, no. 4. P. 502-514. doi: 10.1115/1.1467094
17. Santare M. H., Lambros J. Use of graded finite elements to model the behavior of nonhomogeneous materials. *J. Appl. Mech.* 2000, vol. 67, no. 4. P. 819-822. doi: 10.1115/1.1328089
18. Rousseau C.-E., Tippur H.V. Compositionally graded materials with cracks normal to the elastic gradient. *Acta Mater.* 2000, vol. 48. P. 4021-4033. doi: 10.1016/S1359-6454(00)00202-0
19. Hajlaoui A., Chebbi E., Wali M., Dammak F. Static analysis of carbon nanotube-reinforced FG shells using an efficient solid-shell element with parabolic transverse shear strain. *Eng. Comput.* 2020, vol. 37 no. 3. P. 823-849. doi: 10.1108/EC-02-2019-0075
20. Chaker A., Koubaa S., Mars J. et al. An efficient ABAQUS solid shell element implementation for low velocity impact analysis of FGM plates. *Engineering with Computers*. 2021, vol. 37. P. 2145-2157. doi: 10.1007/s00366-020-00954-8
21. Burlayenko V. N., Altenbach H., Dimitrova S. D. A material model-based finite element free vibration analysis of one-, two- and three-dimensional axially FGM beams. 2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), Kharkiv, Ukraine, 2021. P. 628-633. doi: 10.1109/KhPIWeek53812.2021.9570013
22. Burlayenko V.N. Modelling thermal shock in functionally graded plates with finite element method. *Advances in Materials Science and Engineering*. 2016, vol. 2016. P. 1-16. doi: 10.1155/2016/7514638
23. Burlayenko V.N., Sadowski T., Altenbach H., Dimitrova S. Three-dimensional finite element modelling of free vibrations of functionally graded sandwich panels. In: Altenbach, H., Chróścielewski, J., Eremeyev, V., Wiśniewski, K. (eds) Recent Developments in the Theory of Shells. *Advanced Structured Materials*, 2019. vol. 110. P. 157-177. Springer, Cham. doi: 10.1007/978-3-030-17747-8_10
24. ABAQUS User's Manual, Version 2016. Dassault Systèmes Simulia Corp., Providence, RI, USA, 2016.

References (transliterated)

1. Atkin E.H. Tapered beams: suggested solutions for some typical aircraft cases. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*. 1938, vol. 10 No. 11, pp. 347-351. doi: 10.1108/eb030395
2. Skoruk L.M., Sibikovskiy O.V. Rozrahnok ta modeljuvannia nroperechnika karkasu z zalizobetonnyy balkamy zminnogo poperechnogo pererizu. *Ekologichni nauky*. 2018, tom 1 № 20. S. 45-52.
3. Koizumi M. FGM activities in Japan. 1997, *Composites Part B: Engineering*. 1997, vol. 28, no. 1-2. P. 1-4. doi: 10.1016/S1359-8368(96)00016-9.
4. Burlayenko, V.N., Sadowski, T. Dynamic analysis of debonded sandwich plates with flexible core – Numerical aspects and simulation. In: Altenbach, H., Eremeyev, V. (eds) Shell-like Structures. *Advanced Structured Materials*. 2011, vol. 15. P. 415-440. Springer, Berlin, Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-642-21855-2_27
5. El-Galy I.M., Saleh B.I., Ahmed, M.H. Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view. *SN Appl. Sci.* 2019, vol. 1. P. 1-23. doi: 10.1007/s42452-019-1413-4
6. Elishakoff I., Guédé Z. Analytical polynomial solutions for vibrating axially graded beams. *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2004, vol. 11. P. 517-533. doi: 10.1080/15376490490452669
7. Li Q.S. A new exact approach for determining natural frequencies and mode shapes of non-uniform shear beams with arbitrary distribution of mass or stiffness. 2000, *Int. J. Solids Struct.*, vol. 37. P. 5123-5141. doi: 10.1016/S0020-7683(99)00201-2
8. Li X.F., Kang Y.A., Wu J.X. Exact frequency equations of free vibration of exponentially functionally graded beams. *Appl. Acoust.* 2013, vol. 74, no. 3. P. 413-420. doi: 10.1016/j.apacoust.2012.08.003
9. Tang A.Y., Wu J.X., Li X.F., Lee K.Y. Exact frequency equations of free vibration of exponentially non-uniform functionally graded Timoshenko beams. 2014, *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 89. P. 1-11. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2014.08.017
10. Chen W.R., Chang H. Closed-form solutions for free vibration frequencies of functionally graded Euler-Bernoulli beams. 2017, *Mech. Compos. Mater.*, vol. 53. P. 79-98. doi: 10.1007/s11029-017-9642-3

11. Huang Y., Li X.-F. A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section., *J. Sound Vib.* 2010, vol. 329. P. 2291–2303. doi: 10.1016/j.jsv.2009.12.029
12. Hein H., Feklistova L. Free vibrations of non-uniform and axially functionally graded beams using Haar wavelets. *Eng. Struct.* 2011, vol. 33, P. 3696–3701. doi: 10.1016/j.engstruct.2011.08.006
13. Soltani M., Asgarian B. Lateral-torsional stability analysis of a simply supported axially functionally graded beam with a tapered I-section. *Mech. Compos. Mater.* 2020, vol. 56, P. 39–54. doi: 10.1007/s11029-020-09859-5
14. Shahba A., Rajasekaran S. Free vibration and stability of tapered Euler-Bernoulli beams made of axially functionally graded materials. *Applied Mathematical Modelling.* 2012, vol. 36, no. 7. P. 3094–3111. doi: 10.1016/j.apm.2011.09.073
15. Ghazaryan D., Burlayenko V.N., Avetisyan A., Bhaskar A. Free vibration analysis of functionally graded beams with non-uniform cross-section using the differential transform method. *J. Eng. Math.* 2018, vol. 110, no.1. P. 97-121. doi: 10.1007/s10665-017-9937-3
16. Kim J.-H., Paulino G. H. Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials. *J. Appl. Mech.* 2002, vol. 69, no. 4. P. 502–514. doi: 10.1115/1.1467094
17. Santare M. H., Lambros J. Use of graded finite elements to model the behavior of nonhomogeneous materials. *J. Appl. Mech.* 2000, vol. 67, no. 4. P. 819–822. doi: 10.1115/1.1328089
18. Rousseau C.-E., Tippur H.V. Compositionally graded materials with cracks normal to the elastic gradient. *Acta Mater.* 2000, vol. 48. P. 4021-4033. doi: 10.1016/S1359-6454(00)00202-0
19. Hajlaoui A., Chebbi E., Wali M., Dammak F. Static analysis of carbon nanotube-reinforced FG shells using an efficient solid-shell element with parabolic transverse shear strain. *Eng. Comput.* 2020, vol. 37 no. 3. P. 823-849. doi: 10.1108/EC-02-2019-0075
20. Chaker A., Koubaa S., Mars J. et al. An efficient ABAQUS solid shell element implementation for low velocity impact analysis of FGM plates. *Engineering with Computers.* 2021, vol. 37. P. 2145–2157. doi: 10.1007/s00366-020-00954-8
21. Burlayenko V. N., Altenbach H., Dimitrova S. D. A material model-based finite element free vibration analysis of one-, two- and three-dimensional axially FGM beams. 2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), Kharkiv, Ukraine, 2021. P. 628-633. doi: 10.1109/KhPIWeek53812.2021.9570013
22. Burlayenko V.N. Modelling thermal shock in functionally graded plates with finite element method. *Advances in Materials Science and Engineering.* 2016, vol. 2016. P. 1-16. doi: 10.1155/2016/7514638
23. Burlayenko V.N., Sadowski T., Altenbach H., Dimitrova S. Three-dimensional finite element modelling of free vibrations of functionally graded sandwich panels. In: Altenbach, H., Chróścielewski, J., Eremeyev, V., Wiśniewski, K. (eds) *Recent Developments in the Theory of Shells. Advanced Structured Materials*, 2019. vol 110. P. 157-177. Springer, Cham. doi: 10.1007/978-3-030-17747-8_10
24. ABAQUS User's Manual, Version 2016. Dassault Systèmes Simulia Corp., Providence, RI, USA, 2016.

Надійшла (received) 27.07.2023

Відомості про авторів /About the authors

Бурласко В'ячеслав Миколайович / Burlayenko Vyacheslav кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідувач кафедри прикладної математики; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0431-3103>; e-mail: burlayenko@yahoo.com

Кохіа Реію / Kouhia Reijo – доктор філософії, професор, Університет Тампере, професор кафедри механіки твердого тіла; м. Тампере, Фінляндія; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3378-5612>; e-mail: reijo.kouhia@tuni.fi

Дімітрова Світлана Дімова / Dimitrova Svetlana – кандидат педагогічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри вищої математики; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5019-149>; e-mail: dimitrovaburlayenko@gmail.com