

Н. О. ЛЕВІН, О. В. УСТИНЕНКО, М. БОШАНСЬКІ, Р. В. ПРОТАСОВ, О. В. БОНДАРЕНКО, С. В. АНДРІЄНКО

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА АЛГОРИТМ ОПТИМІЗАЦІЇ ЗА КРИТЕРІЄМ МІНІМАЛЬНИХ КОНТАКТНИХ НАПРУЖЕНЬ ЗУБЧАСТИХ ПЕРЕДАЧ З ОПУКЛО-УВІГНУТИМ КОНТАКТОМ

Зниження маси та габаритів зубчастих передач є актуальною задачею сучасного машинобудування. Одним із перспективних шляхів її розв'язання є застосування зачеплення з опукло-увігнутих контактом зубців. Дослідження присвячено розробці математичної моделі та алгоритму оптимального проєктування циліндричних зубчастих передач з опукло-увігнутих контактом робочих поверхонь. Критерій оптимальності: мінімальні контактні напруження з урахуванням конструктивних, геометричних та технологічних обмежень. Побудовано цільову функцію для випадка мінімізації контактних напружень: контактні напруження σ_H у зачепленні повинні приймати мінімально можливе значення при виконанні усіх обмежень. Визначені змінні проєктування: кут зачеплення в полюсі α_c , радіус кривизни верхньої частини лінії зачеплення r_{ub} , радіус кривизни нижньої частини лінії зачеплення r_{ld} . Обрано метод розв'язання задачі оптимального проєктування – зондування простору параметрів проєктування. У якості пробних точок використовуються точки ЛПт-послідовності. Розроблено алгоритм оптимального проєктування зубчастої передачі. Він враховує конструктивні, технічні та технологічні особливості останньої, а також дають змогу підвищити точність розрахунків за рахунок керування похибками обчислень. Основні етапи роботи алгоритму наступні: задання вхідних даних (числових обмежень на змінні проєктування, а також параметрів передачі та її навантаження); генерування ЛПт-послідовності для змінних проєктування з одночасним урахуванням їхніх числових обмежень; перевірка функціональних обмежень; додаткові перевірки розрахунки (при необхідності) контактної міцності зачеплення; формування масиву можливих варіантів розв'язку; пошук найкращого варіанта розв'язку (пробної точки, що відповідає мінімальному значенню цільової функції) шляхом сортування масиву.

Ключові слова: зубчаста передача, опукло-увігнутий контакт, оптимізація, цільова функція, змінні проєктування, алгоритм.

N. LEVIN, O. USTYNENKO, M. BOŠANSKÝ, R. PROTASOV, O. BONDARENKO, S. ANDRIENKO

MATHEMATICAL MODEL AND OPTIMIZATION ALGORITHM ACCORDING TO THE CRITERIA OF MINIMUM CONTACT STRESS FOR GEARS WITH CONVEX-CONCAVE CONTACT

Reducing the mass and dimensions of gears is an actual task of modern mechanical engineering. One of the perspective ways to solve it is the use of gearing with a convex-concave contact of the teeth. The study is devoted to the development of mathematical model and algorithm for the optimal design of cylindrical gears with convex-concave contact of the working surfaces. Optimality criteria: minimum contact stresses taking into account design, geometrical and technological constraints. An objective function is constructed for the case of minimizing contact stresses: contact stresses σ_H in the mesh must take the minimum possible value when all constraints are met. Variables planning are defined. These are pressure angle at the pole α_c , the curvature radius at the upper part of contact path r_{ub} , and the curvature radius at the lower part of contact path r_{ld} . A method for solving the problem of optimal design is chosen – probing the space of design parameters was chosen from all the variety. The points of the LPt-sequence are used as test points. The algorithm for optimal design of gear has been developed. They take into account the constructive, technical and technological features. They also allow to reduce the error of the calculations due to the error-control of the calculations. The main stages of the algorithm are as follows: setting input data (numerical constraints on design variables, gear parameters and its load); generation of LPt-sequence for variables planning with simultaneous consideration of their numerical constraints; checking of functional constraints; additional verification calculations (if necessary) of the gearing contact strength; formation of an array of possible solutions; searching of the best solution variant (the test point corresponding to the minimum value of the objective function) by sorting the array.

Keywords: gear, convex-concave contact, optimization, objective function, variables planning, algorithm

Вступ. Актуальність задачі. Поліпшення навантажувальної здатності та масогабаритних характеристик циліндричних зубчастих передач є актуальною науково-прикладною задачею сучасного світового машинобудування. Це пов'язано з їх широким застосуванням у вигляді редукторів загального призначення, у складі трансмісій колісних та гусеничних машин, редукторів турбогвинтових авіаційних та газотурбінних корабельних двигунів тощо.

Найбільш поширене у світі евольвентне зачеплення, незважаючи на відносну простоту геометрії та виготовлення, має суттєві недоліки, основним з яких є двоопуклий контакт в зачепленні та, як наслідок, обмежена контактна міцність зубців передачі. Тому один із шляхів суттєвого підвищення навантажувальної здатності зубчастих передач та одночасного поліпшення масогабаритних характеристик є застосування зачеплення з опукло-увігнутих контактом (ОУК) зубців.

Аналіз існуючих досліджень. За останні 100 років синтезу геометрії та дослідженню навантажувальної здатності зубчастих передач з ОУК було присвячено величезну кількість робіт, докладний аналіз яких зайняв би увесь обсяг статті. Насамперед відзначимо англійських інженерів Ф. Бостона, С. Брамлі-Мура (1921 р.), американського інженера

Е. Вільдгабера (1923 р.) [1], італійця А. Роано (1947 р.), радянського дослідника М. Л. Новікова (1958 р.) [2] (у світі передачі з таким зачепленням мають назву «зачеплення Вільдгабера-Новікова» [1], підкреслюючи тим самим першість саме Е. Вільдгабера), словацьких вчених М. Бошанські та М. Вереша (2000-2020 рр.) [3], українських вчених І. Є. Грицяя [4], О. С. Вітренка, П. Л. Носка, В. П. Шишова [5] та А. І. Павлова [6]. Нагадаємо, що передачу Вільдгабера-Новікова неможливо зробити прямозубцевою, але для інших вищезгаданих передач таке обмеження відсутнє.

Постановка задачі. Виконаний на наш час величезний обсяг теоретичних та експериментальних досліджень зачеплень з ОУК продемонстрував їхню вагому перевагу перед традиційним евольвентним. Але треба констатувати, що передачі з ОУК так і не набули значного впровадження у світовій промисловості. Одна із причин полягає в тому, що не існує достатньо чіткої системи призначення параметрів зачеплень з ОУК, при яких забезпечується суттєве підвищення їхньої міцності та витривалості у порівнянні з евольвентними. До останнього часу не проведено детальний аналіз впливу якісних показни-

© Н. О. Левін, О. В. Устиненко, М. Бошанські, Р. В. Протасов, О. В. Бондаренко, С. В. Андрієнко, 2023

ків різних типів зачеплень з ОУК на навантажувальну здатність приводів.

Одним з перспективних напрямів на шляху розв'язання цієї задачі є визначення основних геометричних та конструктивних параметрів зачеплення за допомогою методів математичної оптимізації. Варіюючи цими параметрами з урахуванням конструктивних, геометричних та технологічних обмежень, ми маємо можливість отримати передачу з мінімальними контактними напруженнями у зачепленні (тобто з мінімальними габаритами при заданому навантаженні), або з мінімальними значеннями відносних швидкостей ковзання профілів (максимальна зносостійкість), або знайти компромісний варіант, який буде задовольняти максимальній зносо-контактній витривалості.

У попередніх роботах [7, 8] авторами було виконано початкову постановку оптимізаційної задачі, а саме: побудовані цільові функції за критеріями мінімальних контактних напружень у зачепленні та мінімальних відносних швидкостей ковзання профілів; визначені змінні проектування; обрано метод розв'язання задачі. Також було обґрунтовано обрання для подальших досліджень С-С (Convex-Concave) зачеплення, що запропоноване М. Бошанські та М. Верешем [3]. При цьому зазначено, що більшість подальших досліджень (за виключенням деяких математичних викладок) можливо з мінімальними витратами часу адаптувати для оптимального проектування деяких інших зачеплень з ОУК.

Отже, **метою цього дослідження** є:

– повне формування математичної моделі оптимізації циліндричних передач з ОУК робочих поверхонь зубців за критерієм мінімальних контактних напружень з урахуванням конструктивних, геометричних та технологічних обмежень;

– побудова докладного алгоритму оптимізації передач з ОУК з урахуванням обраного методу розв'язання задачі, а саме, зондування простору параметрів за допомогою точок ЛПТ-последовності [9].

Основні характеристики та особливості С-С зачеплення. У дослідженнях М. Бошанські та М. Вереша [3] було запропоновано створювати опукло-увігнутий профіль зубця шестерні по попередньо заданій лінії зачеплення (рис. 1).

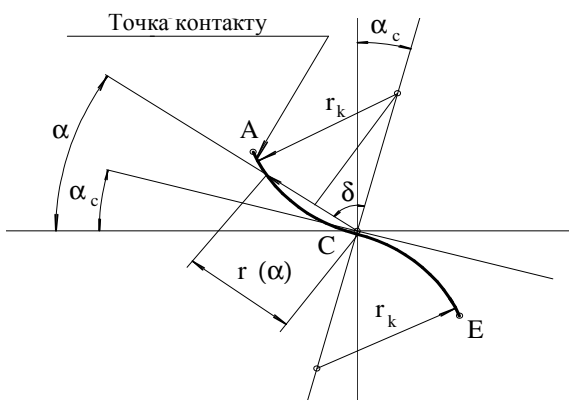


Рисунок 1 – Лінія зачеплення С-С передачі

При цьому лінія зачеплення складається або з двох симетричних відносно полюса зачеплення дуг

(дуги рівного радіусу) або з несиметричних дуг (дуги, які не дорівнюють радіусу). У разі симетричної лінії зачеплення має місце увігнуто-опуклий контакт, а в разі несиметричної – опукло-увігнутий.

Параметричні рівняння, за якими визначаються координати точок профілів зубців шестерні 1 та колеса 2, мають наступний вигляд [3]:

$$\begin{aligned} x_{1,2;h,d} &= \mp 2r_{kh,d} \sin(\alpha - \alpha_c) \cos(\alpha + \varphi_r(\alpha)) + r_{1,2} \sin \varphi_r(\alpha); \\ y_{1,2;h,d} &= \pm 2r_{kh,d} \sin(\alpha - \alpha_c) \sin(\alpha + \varphi_r(\alpha)) + r_{1,2} \cos \varphi_r(\alpha); \\ \varphi_r &= \pm \frac{2r_{kh,d}}{r_{1,2}} \left[(\alpha - \alpha_c) \cos \alpha_c + \sin \alpha_c \lg \frac{\cos \alpha_c}{\cos \alpha} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

де r_{kh} та r_{kd} – радіуси кривизни відповідно верхньої та нижньої частин лінії зачеплення (рис. 2), які задаються проектувальником;

$r_{1,2} = 0,5mz_{1,2}$ – ділильні радіуси шестерні та колеса;

α_c – кут зачеплення в полюсі;

α – поточний кут профіля зубця, який змінюється у межах

$$\alpha_p \leq \alpha \leq \alpha_a,$$

де α_a та α_p – кути профілю на вершині зубця та у нижній точці активного профіля.

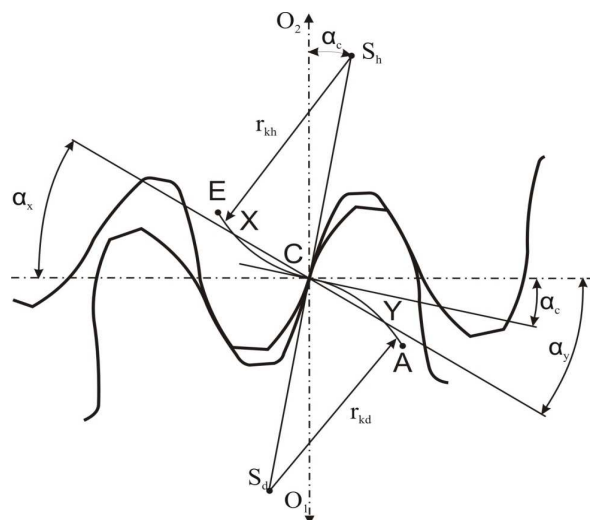


Рисунок 2 – Схема С-С передачі

Побудова цільової функції у випадку мінімізації контактних напружень. Критерій оптимальності у цьому випадку сформулюємо досить просто: контактні напруження у зачепленні повинні приймати мінімальне можливе значення при виконанні усіх вимог та обмежень. Тоді запишемо цільову функцію F_σ у наступному вигляді:

$$F_\sigma = \sigma_H \rightarrow \min. \quad (2)$$

Для розрахунку контактних напружень σ_H , МПа, скористаємось загальновідомою формулою Г. Герца [10] для випадку початкового дотику пружних тіл по лінії

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{F_n E_H}{b_w \rho_H}}, \quad (3)$$

де $\rho_H = (\rho_1 \cdot \rho_2) / (\rho_2 \pm \rho_1)$ – приведений радіус кри-

визни в контакті двох поверхонь, він є основним геометричним фактором, який впливає на величину контактних напружень (знак «+» при двоопуклому контакті, а «-» при опукло-увігнутому);

$E_H = 2(E_1 \cdot E_2)/(E_1 + E_2)$ – приведений модуль пружності матеріалів зубчастих коліс;

b_w – робоча ширина зубця;

F_n – нормальне зусилля у зачепленні.

Радіуси кривизни профілів зубців шестерні ρ_1 та колеса ρ_2 будемо визначати за допомогою відомої формули з диференціальної геометрії, випадок параметричного завдання кривої,

$$\frac{1}{\rho_{1,2,h,d}} = \frac{y_{1,2,h,d}''(\alpha) \cdot x_{1,2,h,d}'(\alpha) - x_{1,2,h,d}''(\alpha) \cdot y_{1,2,h,d}'(\alpha)}{(x_{1,2,h,d}'(\alpha)^2 + y_{1,2,h,d}'(\alpha)^2)^{3/2}}. \quad (4)$$

Таким чином, рівняння (1)...(4) складають математичну модель оптимізації С-С зачеплення за критерієм мінімальних контактних напружень.

Визначення змінних проєктування. На форму профілю бічної поверхні зубця С-С зачеплення, його основні кінематичні та геометричні характеристики можуть впливати наступні вихідні параметри [3]:

– кут зачеплення в полюсі α_C ;

– радіуси кривизни верхньої та нижньої частин лінії зачеплення r_{kh} та r_{kd} ;

– коефіцієнти висоти головки та ніжки зубця вихідного контуру h_a^* та h_f^* ;

– модуль зачеплення m ;

– числа зубців шестерні та колеса z_1 та z_2 (рис. 2).

Параметри h_a^* та h_f^* , m , z_1 та z_2 зазвичай признаються проєктувальником, виходячи із потрібного передатного числа та згинальної міцності зубців. Вони не мають безпосереднього впливу на контактні напруження та відносні швидкості ковзання профілів. Інші параметри безпосередньо впливають на радіуси кривизни профілів та, відповідно, на контактні напруження [3, 11]. Виходячи з цього, обираємо у якості змінних проєктування для обох цільових функцій наступні параметри:

1. Кут зачеплення в полюсі α_C .

2. Радіус кривизни верхньої частини лінії зачеплення r_{kh} .

3. Радіус кривизни нижньої частини лінії зачеплення r_{kd} .

Основи методу розв'язання задачі оптимізації. Як було запропоновано авторами у роботі [7], у якості метода розв'язання задачі обрано так званий метод ЛПТ-пошуку [9]. Він дає змогу оперувати значною кількістю параметрів (до 51) та забезпечує достатню велику кількість рівномірно-розподілених пробних точок (до 2^{20}).

Скористуємось основними положеннями та розрахунковими залежностями [9] щодо рівномірно розподілених послідовностей.

Якщо точки Q_i з декартовими координатами $(q_{i,1}, \dots, q_{i,n})$ є рівномірно розподіленою послідовністю в K^n (одичинний n -вимірний куб), то точки X_i з декартовими координатами $(x_{i,1}, \dots, x_{i,n})$, де при $j = 1, 2, \dots, n$ (j – порядковий номер змінної проєктування, n – їхня кількість),

$$x_{i,j} = a_j + (b_j - a_j) q_{i,j} \quad (5)$$

є рівномірно розподіленою послідовністю в паралелепіпеді Π (n -вимірний паралелепіпед), що складається з точок (x_1, \dots, x_n) , координати яких задовольняють нерівностям $a_j \leq x_j \leq b_j$.

Декартові координати $q_{i,j}$ для ЛПТ-послідовності зазвичай обчислюються за арифметичним алгоритмом. Він базується безпосередньо на розрахунках за спеціальною таблицею чисельників $r_j^{(l)}$. За заданим номером точки i спочатку обчислюємо допоміжну величину m , а потім для кожного j -го параметру обчислюємо координату $q_{i,j}$,

$$m = 1 + \left[\frac{\ln i}{\ln 2} \right];$$

$$q_{i,j} = \sum_{k=1}^m 2^{-k+1} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{l=k}^m \left[2 \{ i^{-l} \} \right] \cdot \left[2 \{ r_j^{(l)} 2^{k-1-l} \} \right] \right\}, \quad (6)$$

де $\{Y\}$ – ціла частина деякого числа Y ;

$\{Y\}$ – дробова частина того ж числа.

Таким чином, розв'язання задачі оптимізації методом ЛПТ-пошуку складається з наступних етапів.

1. Завдання вхідних даних, у тому числі обмежень на змінні проєктування.

2. Генерування декартових координат $q_{i,j}$ за залежністю (6).

3. Генерування значень змінних проєктування $x_{i,j}$ згідно залежності (5). Тут $i = 1, 2, \dots, 2^{20}$ – номер пробної точки; $j = 1, 2, 3$ – порядковий номер змінної проєктування; a_j, b_j – відповідно мінімальні та максимальні значення обмежень на змінні проєктування.

4. Перевірка обмежень на змінні проєктування.

5. Складання масиву можливих варіантів.

6. Пошук оптимального значення шляхом сортування масиву.

Таким чином, математичний апарат ЛПТ-пошуку дає змогу швидко та якісно знаходити оптимальні геометричні та конструктивні параметри С-С зачеплень.

Алгоритм оптимізації С-С зачеплення. Додатково вище наведені математичну модель і метод ЛПТ-пошуку етапами вводу-виводу даних, складання таблиці можливих комбінацій параметрів, пошуку найкращого варіанта та об'єднаємо їх у єдиний алгоритм, який представлено на рис. 3. Далі докладно розглянемо його роботу.

Функціонування алгоритму оптимізації проходить наступним чином.

1. *Завдання вхідних даних.* Їхньою основою є геометричні та кінематичні параметри передачі, конструкторські та технологічні вимоги, а також фізико-механічні властивості матеріалів зубчастих коліс. Розглянемо деякі з них докладніше.

1.1. Числові обмеження на змінні проєктування:

$\alpha_{Cmin}, \alpha_{Cmax}$ – мінімальне та максимальне значення кута зачеплення в полюсі. Мінімальне значення знаходиться із умови відсутності заклинювання передачі: $\alpha_{Cmin} \geq (1,1 \dots 1,2) \operatorname{tg} f$, де f – коефіцієнт тертя ковзання у зачепленні. Максимальне значення призначається у межах $25 \dots 28^\circ$, виходячи із досвіду

проектування С-С зачеплення [3];

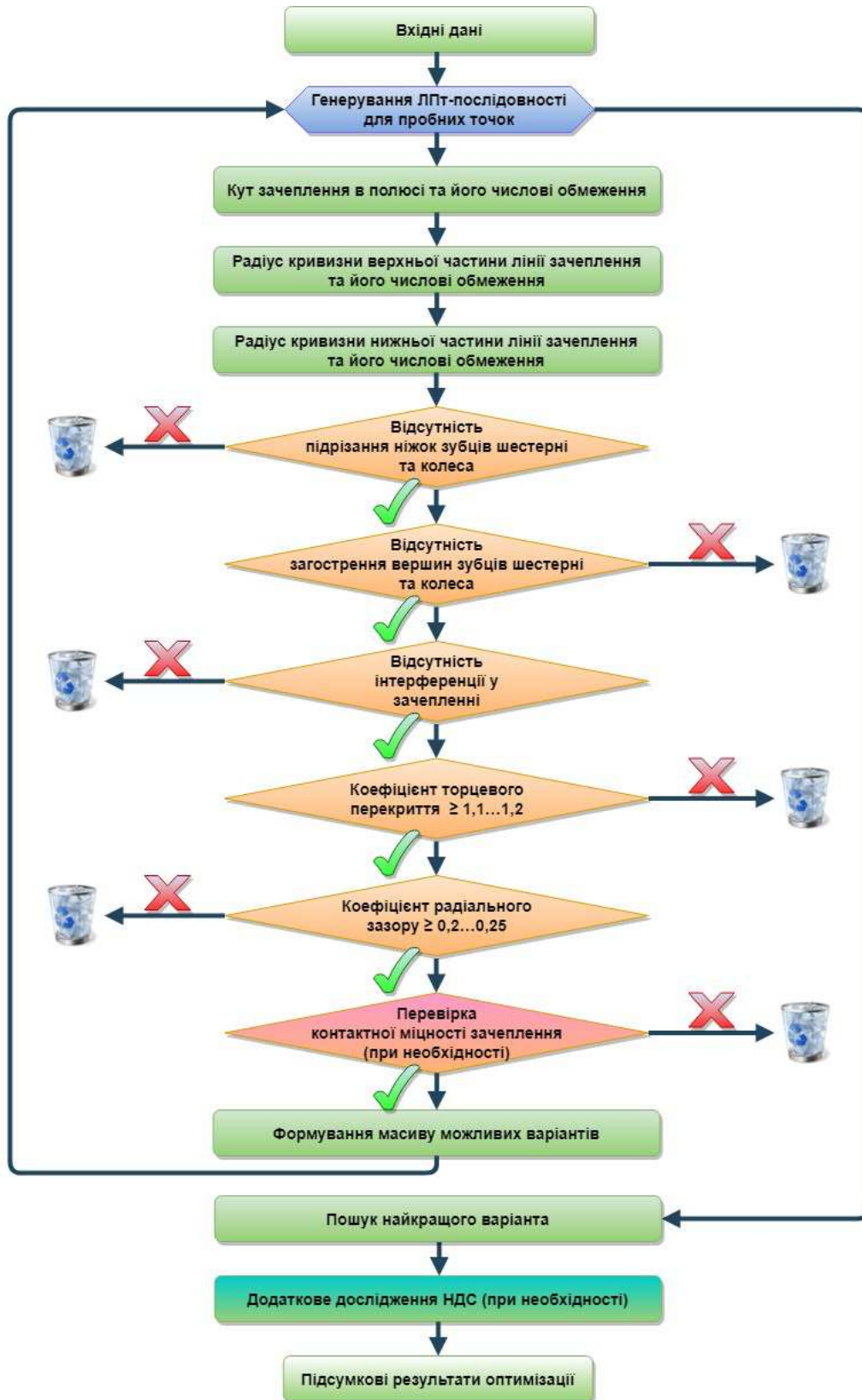


Рисунок 3 – Схема алгоритму оптимізації С-С зачеплення за критерієм мінімальних контактних напружень

$r_{k\min}$, $r_{k\min}$ та $r_{k\max}$, $r_{k\max}$ – мінімальні та максимальні значення радіусів кривизни лінії зачеплення. Вони обмежуються діапазоном 4...14 мм, виходячи з теорії С-С зачеплення та досвіду проектування [3].

1.2. Параметри передачі та її навантаження:

T_1 – обертальний момент на шестерні;

m – модуль зачеплення;

z_1, z_2 – числа зубців шестерні та колеса;

b_w – робоча ширина зубця;

E_1, E_2 – модулі пружності матеріалів шестерні та колеса.

2. Генерування ЛПТ-послідовності для змінних

проектування з одночасним урахуванням їхніх числових обмежень. Взявши за основу залежність (5), маємо наступні формули.

2.1. Для кута зачеплення в полюсі α_C ,

$$\alpha_{Ci} = \alpha_{C\min} + (\alpha_{C\max} - \alpha_{C\min}) q_{i1}. \quad (7)$$

2.2. Для радіуса кривизни верхньої частини лінії зачеплення r_{kh} ,

$$r_{khi} = r_{kh\min} + (r_{kh\max} - r_{kh\min}) q_{i2}. \quad (8)$$

2.3. Для радіуса кривизни нижньої частини лінії зачеплення r_{kd} ,

$$r_{kdi} = r_{kd\min} + (r_{kd\max} - r_{kd\min}) q_{i3}. \quad (9)$$

3. *Перевірка функціональних обмежень* (докладніше щодо обмежень на змінні проектування дивись [8]).

3.1. Відсутність підрізання ніжок зубців шестерні та колеса.

3.2. Відсутність загострення вершин зубців шестерні та колеса.

3.3. Відсутність інтерференції у зачепленні.

3.4. Коефіцієнт торцевого перекриття ε_α повинен задовольняти умові $\varepsilon_\alpha \geq 1,1 \dots 1,2$.

3.5. Коефіцієнт радіального зазору c^* повинен задовольняти умові $c^* \geq 0,2 \dots 0,25$.

4. *Додаткові перевірочні розрахунки* (при необхідності). У випадку, коли розв'язується задача не тільки знаходження оптимальних параметрів, а також практичного оптимального проектування конкретної передачі, алгоритм дає змогу виконати перевірку контактної міцності зачеплення за залежністю

$$\sigma_H \leq \sigma_{HP}, \quad (10)$$

де σ_{HP} – допустимі контактні напруження, які необхідно додати до вхідних даних алгоритму.

Умова (10) у цьому випадку є додатковим функціональним обмеженням на значення цільової функції (2).

5. *Формування масиву можливих варіантів розв'язку*. Якщо пробна точка проходить всі обмеження, то для неї розраховується значення цільової функції (2), тобто контактних напружень за залежністю (3). Після цього точка потрапляє до таблиці можливих варіантів. Таблиця являє собою двовимірний масив, в ньому кожному номеру точки відповідає значення цільової функції, а також набір відповідних значень параметрів проектування.

6. *Пошук найкращого варіанта* (пробної точки, що відповідає мінімальному значенню цільової функції). Він здійснюється шляхом сортування масиву одним із загальновідомих методів [12], наприклад, бульбашковим сортуванням.

7. *Додаткове дослідження напружено-деформованого стану (НДС) зачеплення для найкращого та декількох найближчих варіантів* (при необхідності). Доцільно виконувати, якщо для декількох варіантів отримані дуже близькі значення контактних напружень. У цьому випадку аналіз контактної взаємодії у зачепленні з ОУК методом скінченних елементів (МСЕ) [11] дає змогу остаточно обрати найкращий варіант. Також при цьому можливо проаналізувати згинні напруження у корені зубця. Може виконуватися

також за допомогою будь якого з поширених у світовій практиці спеціалізованих програмних комплексів, наприклад, ANSYS [13] або Autodesk Inventor Nastran (Nastran In-CAD) [14].

Висновки:

1. Оптимізація циліндричних зубчастих передач з опукло-увігнутим контактом робочих поверхонь є перспективною науково-прикладною задачею, розв'язання якої дає змогу суттєво поліпшити навантажувальну здатність та масогабаритні показники механічних приводів.

2. Побудовано математичну модель оптимізації С-С зачеплення за критерієм мінімальних контактних напружень, яка на відміну від існуючих більш коректно моделює зачеплення з опукло-увігнутим контактом та дає змогу врахувати його геометричні та кінематичні особливості.

3. Визначені змінні проектування, у якості яких обрані параметри, що безпосередньо впливають на контактні напруження у зачепленні. Це кут зачеплення в полюсі α_C ; радіус кривизни верхньої частини лінії зачеплення r_{kh} та радіус кривизни нижньої частини лінії зачеплення r_{kd} .

4. У якості метода розв'язання задачі обрано зондування простору параметрів за допомогою метода ЛПт-пошуку. Він забезпечує швидке та достатньо точне знаходження оптимальних геометричних параметрів С-С зачеплення.

5. Розроблено загальну схему алгоритму розв'язання задачі оптимізації С-С зачеплення за критерієм мінімальних контактних напружень. Він враховує геометричні та кінематичні параметри передачі, конструкторські та технологічні вимоги, а також фізико-механічні властивості матеріалів зубчастих коліс.

6. У алгоритмі поєднано математичну модель, обмеження на змінні проектування та метод оптимізації з раціональною послідовністю перевірки обмежень, а також з аналізом і обробкою отриманих результатів. При необхідності він дає змогу виконати практичне оптимальне проектування передачі з конкретними конструктивними параметрами та умовами роботи. Все це є його беззаперечною перевагою.

7. У подальших дослідженнях планується провести тестові та перевірочні розрахунки з метою підтвердження і оцінки отриманих теоретичних результатів, а також запропонувати варіанти С-С зачеплень із підвищеною навантажувальною здатністю.

Список літератури

1. Radzevich P. Stephen. *High-Conformal gearing. Kinematics and Geometry*. CRC Pres, 2016. 349 p.
2. Korotkin Viktor, Onishkov Nikolay, Kharitonov Yuri. *Novikov gearing: achievements and development*. Nova Science Publishers, Inc., 2011. 272 p.
3. Vereš, M., Božanský, M., Gaduš J. *Theory of Convex-Concave and plane cylindrical gearing*. STU, Bratislava, Slovakia, 2006. 180 p.
4. Шишов В. П., Носко П. Л., Филь П. В. *Теоретические основы синтеза передач зацеплением*. Луганськ, Видавництво СНУ ім. В. Даля, 2006. 408 с.
5. Грицай І. Є., Литвиняк Я. М. Синусоїдальні зубчасті передачі як альтернатива традиційним передачам та новий метод їх виготовлення. *Вісник НТУ "ХПІ". Тематичний випуск "Проблеми механічного приводу"*. Харків, НТУ "ХПІ", 2009, № 19, с. 43–53.
6. Павлов А. И. *Современная теория зубчатых зацеплений*. Харьков, ХНАДУ, 2005. 100 с.

7. О. В. Устиненко, Н. О. Левін, О. В. Бондаренко, М. Бошанські, Р. В. Протасов, С. В. Андриєнко, М. В. Матюшенко. Оптиміальне проектування циліндричних зубчастих передач з опукло-увігнутим контактом: цільова функція та змінні проектування. *Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Машинознавство та САПР*. Харків, НТУ "ХПІ", 2021, № 2, с. 129–134.
8. Левін Н.О., Протасов Р.В., Андриєнко С.В., Устиненко О.В., Бондаренко О.В. Математична модель оптимізації зубчастих передач з опукло-увігнутим контактом. *Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць МДПУ ім. Б. Хмельницького*. Мелітополь, вид-во МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2021, вип. 23, с. 135–142.
9. I. Sobol', D. Asotsky, A. Kreinin, S. Kucherenko. Construction and Comparison of High-Dimensional Sobol' Generators. *Wilmott Journal*, 2011, Nov, pp. 64–79.
10. *Dudley's Handbook of Practical Gear Design and Manufacture*. Fourth edition. Edited by Stephen P. Radzevich. Boca Raton, CRC Pres, 2022. 1144 p.
11. Protasov Roman, Andrienko Sergey, Ustinenko Alexander, Bondarenko Alexey, Matushenko Nicholay. Geometry Modeling of Gear and Chain Drive with Evolute Profile and Research of Its Contact Stress. *Fiabilitate și durabilitate (Fiability & Durability)*. "Constantin Brâncuși" University of Târgu Jiu. Târgu Jiu, May, 2017, Issue: 1(19)/2017, pp.287–293.
12. Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming: Volume 1: Fundamental Algorithms*. Addison-Wesley Professional, 1997. 672 p.
13. ANSYS: *Engineering Simulation Software*. Режим доступу: <https://www.ansys.com/>. Дата звернення 22 травня 2023.
14. *Inventor Nastran: CAD-embedded finite element analysis*. Режим доступу: <https://www.autodesk.com/products/inventor-nastran/> overview. Дата звернення 22 травня 2023.
- jak al'ternatyva tradycijnym peredacham ta novyj metod i'h vygotovlennja [Sinusoidal gears as an alternative to traditional gears and a new method of their manufacture]. *Visnyk NTU "KhPI". Tematychnyj vypusk "Problemy mehanichnogo pryvodu"* [Bulletin of the NTU "KhPI". Thematic issue Problem of mechanical drive]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2009, no. 19, pp. 43–53.
6. Pavlov A. I. *Sovremennaya teoriya zubchatikh zaceplenij* [The modern theory of gearing]. Kharkov, KhNADU Publ., 2005, 100 p.
7. O. V. Ustynenko, N. O. Levin, O. V. Bondarenko, M. Bošanský, R. V. Protasov, S. V. Andrienko, M. Matushenko. Optymal'ne proektuvannya cylindrychnykh zubchastykh peredach z opuklo-uvihnutym kontaktom: cil'ova funkciya ta zminni proektuvannya [Optimal design of cylindrical gears with convex-concave contact: objective function and variables planning]. *Visnyk NTU "KhPI". Serija: "Mashynoznavstvo ta SAPR"* [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Engineering and CAD]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2021, no. 2, pp. 129–134.
8. Levin N.O., Protasov R.V., Andrienko S.V., Ustynenko O.V., Bondarenko O.V. Matematychna model' optymizaciyi zubchastykh peredach z opuklo-uvihnutym kontaktom [A mathematical model of optimization for gears with convex-concave contact]. *Suchasni problemy modelyuvannya: zb. nauk. prac' MDPU im. B. Khmel'nyc'kogo* [Modern problems of modeling: coll. of science works by MDPU named after B. Khmelnytskyi]. Melitopol, MDPU named after B. Khmelnytskyi Publ., 2021, vol. 23, pp. 135–142.
9. I. Sobol', D. Asotsky, A. Kreinin, S. Kucherenko. Construction and Comparison of High-Dimensional Sobol' Generators. *Wilmott Journal*, 2011, Nov, pp. 64–79.
10. *Dudley's Handbook of Practical Gear Design and Manufacture*. Fourth edition. Edited by Stephen P. Radzevich. Boca Raton, CRC Pres, 2022. 1144 p.
11. Protasov Roman, Andrienko Sergey, Ustinenko Alexander, Bondarenko Alexey, Matushenko Nicholay. Geometry Modeling of Gear and Chain Drive with Evolute Profile and Research of Its Contact Stress. *Fiabilitate și durabilitate (Fiability & Durability)*. "Constantin Brâncuși" University of Târgu Jiu. Târgu Jiu, May, 2017, Issue: 1(19)/2017, pp.287–293.
12. Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming: Volume 1: Fundamental Algorithms*. Addison-Wesley Professional, 1997. 672 p.
13. ANSYS: *Engineering Simulation Software*. Available at: <https://www.ansys.com/>. Accessed 22 May 2023.
14. *Inventor Nastran: CAD-embedded finite element analysis*. Available at: <https://www.autodesk.com/products/inventor-nastran/overview>. Accessed 22 May 2023.

References (transliterated)

1. Radzevich P. Stephen. *High-Conformal gearing. Kinematics and Geometry*. CRC Pres, 2016. 349 p.
2. Korotkin Viktor, Onishkov Nikolay, Kharitonov Yuri. *Novikov gearing: achievements and development*. Nova Science Publishers, Inc., 2011. 272 p.
3. Vereš, M., Bošanský, M., Gaduš J. *Theory of Convex-Concave and plane cylindrical gearing*. STU, Bratislava, Slovakia, 2006. 180 p.
4. Shishov V. P., Nosko P. L., Fil' P. V. *Teoreticheskie osnovy sinteza peredach zacepleniem* [Theoretical foundations of the synthesis of transmissions by gearing]. Lugansk'sk, SNU im. V. Dalja Publ., 2006. 408 p.
5. Grycaj I. Je., Lytvynjak Ja. M. Synusoid'al'ni zubchasti peredachi

Надійшла (received) 28.07.2023

Відомості про авторів / About the Authors

Левін Нікіта Олександрович / Levin Nickita – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-69-01; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4155-6553>; e-mail: nlevin97@gmail.com

Устиненко Олександр Віталійович / Ustynenko Oleksandr – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), доцент, старший науковий співробітник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-64-78; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6714-6122>; e-mail: ustin1964@tmm-saprg

Мірослав Бошанські / Miroslav Bošanský – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), професор, Словацький технічний університет в Братиславі, професор кафедри транспортної техніки та конструювання; м. Братислава, Словаччина; тел.: +421-257-296-426; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0505-2689>; e-mail: miroslav.bosansky@stuba.sk

Протасов Роман Васильович / Protasov Roman – Словацький технічний університет в Братиславі, старший викладач кафедри транспортної техніки та конструювання; м. Братислава, Словаччина; тел.: +421-949-352-655; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1611-0610>; e-mail: roman.protasov@stuba.sk

Бондаренко Олексій Вікторович / Bondarenko Oleksiy – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин; м. Харків, Україна; тел.: (067) 189-97-00; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2693-5301>; e-mail: avbondko@gmail.com

Андриєнко Сергій Володимирович / Andrienko Sergij – Харківський національний автомобільно-дорожній університет, викладач кафедри інженерної та комп'ютерної графіки; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-37-24; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4310-3128>; e-mail: andrisherjjsv@gmail.com